К теории факторно делимых групп. I*

А. А. ФОМИН
Московский педагогический государственный университет
e-mail: alexander.fomin@mail.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: факторно делимая абелева группа.

Аннотация

В статье доказываются некоторые базовые теоремы о факторно делимых абелевых группах.

Abstract

A. A. Fomin, To quotient divisible group theory. I, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 153—167.

Some basic theorems about quotient divisible Abelian groups are proved.

Понятие факторно делимой абелевой группы без кручения было введено Р. Бьюмонтом и Р. Пирсом [10] в 1961 г. Это понятие было обобщено на случай смешанных абелевых групп в [20] У. Уиклессом и автором в 1998 г. Была построена двойственность между категориями факторно делимых групп и групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов. В дальнейшем эти категории были заменены на категорию факторно делимых групп с выделенными базисами и категорию групп без кручения конечного ранга с выделенными базисами [17, 19]. Морфизмами в этих категориях служат обычные гомоморфизмы. Эта модификация двойственности [20] позволяет дуализировать практически любую теорему о группах без кручения конечного ранга. Например, в [18] приводится дуализация известной теоремы А. Л. С. Корнера [13] о почти вполне разложимых группах с аномальными прямыми разложениями. Заметим, что в категории квазигомоморфизмов такие группы неотличимы от вполне разложимых групп без кручения. Новое элегантное определение двойственности [19] было предложено А. В. Яковлевым в [6]. Смешанные факторно делимые абелевы группы также рассматривались многими авторами, среди которых У. Альбрехт, С. Бреаз, Ч. Винсонхалер, С. Файлс, Ф. Шультц, О. И. Давыдова, П. А. Крылов, Е. Г. Пахомова, А. В. Царёв (см. [1—5, 7—9, 11, 12, 14—16, 23]).

*Исследования поддержаны грантом ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы, государственный контракт № 14.B37.21.0363.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 153—167.

На наш взгляд, в настоящее время назрела необходимость систематизировать знания о факторно делимых группах для создания теории факторно делимых групп, которая предположительно будет двойственной классической теории абелевых групп без кручения конечного ранга. Данная статья является первым шагом на этом пути.

Первый раздел носит вспомогательный характер. В нём рассматриваются p-независимые множества и p-базисные подгруппы, введённые Л. Фуксом [21] (см. также [22, § 32]). Во втором разделе доказываются некоторые базовые теоремы о факторно делимых группах, в том числе теорема 2.8 о строении периодической части факторно делимой группы, критерий расщепляемости (теорема 2.9), теорема о дополнении (теорема 2.10), теорема о первой ульмовской подгруппе (теорема 2.14).

Все рассматриваемые группы абелевы. Через $\mathbb{N}$ обозначим множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_n$ — кольца целых чисел, рациональных чисел, классов вычетов по модулю n соответственно (так же мы обозначаем аддитивные группы этих колец). Пусть $a_1, \ldots, a_n$ — элементы группы A. Тогда через $\langle a_1, \ldots, a_n \rangle$ обозначим подгруппу группы A, порождённую элементами $a_1, \ldots, a_n$, $t(A)$ — периодическая часть группы A. Пусть p — простое число. Тогда $t_p(A)$ — p-примарная компонента группы A, $\mathrm{r}_p(A)$ — p-ранг группы A, т. е. размерность векторного пространства A/pA над полем $\mathbb{Z}_p$; $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ — группа типа p^∞, т. е. группа, порождённая счётным множеством элементов $a_1, a_2, \ldots$, удовлетворяющих условиям $a_1 \neq 0$, $pa_1 = 0$, $pa_{k+1} = a_k$ для всех $k \in \mathbb{N}$.

1. p-независимые множества

Определение 1.1. Пусть p — простое число. Множество $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ ненулевых элементов группы A называется *p-независимым*, если для любого $s \in \mathbb{N}$ из делимости произвольной целочисленной линейной комбинации

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n$$

на p^s в группе A следует делимость на p^s всех коэффициентов m_i, таких что $m_ia_i \neq 0$, т. е. из того, что $m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \in p^sA$, следует, что $m_i \in p^s\mathbb{Z}$ или $m_ia_i = 0$. Бесконечное множество элементов p-независимо, если всякое его конечное подмножество p-независимо.

Прежде всего отметим, что если элемент a из p-независимой системы имеет конечный порядок, то его порядок есть степень простого числа p. Действительно, в противном случае $\mathrm{o}(a) = p^kn$, где $n > 1$ взаимно просто с p. Тогда элемент $a_1 = p^ka \neq 0$ порождает циклическую группу $\langle a_1 \rangle$ порядка n. Так как НОД$(n, p) = 1$, то элемент a_1 делится на любую степень числа p в группе $\langle a_1 \rangle$. Следовательно, линейная комбинация p^ka делится на любую степень числа p, но это не верно для её коэффициента p^k.

Лемма 1.2. *Если S — p-независимое подмножество группы A, но множество $S \cup \{b\}$, где $0 \neq b \in A$, не p-независимо, то найдётся пара целых чисел*

$0 \leqslant r < s$, таких что $p^r b + m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n \in p^s A$ для некоторых $a_1, \ldots, a_n \in S$, $m_1, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$ и $p^r b \neq 0$.

Доказательство. Так как множество $S \cup \{b\}$ не p-независимо, то существует целочисленная линейная комбинация

$$kb + m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n \in p^s A,$$

где $a_1, \ldots, a_n \in S$ и $s > 1$, такая что не все её коэффициенты делятся на p^s. Легко убедиться, что именно k не делится на p^s и $kb \neq 0$, т. е. $k = p^r k_1$, где $0 \leqslant r < s$ и НОД$(k_1, p) = 1$. Тогда найдутся целые числа u и v, такие что $uk_1 + vp^{s-r} = 1$. Умножим на u равенство $p^r k_1 b + m_1 a_1 + \ldots + m_n a_n = p^s z$, получим

$$p^r b + (um_1) a_1 + \ldots + (um_n) a_n = p^s (uz + vb) \in p^s A,$$

где $p^r b \neq 0$. □

Очевидно, что любое подмножество p-независимого множества также является p-независимым. Мы будем считать пустое множество p-независимым, что не противоречит определению.

Объединение любой возрастающей цепочки p-независимых множеств

$$S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots$$

также будет p-независимым множеством. Учитывая лемму Цорна, получаем справедливость следующего утверждения.

Предложение 1.3. *Всякая группа содержит максимальное p-независимое подмножество элементов для каждого простого числа p.* □

Предложение 1.4. *Группа A содержит непустые p-независимые подмножества элементов тогда и только тогда, когда A не p-делимая группа, т. е. $pA \neq A$.*

Доказательство. Пусть A — p-делимая группа и $0 \neq a \in A$. Тогда $1 \cdot a \in pA$ и 1 не делится на p, следовательно, a не принадлежит никакому p-независимому множеству элементов группы A. Таким образом, p-независимое подмножество группы A пусто.

Пусть $pA \neq A$. Предположим, что A содержит элемент a порядка p и конечной p-высоты n. Это означает, что $a = p^n b$ и $b \notin pA$. Множество, состоящее из одного элемента b, p-независимо, так как в противном случае из леммы 1.2 следует, что $p^r b \in p^s A$ для некоторого $0 \leqslant r < s$ и $r \leqslant n$, а значит, $a = p^{n-r}(p^r b)$ делится по меньшей мере на $p^{n+(s-r)}$ — противоречие. Если же все элементы порядка p в группе A имеют бесконечную p-высоту, т. е. $t_p(A)$ — делимая группа, то каждый элемент $a \in A \setminus pA$ образует p-независимое множество. Действительно, если $p^r a = p^s c$ для некоторых $0 \leqslant r < s$ и $c \in A$, то $p^r(a - p^{s-r}c) = 0$ и $a - p^{s-r}c \neq 0$. Следовательно, элемент $a - p^{s-r}c$ имеет бесконечную p-высоту, а из этого, в частности, вытекает, что $a - p^{s-r}c \in pA$. Таким образом, $a \in pA$ — противоречие. □

Теорема 1.5. *Пусть $S = \{a_i \mid i \in I\}$ — максимальное p-независимое подмножество группы A и $\bar{a}_i = a_i + pA \in A/pA$, $i \in I$. Тогда множество элементов $\bar{S} = \{\bar{a}_i \mid i \in I\}$ является базисом векторного пространства A/pA над полем $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.*

Доказательство. Нетрудно убедиться, что множество векторов $\bar{S} = \{\bar{a}_i \mid i \in I\}$ линейно независимо. Действительно, из равенства

$$\bar{m}_1\bar{a}_1 + \bar{m}_2\bar{a}_2 + \ldots + \bar{m}_n\bar{a}_n = 0,$$

где $\bar{a}_i \in \bar{S}$, $\bar{m}_i = m_i + p\mathbb{Z} \in \mathbb{Z}_p$, $m_i \in \mathbb{Z}$, $i \in \{1, \ldots, n\}$, следует, что

$$m_1a_1 + m_2a_2 + \ldots + m_na_n \in pA.$$

Тогда, учитывая p-независимость множества S, получаем, что все коэффициенты m_i делятся на p, т. е. $\bar{m}_1 = \bar{m}_2 = \ldots = \bar{m}_n = 0$.

Покажем, что для любого $0 \neq b \in A$ вектор $\bar{b} = b + pA$ из A/pA может быть представлен в виде линейной комбинации векторов множества $\bar{S} = \{\bar{a}_i \mid i \in I\}$. Так как $S = \{a_i \mid i \in I\}$ — максимальное p-независимое подмножество группы A, то множество $S \cup \{b\}$ не p-независимое, следовательно, по лемме 1.2

$$p^rb + m_1a_1 + \ldots + m_na_n \in p^sA, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant r < s \quad \text{и} \quad p^rb \neq 0. \tag{1}$$

Воспользуемся индукцией по r. При $r = 0$ вектор $\bar{b}$, очевидно, линейно выражается через векторы множества $\bar{S}$. Пусть $r > 0$ — минимальное число, такое что для b выполняется условие (1), и пусть утверждение верно при любом $0 \leqslant t < r$. Тогда

$$p^rb + m_1a_1 + \ldots + m_na_n = p^sz, \quad z \in A.$$

Учитывая p-независимость множества S, получаем, что все коэффициенты m_i делятся на p^r, т. е. $m_1 = p^rm'_1, \ldots, m_n = p^rm'_n$. Следовательно,

$$p^r(b + m'_1a_1 + \ldots + m'_na_n - p^{s-r}z) = 0.$$

Элемент $c = b + m'_1a_1 + \ldots + m'_na_n - p^{s-r}z$ имеет порядок p^r в силу минимальности r.

Применяя лемму 1.2 теперь к элементу c, получаем, что

$$p^tc + k_1a_1 + \ldots + k_na_n \in p^uA, \quad \text{где} \quad 0 \leqslant t < u \quad \text{и} \quad p^tc \neq 0.$$

Здесь, не теряя общности рассуждений, мы можем использовать те же самые элементы $a_1, \ldots, a_n$. Так как $p^tc \neq 0$, то $t < r$. Следовательно, по предположению индукции

$$\bar{c} = \bar{b} + m'_1\bar{a}_1 + \ldots + m'_n\bar{a}_n = l_1\bar{a}_1 + \ldots + l_n\bar{a}_n$$

для некоторых целых $l_1, \ldots, l_n$. Таким образом, вектор

$$\bar{b} = (l_1 - m'_1)\bar{a}_1 + \ldots + (l_n - m'_n)\bar{a}_n$$

лежит в линейной оболочке множества $\bar{S}$. □

Определение 1.6. Пусть A — некоторая группа и p — простое число. Максимальное p-независимое подмножество S группы A называется её *p-базисом*. Подгруппа $\langle S\rangle$, порождённая множеством S, называется *p-базисной подгруппой* группы A.

Следствие 1.7. *Любые два p-базиса группы A имеют одинаковую мощность, равную p-рангу группы A.* □

Следующая теорема является обобщением теоремы 1.5.

Теорема 1.8. *Пусть $S = \{a_i \mid i \in I\}$ — p-базис группы A, и пусть $pA \neq A$, $n \in \mathbb{N}$. Обозначим $\bar{a}_i = a_i + p^n A \in A/p^n A$. Тогда*

$$A/p^n A = \bigoplus_{i\in I}\langle \bar{a}_i\rangle.$$

Доказательство. Пусть

$$\bar{b} \in \langle \bar{a}_i\rangle \cap \sum_{j\neq i}\langle \bar{a}_j\rangle$$

при некотором $i \in I$. Тогда найдутся $m \in \mathbb{N}$ и $m_1, m_2, \ldots, m_n \in \mathbb{Z}$, такие что

$$\bar{b} = m\bar{a}_i = m_1\bar{a}_{j_1} + m_2\bar{a}_{j_2} + \ldots + m_n\bar{a}_{j_n},$$

а значит, $ma_i - m_1a_{j_1} - \ldots - m_na_{j_n} \in p^n A$. Так как S — p-независимое подмножество, то $ma_i = 0$ или m делится на p^n. В обоих случаях $\bar{b} = m\bar{a}_i = 0$. Следовательно, сумма

$$\sum_{i\in I}\langle \bar{a}_i\rangle = \bigoplus_{i\in I}\langle \bar{a}_i\rangle$$

является прямой.

Убедимся, что

$$A/p^n A \subseteq \bigoplus_{i\in I}\langle \bar{a}_i\rangle.$$

Пусть $\bar{b} \in A/p^n A$. Тогда по теореме 1.5

$$b = k_{11}a_1 + k_{12}a_2 + \ldots + k_{1m}a_m + pz, \tag{2}$$

где $0 \leqslant k_{1i} < p$, $a_i \in S$, $i \in \{1, 2\ldots, m\}$, $z \in A$. Применяя теорему 1.5 к элементу z, получаем аналогичное равенство

$$z = k_{21}a_1 + k_{22}a_2 + \ldots + k_{2m}a_m + pv.$$

Подставляем его в (2), получаем

$$b = (k_{11} + k_{21}p)a_1 + (k_{12} + k_{22}p)a_2 + \ldots + (k_{1m} + k_{2m}p)a_m + p^2v.$$

Далее применяем теорему 1.5 к элементу v и подставляем получившийся результат в последнее равенство и т. д. Через n шагов мы получим

$$b = (k_{11} + k_{21}p + \ldots + k_{n1}p^{n-1})a_1 + \ldots + \\ + (k_{1m} + k_{2m}p + \ldots + k_{nm}p^{n-1})a_m + p^n w.$$

Таким образом,

$$\bar{b} \in \langle \bar{a}_1 \rangle + \ldots + \langle \bar{a}_m \rangle \subset \sum_{i\in I} \langle \bar{a}_i \rangle = \bigoplus_{i\in I} \langle \bar{a}_i \rangle. \qquad \square$$

Из доказанной теоремы очевидным образом получаем следствие.

Следствие 1.9. *Пусть B_p — p-базисная подгруппа группы A, порождённая p-базисом $\{a_i \mid i \in I\}$. Тогда*

1) $B_p = \bigoplus_{i\in I} \langle a_i \rangle$;
2) $A = B_p + p^n A$ *для каждого* $n \in \mathbb{N}$. $\square$

Следующая теорема характеризует группы конечного p-ранга.

Теорема 1.10. *Пусть p — простое число. Если группа A не содержит подгрупп, изоморфных $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, и $\mathrm{r}_p(A) < \infty$, то $A = t_p(A) \oplus A'$. Кроме того, справедливы следующие утверждения.*

1. $t_p(A) = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_m$ — *конечная прямая сумма m циклических p-примарных групп, $m \in \mathbb{Z}$.*
2. A' — *группа без p-кручения.*
3. $m + \mathrm{r}_p(A') = \mathrm{r}_p(A)$.

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_r$ — p-базис группы A, такой что элементы $a_1, a_2, \ldots, a_m$ имеют порядки $p^{t_1}, p^{t_2}, \ldots, p^{t_m}$ соответственно, $0 \leqslant m \leqslant r$, а элементы $a_{m+1}, \ldots, a_r$ имеют бесконечный порядок. По следствию 1.9 p-базисная подгруппа B, порождённая данным p-базисом, имеет вид

$$B = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_r \rangle,$$

кроме того,

$$t(B) = t_p(B) = \langle a_1 \rangle \oplus \langle a_2 \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_m \rangle,$$

а группа $B' = \langle a_{m+1} \rangle \oplus \ldots \oplus \langle a_r \rangle$ свободная. Пусть $s = \max\{t_1, t_2, \ldots, t_m\}$. Тогда $p^s\big(t_p(B)\big) = 0$. Нетрудно убедиться, что $t_p(B) \subseteq t_p(A)$. Покажем, что $t_p(B) = t_p(A)$.

Пусть $x_1 \in t_p(A)$ — произвольный элемент порядка p^t. По следствию 1.9 имеем $A = B + p^s A$. Тогда

$$x_1 = k_1^{(1)} a_1 + k_2^{(1)} a_2 + \ldots + k_r^{(1)} a_r + p^s z$$

при некотором $z \in A$ и целых коэффициентах. Умножая данное равенство на p^{s+t}, получаем

$$0 = p^{s+t} k_{m+1}^{(1)} a_{m+1} + \ldots + p^{s+t} k_r^{(1)} a_r + p^{2s+t} z.$$

Так как $\{a_{m+1}, \ldots, a_r\}$ — p-независимое множество, то все коэффициенты $k_{m+1}^{(1)}, \ldots, k_r^{(1)}$ делятся на p^s. Следовательно, и элемент

$$v_1 = x_1 - \big(k_1^{(1)} a_1 + k_2^{(1)} a_2 + \ldots + k_m^{(1)} a_m\big)$$

делится на p^s в группе A. Тогда существует элемент $x_2 \in A$, очевидно лежащий в $t_p(A)$, такой что

$$v_1 = x_1 - \big(k_1^{(1)}a_1 + k_2^{(1)}a_2 + \ldots + k_m^{(1)}a_m\big) = p^s x_2.$$

Повторив это рассуждение для элемента x_2, потом для элемента x_3 и так далее, мы получим бесконечную последовательность равенств

$$\begin{aligned}
&v_2 = x_2 - \big(k_1^{(2)}a_1 + k_2^{(2)}a_2 + \ldots + k_m^{(2)}a_m\big) = p^s x_3,\\
&\quad\ldots\\
&v_{n-1} = x_{n-1} - \big(k_1^{(n-1)}a_1 + k_2^{(n-1)}a_2 + \ldots + k_m^{(n-1)}a_m\big) = p^s x_n,\\
&v_n = x_n - \big(k_1^{(n)}a_1 + k_2^{(n)}a_2 + \ldots + k_m^{(n)}a_m\big) = p^s x_{n+1},\\
&\quad\ldots
\end{aligned}$$

Если все элементы $v_1, v_2, \ldots$ отличны от нуля, то порождаемая ими подгруппа $\langle v_1, v_2, \ldots\rangle$ изоморфна группе $\mathbb{Z}_{p^\infty}$, так как $p^s v_n = v_{n-1}$ для каждого $n = 2, 3, \ldots$ и $v_1 \neq 0$ — p-примарный элемент. Поскольку группа A не содержит таких подгрупп, то $v_n = 0$ при некотором n. Тогда $x_n = k_1^{(n)}a_1 + k_2^{(n)}a_2 + \ldots + k_m^{(n)}a_m \in t_p(B)$ и $v_{n-1} = p^s x_n = 0$. Далее по индукции получаем, что $v_n = v_{n-1} = \ldots = v_1 = 0$, и значит, все элементы $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1$ лежат в подгруппе $t_p(B)$. Следовательно, подгруппы $t_p(B)$ и $t_p(A)$ совпадают.

Определим $A' = B' + p^s A$, где $B' = \langle a_{m+1}, \ldots, a_r\rangle$. Из того, что

$$A = B + p^s A = (t_p(B) + B') + p^s A,$$

следует, что $A = t_p(A) + (B' + p^s A) = t_p(A) + A'$. Пусть $x \in t_p(A) \cap A'$. Тогда

$$x = k_1 a_1 + \ldots + k_m a_m = k_{m+1}a_{m+1} + \ldots + k_r a_r + p^s z$$

при некоторых $z \in A$ и $k_1, k_2, \ldots, k_r \in \mathbb{Z}$. Следовательно,

$$k_1 a_1 + \ldots + k_m a_m - k_{m+1}a_{m+1} - \ldots - k_r a_r \in p^s A.$$

Тогда, учитывая p-независимость, получаем, что $k_i a_i = 0$ или k_i делится на p^s. В любом случае $k_i a_i = 0$ для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Значит, $x = 0$ и сумма $A = t_p(A) + A'$ прямая, $A = t_p(A) \oplus A'$.

Утверждения 1 и 2 теоремы теперь очевидны, утверждение 3 вытекает из простого факта, что p-ранг прямой суммы двух групп равен сумме p-рангов слагаемых. Остаётся учесть, что множества $\{a_1, \ldots, a_m\}$ и $\{a_{m+1}, \ldots, a_r\}$ являются p-базисами групп $t_p(A)$ и A' соответственно. □

Следствие 1.11. *Пусть A — группа конечного p-ранга без подгрупп типа p^∞. Тогда подгруппа $t_p(A)$ ограниченная, т. е. существует $0 \leqslant s \in \mathbb{Z}$, такое что $p^s\big(t_p(A)\big) = 0$ или, что равносильно, $p^s A$ — группа без p-кручения.* □

Следствие 1.12. *Пусть A — редуцированная группа p-ранга 1 и $t_p(A) \neq 0$. Тогда $t_p(A)$ — циклическая группа и $A = t_p(A) \oplus A'$, где A' — p-делимая группа без p-кручения.* □

2. Факторно делимые группы

Определение 2.1. Абелева группа A называется *факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу F конечного ранга, такую что A/F — периодическая делимая группа, и A не содержит ненулевых периодических делимых подгрупп. Ранг и базис свободной подгруппы F называются *рангом* и *базисом* факторно делимой группы A.

Пример 2.2. Свободные группы и делимые группы без кручения являются факторно делимыми тогда и только тогда, когда они имеют конечный ранг. Факторно делимая группа имеет нулевой ранг, только если она нулевая.

Пример 2.3. Группа $A = \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_n$, $n \in \mathbb{N}$, является факторно делимой ранга 1. Всякий элемент вида (a, b), где $0 \neq a \in \mathbb{Q}$ и b — порождающий элемент группы $\mathbb{Z}_n$, может служить базисом факторно делимой группы A.

Пример 2.4. Группа $\prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ не является факторно делимой, так как она имеет бесконечный ранг без кручения. Пусть $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots) \in \prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$. Рассмотрим уравнение

$$n \cdot x = m \cdot \mathbf{1}$$

для каждой пары целых чисел $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Все решения таких уравнений образуют подгруппу A в группе $\prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$. Группа A содержит все периодические элементы из $\prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$, так как последние являются решениями уравнений, в которых $m = 0$. Следовательно, $\bigoplus\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p \subset A \subset \prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$. Обозначим через $\mathbf{1}_p$ единицу кольца $\mathbb{Z}_p$. Если n не делится на простое число p, то уравнение $n \cdot x = m \cdot \mathbf{1}_p$ имеет единственное решение в $\mathbb{Z}_p$, которое можно отождествить с рациональным числом m/n. Таким образом, мы можем утверждать, что последовательность $(\alpha_p) \in \prod\limits_{p \in P} \mathbb{Z}_p$ принадлежит подгруппе A тогда и только тогда, когда почти все её компоненты α_p, т. е. все, за исключением конечного числа, равны одному и тому же рациональному числу. Группа A является факторно делимой ранга 1, элемент $\mathbf{1}$ образует её базис.

Лемма 2.5. *Пусть A — группа, $a_1, \ldots, a_n \in A$, $F = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$. Следующие утверждения равносильны.*

1. *Фактор-группа A/F является делимой.*
2. *Для каждого $m \in \mathbb{N}$ группа A/mA порождается элементами*
$$\bar{a}_1 = a_1 + mA, \ldots, \bar{a}_n = a_n + mA \in A/mA,$$
т. е. $A/mA = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$.
3. *Для каждого простого числа p группа A/pA порождается элементами*
$$\bar{a}_1 = a_1 + pA, \ldots, \bar{a}_n = a_n + pA \in A/pA,$$
т. е. $A/pA = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$.

Доказательство. Докажем импликацию $1 \Longrightarrow 2$. Так как A/F — делимая группа, то для любого $a \in A$ существует $b \in A$, такой что $a - mb \in F$, т. е.

$$a - mb = k_1a_1 + \ldots + k_na_n$$

при некоторых $k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}$. Тогда $a - (k_1a_1 + \ldots + k_na_n) = mb \in mA$. Следовательно, любой элемент из A/mA представим в виде $\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + \ldots + k_n\bar{a}_n$. Это означает, что $A/mA = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$.

Импликация $2 \Longrightarrow 3$ очевидна.

Докажем импликацию $3 \Longrightarrow 1$. Так как $A/pA = \langle \bar{a}_1, \ldots, \bar{a}_n \rangle$, то для каждого элемента $a \in A$ существуют целые коэффициенты, такие что

$$\bar{a} = k_1\bar{a}_1 + \ldots + k_n\bar{a}_n.$$

Это равносильно тому, что $a - (k_1a_1 + \ldots + k_na_n) = pc \in pA$ при некотором $c \in A$. Значит, $a - pc = k_1a_1 + \ldots + k_na_n \in F$. Таким образом, каждый элемент из группы A делится на p по модулю F, т. е. $A/F = p(A/F)$. Получили, что A/F — p-делимая группа, причём это верно при любом простом p. Следовательно, A/F — делимая группа. □

Заметим, что в лемме 2.5 группа F не обязана быть свободной.

Теорема 2.6. *Если A — факторно делимая группа ранга n, то $\mathrm{r}_p(A) \leqslant n$ для всех простых p.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис факторно делимой группы A, $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Тогда A/F — делимая группа. По лемме 2.5 векторное пространство A/pA над полем $\mathbb{Z}_p$ порождается n векторами для каждого простого числа p. Из этого следует, что $\mathrm{r}_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA \leqslant n$. □

Теорема 2.7. *Пусть T — периодическая подгруппа факторно делимой группы A. Тогда A/T тоже факторно делимая группа. В частности, $A/t(A)$ — факторно делимая группа без кручения.*

Доказательство. Пусть F — свободная подгруппа группы A, такая что A/F — делимая периодическая группа. Обозначим $\bar{A} = A/T$. Ограничение гомоморфизма $f\colon A \to \bar{A}$ на подгруппу F есть мономорфизм. Следовательно, подгруппа $\bar{F} = f(F) \subseteq \bar{A}$ свободная того же ранга. Рассмотрим ещё один гомоморфизм,

$$A \xrightarrow{f} \bar{A} \xrightarrow{g} \bar{A}/\bar{F}.$$

Композиция gf сюръективна и $\ker(gf) = F + T$, следовательно,

$$\bar{A}/\bar{F} \cong A/(F + T).$$

С другой стороны,

$$A/(F + T) \cong (A/F)/\big((F + T)/F\big),$$

а значит, $A/(F + T)$ — делимая периодическая группа как гомоморфный образ делимой периодической группы A/F.

Осталось показать, что $\bar{A}$ не содержит подгрупп типа p^∞. Все p-компоненты группы $t(A)$ — ограниченные группы (по теореме 2.6 и следствию 1.11). То же самое верно и для группы $t(A)/T$, которая совпадает с периодической частью группы $\bar{A}$. Следовательно, группа $\bar{A}$ не содержит подгрупп вида $\mathbb{Z}_{p^\infty}$. □

Теорема 2.8. *Пусть A — факторно делимая группа ранга n. Тогда для любого простого числа p имеет место прямое разложение $A = t_p(A) \oplus A'_p$. Кроме того, справедливы следующие утверждения.*

1. *$t_p(A) = C_1 \oplus C_2 \oplus \ldots \oplus C_{m_p}$ — конечная прямая сумма циклических p-примарных подгрупп, $0 \leqslant m_p \leqslant n$.*
2. *A'_p — факторно делимая группа без p-кручения.*
3. *$m_p + \mathrm{r}_p(A'_p) = \mathrm{r}_p(A) \leqslant n$.*

Доказательство. Данная теорема является прямым следствием теоремы 1.10. Действительно, достаточно учесть теорему 2.6 и тот факт, что A'_p — факторно делимая группа (по теореме 2.7). □

Будем говорить, что группа A *расщепляется*, если она раскладывается в прямую сумму периодической группы и группы без кручения, т. е. $A = t(A) \oplus B$.

Теорема 2.9. *Факторно делимая группа расщепляется тогда и только тогда, когда она имеет конечную периодическую часть.*

Доказательство. По теореме 2.8 все p-примарные компоненты факторно делимой группы A конечны, следовательно, её периодическая часть $t(A)$ конечна тогда и только тогда, когда количество ненулевых p-примарных компонент $t_p(A)$ конечно.

Пусть $t(A) = t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_s}(A)$ — конечная группа. Учитывая теорему 2.8, индукцией по количеству ненулевых примарных компонент s получаем

$$A = t_{p_1}(A) \oplus t_{p_2}(A) \oplus \ldots \oplus t_{p_s}(A) \oplus B,$$

где B — группа без кручения. Следовательно, $A = t(A) \oplus B$, т. е. A — расщепляющаяся группа.

Предположим, что A — расщепляющаяся факторно делимая группа с бесконечной периодической частью $t(A)$, т. е. $A = t(A) \oplus B$, где B — группа без кручения.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — базис факторно делимой группы A, т. е. группа $A/\langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle$ является делимой периодической. Тогда

$$a_1 = t_1 + b_1,\ a_2 = t_2 + b_2, \ldots,\ a_n = t_n + b_n, \tag{3}$$

где элементы $t_1, t_2, \ldots, t_n \in t(A)$ имеют порядки $m_1, m_2, \ldots, m_n$ соответственно, $b_1, b_2, \ldots, b_n \in B$. Выберем простое число p, такое что $t_p(A) \neq 0$ и p взаимно просто со всеми числами $m_1, m_2, \ldots, m_n$. Тогда для этого p имеет место разложение

$$A = t_p(A) \oplus \left(\left(\bigoplus_{q \neq p} t_q(A)\right) \oplus B\right).$$

Из равенств (3) следует, что

$$a_1, a_2, \dots, a_n \in A' = \left(\bigoplus_{q\neq p} t_q(A)\right) \oplus B,$$

значит, $F = \langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \subset A'$. Тогда группа

$$A/F = t_p(A) \oplus (A'/F)$$

не может быть делимой, поскольку она содержит циклические прямые слагаемые. Из полученного противоречия следует, что расщепляющаяся факторно делимая группа всегда имеет конечную периодическую часть. □

Теорема 2.10 (теорема о дополнении). *Пусть p — простое число. Если p-ранг факторно делимой группы A строго меньше её ранга, то прямая сумма $C \oplus A$ также является факторно делимой группой для любой циклической p-примарной группы C.*

Доказательство. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_n$ — базис факторно делимой группы A, $\mathrm{r}_p(A) = r < n$. По лемме 2.5 векторное пространство A/pA над полем $\mathbb{Z}_p$ порождается элементами

$$\bar a_1 = a_1 + pA,\ \bar a_2 = a_2 + pA, \dots,\ \bar a_n = a_n + pA \in A/pA.$$

Множество этих элементов содержит базис векторного пространства. Пусть для определённости базис пространства A/pA состоит из векторов $\bar a_1, \bar a_2, \dots, \bar a_r$. Тогда $a_{r+1} - (k_1a_1 + k_2a_2 + \ldots + k_ra_r) \in pA$ при некоторых целочисленных коэффициентах. Построим систему элементов группы $B = C \oplus A$ следующим образом: $b_i = a_i$, если $i \neq r+1$, и $b_{r+1} = c + a_{r+1}$, где c — порождающий элемент группы C. Эти элементы порождают свободную подгруппу $G = \langle b_1, b_2, \dots, b_n\rangle \subseteq B$, такую что B/G — периодическая группа. Так как B имеет редуцированную периодическую часть (как и группа A), то нам достаточно показать, что B/G — делимая группа.

Векторное пространство B/pB имеет вид

$$\begin{aligned} B/pB = C/pC \oplus A/pA = \langle \bar c\rangle \oplus \langle \bar a_1, \bar a_2, \dots, \bar a_r\rangle = \\ = \langle \bar b_{r+1} - (k_1\bar b_1 + k_2\bar b_2 + \ldots + k_r\bar b_r)\rangle \oplus \langle \bar b_1, \bar b_2, \dots, \bar b_r\rangle. \end{aligned}$$

Следовательно, пространство B/pB порождается элементами

$$\bar b_1 = b_1 + pB,\ \bar b_2 = b_2 + pB, \dots,\ \bar b_n = b_n + pB \in B/pB.$$

То же самое верно для любого простого числа $q \neq p$, поскольку $b_{r+1} + qB = a_{r+1} + qB$ в группе B/qB. Тогда по лемме 2.5 группа B/G является делимой. Следовательно, элементы $b_1, b_2, \dots, b_n$ образуют базис факторно делимой группы B. □

Следующая теорема представляет собой один из вариантов китайской теоремы об остатках.

Теорема 2.11. *Пусть* $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} \dots p_s^{k_s}$ — *представление натурального числа в виде произведения степеней попарно различных простых чисел. Тогда для любой группы* A *справедливы следующие утверждения.*

1. $nA = \bigcap\limits_{i=1}^{s} p_i^{k_i} A.$
2. $A/nA \cong \bigoplus\limits_{i=1}^{s} (A/p_i^{k_i} A).$

Доказательство. Очевидно, что $nA \subseteq p_i^{k_i} A$ для каждого i, следовательно,

$$nA \subseteq \bigcap_{i=1}^{s} p_i^{k_i} A.$$

Если

$$a \in \bigcap_{i=1}^{s} p_i^{k_i} A,$$

то найдутся элементы $b_1, b_2, \dots, b_s \in A$, такие что $a = p_i^{k_i} b_i$, $i = 1, 2, \dots, s$. Введём обозначения

$$n_1 = p_1^{-k_1} n,\ n_2 = p_2^{-k_2} n, \dots,\ n_s = p_s^{-k_s} n.$$

Наибольший общий делитель этих чисел, очевидно, равен 1, следовательно,

$$u_1 n_1 + u_2 n_2 + \ldots + u_s n_s = 1 \tag{4}$$

при некоторых $u_1, u_2, \dots, u_s \in \mathbb{Z}$. Тогда $n_1 a = n b_1, \dots,\ n_s a = n b_s$. Умножая (4) на a, получаем

$$\begin{aligned} a = {} & u_1(n_1 a) + u_2(n_2 a) + \ldots + u_s(n_s a) = \\ & = u_1(n b_1) + u_2(n b_2) + \ldots + u_s(n b_s) = n(u_1 b_1 + u_2 b_2 + \ldots + u_s b_s) \in nA. \end{aligned}$$

Таким образом, первое утверждение теоремы доказано.

Включение $nA \subseteq p_i^{k_i} A$ индуцирует гомоморфизм $A/nA \to A/p_i^{k_i} A$, действующий по закону $a + nA \mapsto a + p_i^{k_i} A$. Все такие гомоморфизмы ($i = 1, 2, \dots, s$) определяют гомоморфизм

$$f\colon A/nA \to \bigoplus_{i=1}^{s} A/p_i^{k_i} A,$$

где $f(a) = (a + p_1^{k_1} A, a + p_2^{k_2} A, \dots, a + p_s^{k_s} A)$. Из первого утверждения данной теоремы следует, что f — инъективное отображение. Покажем, что оно также сюръективно. Рассмотрим произвольный элемент

$$b = (a_1 + p_1^{k_1} A, a_2 + p_2^{k_2} A, \dots, a_s + p_s^{k_s} A)$$

группы $\bigoplus\limits_{i=1}^{s} A/p_i^{k_i} A$. Определив $a = u_1 n_1 a_1 + u_2 n_2 a_2 + \ldots + u_s n_s a_s$, мы получим $f(a) = b$. Следовательно, f — изоморфизм. □

Определение 2.12. Подгруппа

$$A^1 = \bigcap_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} nA$$

называется первой ульмовской подгруппой группы A.

Предложение 2.13. *Первая ульмовская подгруппа A^1 группы A совпадает с пересечением $\bigcap p^k A$, где p пробегает все простые числа, а k независимо пробегает все целые положительные числа.*

Доказательство. Очевидно, что

$$A^1 = \bigcap_{0 \neq n \in \mathbb{Z}} nA \subseteq \bigcap p^k A.$$

По теореме 2.11 для любого $0 \neq n \in \mathbb{Z}$ верно включение $\bigcap p^k A \subseteq nA$. Следовательно, $\bigcap p^k A \subseteq A^1$. □

Теорема 2.14. *Первая ульмовская подгруппа факторно делимой группы является делимой группой без кручения конечного ранга.*

Доказательство. Пусть A — факторно делимая группа. По теореме 2.8 для любого простого числа p существует целое неотрицательное число m_p, такое что $p^{m_p}A$ — группа без p-кручения. Так как $A^1 \subseteq p^{m_p}A$ при любом простом p, то A^1 — группа без p-кручения при любом p. Из этого следует, что A^1 — группа без кручения.

Пусть $0 \neq a \in A^1$, и пусть p — простое число. По теореме 2.8 имеет место разложение

$$A = t_p(A) \oplus A'_p.$$

Тогда $a \in A'_p$, так как в противном случае $a = t + b$, где $0 \neq t \in t_p(A)$, $b \in A'_p$ и t делится на любую степень числа p в конечной группе $t_p(A)$, что невозможно. Уравнение $px = a$ может иметь несколько решений в группе A, но оно имеет единственное решение b в группе A'_p. Убедимся, что $b \in A^1$. Действительно, если $p^{s+m_p+1}c = a$, то $b = p^s(p^{m_p}c)$, а значит, элемент b делится на любую степень p^s простого числа p в группе A. Кроме того, элемент b делится на любую степень q^s простого числа $q \neq p$ в группе A, поскольку $1 = uq^s + vp$ при некоторых $u, v \in \mathbb{Z}$, и тогда

$$b = uq^s b + v(pb) = uq^s b + va = uq^s b + vq^s c = q^s(ub + vc)$$

для некоторого $c \in A$. Следовательно, b принадлежит пересечению $\bigcap q^k A$ по всем простым q и натуральным k, поэтому $b \in A^1$ по предложению 2.13. Таким образом, A^1 — p-делимая группа при любом простом p, а значит, A^1 — делимая группа. Наконец, ранг делимой группы без кручения A^1 не превосходит ранга факторно делимой группы A, который по определению конечен. □

Литература

[1] Крылов П. А., Пахомова Е. Г. Абелевы группы и регулярные модули // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 3. — С. 402—411.

[2] Царёв А. В. Псевдорациональный ранг абелевой группы // Сиб. мат. журн. — 2005. — Т. 46, № 1. — С. 217—229.

[3] Царёв А. В. Псевдорациональный ранг факторно делимой группы // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 3. — С. 201—213.

[4] Царёв А. В. Модули над кольцом псевдорациональных чисел и факторно делимые группы // Алгебра и анализ. — 2006. — Т. 18, № 4. — С. 198—214.

[5] Царёв А. В. Модуль псевдорациональных отношений факторно делимой группы // Алгебра и анализ. — 2010. — Т. 22, № 1. — С. 223—239.

[6] Яковлев А. В. Двойственность категорий абелевых групп без кручения конечного ранга и факторно делимых групп // Зап. науч. сем. ПОМИ — 2010. — Вып. 375. — С. 195—202.

[7] Albrecht U., Breaz S., Vinsonhaler C., Wickless W. Cancellation properties for quotient divisible groups // J. Algebra. — 2007. — Vol. 317, no. 1. — P. 424—434.

[8] Albrecht U., Breaz S., Wickless W. Purity and self-small groups // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35, no. 11. — P. 3789—3807.

[9] Albrecht U., Wickless W. Finitely generated and cogenerated QD groups // Rings, Modules, Algebras, and Abelian Groups. — New York: Marcel Dekker, 2004. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 236). — P. 13—26.

[10] Beaumont R., Pierce R. Torsion-free rings // Illinois J. Math. — 1961. — Vol. 5. — P. 61—98.

[11] Breaz S. Warfield dualities induced by self-small mixed groups // J. Group Theory. — 2010. — Vol. 13, no. 3. — P. 391—409.

[12] Breaz S., Schultz P. Dualities for self-small groups // Proc. Am. Math. Soc. — 2012. — Vol. 140. — P. 69—82.

[13] Corner A. L. S. A note on rank and direct decompositions of torsion-free Abelian groups // Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1961. — Vol. 57. — P. 230—233; 1969. — Vol. 66. — P. 239—240.

[14] Davydova O. I. Rank-1 quotient divisible groups // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154, no. 3. — P. 295—300.

[15] Files S., Wickless W. Direct sums of self-small mixed groups // J. Algebra. — Vol. 222, no. 1. — P. 1—16.

[16] Fomin A. A. Quotient divisible mixed groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 117—128.

[17] Fomin A. A. A category of matrices representing two categories of Abelian groups // J. Math. Sci. — 2008. — Vol. 154, No. 3. — P. 430—445.

[18] Fomin A. A. Quotient divisible and almost completely decomposable groups // Models, Modules and Abelian Groups in Memory of A. L. S. Corner. — Berlin: Walter de Gruyter, 2008. — P. 147—168.

[19] Fomin A. Invariants for Abelian groups and dual exact sequences // J. Algebra — 2009. — Vol. 322, No. 7. — P. 2544—2565.

[20] Fomin A. A., Wickless W. Quotient divisible Abelian groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — Vol. 126. — P. 45—52.

[21] Fuchs L. Notes on Abelian groups. I // Ann. Univ. Sci. — 1959. — Vol. 2. — P. 5—23; Acta Math. Acad. Sci. Hungar. — 1969. — Vol. 11. — P. 117—125.

[22] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. I, II. — New York: Academic Press, 1970; 1973.

[23] Wickless W. Direct sums of quotient divisible groups // Commun. Algebra. — 2003. — Vol. 31, no. 1. — P. 79—96.