Кольца квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона

А. В. ЧЕРЕДНИКОВА
Костромской государственный технологический университет
e-mail: cherednikova@bk.ru

УДК 512.541.7

Ключевые слова: квазиэндоморфизм, абелева группа, группа без кручения, почти вполне разложимая группа, радикал Джекобсона.

Аннотация

В статье получено описание колец квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона.

Abstract

A. V. Cherednikova, Quasi-endomorphism rings with the zero Jacobson radical of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 169—175.

In the paper, a description of rings of quasi-endomorphisms of almost completely decomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with the zero Jacobson radical is obtained.

Все рассматриваемые в статье группы предполагаются абелевыми без кручения конечного ранга.

Пусть G — группа, $\mathbb{Q}$ — поле рациональных чисел. Делимую оболочку $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G можно рассматривать как векторное пространство над $\mathbb{Q}$. Его размерность совпадает с рангом группы G, и аддитивная группа содержит G в качестве подгруппы.

Говорят, что группа G *квазиравна* группе H ($G \doteq H$), если $G \supseteq nH \supseteq mG$ для некоторых ненулевых целых чисел n и m. Квазиравенство означает, что подгруппа $G\cap H$ имеет конечный индекс как в G, так и в H.

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i ($i \in I$) делимой оболочки $\mathbb{Q}\otimes G$ группы G, таких что $G \doteq \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется квазислагаемым группы G.

Группа G называется *почти вполне разложимой*, если она квазиравна прямой сумме групп ранга 1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 169—175.

Кольцом квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G называется кольцо всех линейных преобразований f пространства $\mathbb{Q} \otimes G$, таких что $nf(G) \subseteq G$ для некоторых ненулевых целых чисел n. Другими словами, квазиэндоморфизмы — это обычные эндоморфизмы, формально поделённые на ненулевые целые числа.

Радикалом Джекобсона $\boldsymbol{J}(\mathbf{K})$ кольца $\mathbf{K}$ называется пересечение всех максимальных правых (левых) идеалов кольца $\mathbf{K}$.

В статье даётся описание колец квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона. Доказано, что с точностью до изоморфизма существует пять алгебр над полем рациональных чисел, являющихся алгебрами квазиэндоморфизмов почти вполне разложимых групп без кручения ранга 4 с нулевым радикалом Джекобсона.

Приведём предварительно некоторые определения и замечания.

В теории абелевых групп без кручения одним из основных понятий является понятие типа. Это понятие возникает из определения характеристики. *Характеристикой* (m_p) называется упорядоченная последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞, занумерованная простыми числами. Другими словами, $(m_p) = (m_2, m_3, m_5, \ldots)$, где $m_p \in \{\infty, 0, 1, \ldots\}$. Две характеристики называются эквивалентными, если они различаются не более чем в конечном числе конечных элементов. Класс эквивалентности характеристики (m_p) называется *типом* (Бэра) и обозначается $\sigma = [(mp)]$.

Множество характеристик является частично упорядоченным: $(m_p) \leqslant (k_p)$, если $m_p \leqslant k_p$ для любого простого числа p. Частичный порядок на множестве характеристик порождает частичный порядок на множестве типов: $\sigma \leqslant \tau$, если для некоторых характеристик (m_p) и (k_p) типов σ и τ соответственно $m_p \leqslant k_p$ для любого простого числа p. В противном случае типы σ и τ называют *несравнимыми*.

Если a — элемент абелевой группы без кручения G, то $\mathrm{h}_p(a)$ — p-высота элемента a в группе G, т. е. максимальная степень простого числа p, для которой a делится на $p^{\mathrm{h}_p(a)}$ в группе G. Если a делится на любую степень p, то $\mathrm{h}_p(a) = \infty$. Последовательность $\big(\mathrm{h}_p(a)\big) = (\mathrm{h}_1(a), \mathrm{h}_2(a), \ldots)$ p-высот элемента a по всем простым числам $p_1, p_2, \ldots$ называется *характеристикой элемента* a группы G. Тип $\big[\big(\mathrm{h}_p(a)\big)\big]$ называется *типом элемента* a в группе G.

Все ненулевые элементы произвольной группы R без кручения ранга 1 имеют один и тот же тип τ, называемый *типом* этой *группы*. В этом случае пишут $\mathrm{t}(R) = \tau$.

Замечание 1. Пусть G — почти вполне разложимая группа без кручения ранга 4 и

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4. \tag{1}$$

Обозначим через H прямую сумму $R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4$. Известно [4], что $\mathcal{E}(G) = \mathcal{E}(H)$. Поэтому задача вычисления кольца квазиэндоморфизмов группы G сводится к задаче вычисления кольца квазиэндоморфизмов вполне разложимой группы H без кручения ранга 4.

Для вычисления кольца квазиэндоморфизмов вполне разложимой группы без кручения ранга 4 воспользуемся матричным представлением колец квазиэндоморфизмов.

Определения, факты и обозначения можно найти в [1—3].

Лемма. *Пусть H — вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и $H = R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4$, где $\operatorname{rank}(R_k) = 1$ для каждого $k = 1, 2, 3, 4$. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(H)$ изоморфно подалгебре полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$.*

Доказательство. Обозначим через $i_k \colon R_k \to H$ и $\pi_k \colon H \to \mathbb{Q} \otimes R_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Пусть фиксированы ненулевые элементы $r_1 \in R_1$, $r_2 \in R_2$, $r_3 \in R_3$, $r_4 \in R_4$. Тогда $i_k(r_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы H.

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi \colon H \to H$ вполне определяется элементами $\varphi i_k(r_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi i_1(r_1) &= \pi_1\varphi i_1(r_1) + \pi_2\varphi i_1(r_1) + \pi_3\varphi i_1(r_1) + \pi_4\varphi i_1(r_1),\\
\varphi i_2(r_2) &= \pi_1\varphi i_2(r_2) + \pi_2\varphi i_2(r_2) + \pi_3\varphi i_2(r_2) + \pi_4\varphi i_2(r_2),\\
\varphi i_3(r_3) &= \pi_1\varphi i_3(r_3) + \pi_2\varphi i_3(r_3) + \pi_3\varphi i_3(r_3) + \pi_4\varphi i_3(r_3),\\
\varphi i_4(r_4) &= \pi_1\varphi i_4(r_4) + \pi_2\varphi i_4(r_4) + \pi_3\varphi i_4(r_4) + \pi_4\varphi i_4(r_4).
\end{aligned} \tag{2}$$

С другой стороны, $\varphi i_k(r_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi i_1(r_1) &= \alpha_{11}r_1 + \alpha_{21}r_2 + \alpha_{31}r_3 + \alpha_{41}r_4,\\
\varphi i_2(r_2) &= \alpha_{12}r_1 + \alpha_{22}r_2 + \alpha_{32}r_3 + \alpha_{42}r_4,\\
\varphi i_3(r_3) &= \alpha_{13}r_1 + \alpha_{23}r_2 + \alpha_{33}r_3 + \alpha_{43}r_4,\\
\varphi i_4(r_4) &= \alpha_{14}r_1 + \alpha_{24}r_2 + \alpha_{34}r_3 + \alpha_{44}r_4,
\end{aligned} \tag{3}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$. Тогда из (2) и (3) следует, что

$$\pi_l\varphi i_k(r_k) = \alpha_{lk} \cdot r_l. \tag{4}$$

Отображение

$$gf \colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$f \colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1\varphi i_1 & \pi_1\varphi i_2 & \pi_1\varphi i_3 & \pi_1\varphi i_4\\ \pi_2\varphi i_1 & \pi_2\varphi i_2 & \pi_2\varphi i_3 & \pi_2\varphi i_4\\ \pi_3\varphi i_1 & \pi_3\varphi i_2 & \pi_3\varphi i_3 & \pi_3\varphi i_4\\ \pi_4\varphi i_1 & \pi_4\varphi i_2 & \pi_4\varphi i_3 & \pi_4\varphi i_4 \end{pmatrix}$$

и

$$g\colon \begin{pmatrix} \pi_1\varphi i_1 & \pi_1\varphi i_2 & \pi_1\varphi i_3 & \pi_1\varphi i_4 \\ \pi_2\varphi i_1 & \pi_2\varphi i_2 & \pi_2\varphi i_3 & \pi_2\varphi i_4 \\ \pi_3\varphi i_1 & \pi_3\varphi i_2 & \pi_3\varphi i_3 & \pi_3\varphi i_4 \\ \pi_4\varphi i_1 & \pi_4\varphi i_2 & \pi_4\varphi i_3 & \pi_4\varphi i_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом $\mathcal{E}(H)$ и подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 [2]. $\square$

Замечание 2. Пусть в квазиразложении (1) $\mathrm{t}(R_k) = \tau_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ и $\varphi\colon G \to G$ — квазиэндоморфизм. Обозначим через $i_k\colon R_k \to G$ и $\pi_k\colon G \to \mathbb{Q}\otimes R_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Неравенство $\tau_k \leqslant \tau_l$ не имеет места тогда и только тогда, когда $\pi_l\varphi i_k(r_k) = 0$.

Замечание 3. Пусть в квазиразложении (1) $\mathrm{t}(R_k) = \tau_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Неравенство $\tau_k \leqslant \tau_l$ выполняется тогда и только тогда, когда $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(R_k, R_l) \cong \mathbb{Q}$, где $\mathbb{Q}\operatorname{Hom}(R_k, R_l) = \mathbb{Q}\otimes\operatorname{Hom}(R_k, R_l)$ — группа квазигомоморфизмов группы R_k в группу R_l. Следовательно, α_{lk} из равенства (4) пробегает всё множество рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

Замечание 4. В квазиразложении (1) порядок квазислагаемых не имеет значения, так как, поменяв любым образом квазислагаемые местами, мы получим группу, изоморфную группе в правой части (1). Поэтому в формулировке следующей теоремы под τ_1 будем понимать тип одного (любого) из квазислагаемых в квазиразложении (1), под τ_2 — тип любого другого из оставшихся квазислагаемых и т. д.

В формулировке теоремы запись $\tau_i \ \xi \ \tau_j$ означает, что тип τ_i квазислагаемого R_i несравним с типом τ_j квазислагаемого R_j в квазиразложении (1).

Введём следующие обозначения для подалгебр полной матричной алгебры над полем рациональных чисел $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$:

$$\mathbb{Q}^4 = \mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{A}_6 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{B}_8 = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\},$$

$$\mathbf{C}_{10} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & 0 \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Здесь индекс в обозначении подалгебры означает её размерность над $\mathbb{Q}$.

Теорема. *Пусть G — почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и*

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4, \tag{5}$$

где $\mathrm{rank}(R_k) = 1$ и $\mathrm{t}(R_k) = \tau_k$ для $k = 1,2,3,4$. Кольцо $\mathbf{K}$ реализуется как алгебра квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G с нулевым радикалом Джекобсона, $\mathbf{K} \cong \mathcal{E}(G)$, тогда и только тогда, когда $\mathbf{K}$ изоморфно одной из следующих алгебр: $\mathbb{Q}^4$, $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{B}_8$, $\mathbf{C}_{10}$, $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$. При этом

1) $\mathbf{K} \cong \mathbb{Q}^4$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 \,\xi\, \tau_2$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$;
2) $\mathbf{K} \cong \mathbf{A}_6$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$;
3) $\mathbf{K} \cong \mathbf{B}_8$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_3 = \tau_4$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_3$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_4$;
4) $\mathbf{K} \cong \mathbf{C}_{10}$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, $\tau_1 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_2 \,\xi\, \tau_4$, $\tau_3 \,\xi\, \tau_4$;
5) $\mathbf{K} \cong \mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ *тогда и только тогда, когда* $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Доказательство. Достаточность условий в формулировке теоремы, накладываемых на типы квазислагаемых, следует из леммы и замечаний 1—3.

Действительно, пусть квазислагаемые группы G удовлетворяют условию

$$\tau_1 \,\xi\, \tau_2, \quad \tau_1 \,\xi\, \tau_3, \quad \tau_1 \,\xi\, \tau_4, \quad \tau_2 \,\xi\, \tau_3, \quad \tau_2 \,\xi\, \tau_4, \quad \tau_3 \,\xi\, \tau_4.$$

Тогда согласно замечанию 2 и равенству (4) имеем, что $\alpha_{ij} = 0$ при $i \neq j$. Отсюда ввиду леммы и замечаний 1 и 3 получаем, что

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbb{Q}^4.$$

Пусть квазислагаемые группы G удовлетворяют условию

$$\tau_1 = \tau_2, \quad \tau_1 \,\xi\, \tau_3, \quad \tau_1 \,\xi\, \tau_4, \quad \tau_2 \,\xi\, \tau_3, \quad \tau_2 \,\xi\, \tau_4, \quad \tau_3 \,\xi\, \tau_4.$$

В этом случае согласно замечанию 2 и равенству (4) имеем, что

$$\alpha_{13} = \alpha_{14} = \alpha_{23} = \alpha_{24} = \alpha_{31} = \alpha_{32} = \alpha_{34} = \alpha_{41} = \alpha_{42} = \alpha_{43} = 0.$$

Следовательно, ввиду леммы и замечаний 1 и 3

$$\mathcal{E}(G) \cong \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 & 0 \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}_6.$$

Достаточность остальных условий доказывается аналогично.

Пусть кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно одной из пяти алгебр, перечисленных в формулировке теоремы. Тогда согласно лемме и замечаниям 1—3 требуется выполнение соответствующего соотношения для типов квазислагаемых группы G в разложении (5). Более того, очевидно, что других подколец матриц с рациональными элементами кольца $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$, изоморфных прямой сумме полных матричных колец над полем $\mathbb{Q}$, с точностью до изоморфизма не существует.

Кольцо называется *классически полупростым*, если оно изоморфно прямой сумме конечного числа полных матричных колец над телами [1]. Известно [1], что ассоциативное кольцо $\mathbf{R}$ с единицей классически полупросто тогда и только тогда, когда $\mathbf{R}$ артиново слева (справа) и его радикал Джекобсона равен нулю. Кольцо квазиэндоморфизмов абелевой группы без кручения конечного ранга является артиновым [3]. Следовательно, условие изоморфности кольца $\mathcal{E}(G)$ прямой сумме полных матричных колец над полем $\mathcal{E}(G)$ эквивалентно равенству нулю радикала Джекобсона этого кольца. Отсюда вытекает необходимость условий в формулировке теоремы, накладываемых на типы квазислагаемых. Теорема доказана. □

Следствие 1. *Пусть G — почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и*

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $\operatorname{rank}(R_k) = 1$ *и* $\operatorname{t}(R_k) = \tau_k$ *для* $k = 1, 2, 3, 4$. *Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G без кручения ранга 4 классически полупросто тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $\tau_1 \xi \tau_2$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;
2) $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;
3) $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_3 = \tau_4$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$;
4) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;
5) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Следствие 1 непосредственно вытекает из теоремы и определения классически полупростого кольца.

Псевдоцоколем группы G называется сервантная оболочка суммы всех минимальных сервантных вполне характеристических подгрупп группы G (обозначение $\operatorname{Soc} G$). Заметим, что $\operatorname{Soc} G \neq 0$ для любой группы G.

Следствие 2. *Пусть G — почти вполне разложимая абелева группа без кручения ранга 4 и*

$$G \doteq R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4,$$

где $\operatorname{rank}(R_k) = 1$ *и* $\operatorname{t}(R_k) = \tau_k$ *для* $k = 1, 2, 3, 4$. $G = \operatorname{Soc} G$ *тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий*:

1) $\tau_1 \xi \tau_2$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;
2) $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;

3) $\tau_1 = \tau_2$, $\tau_3 = \tau_4$, $\tau_1 \xi \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_3$, $\tau_2 \xi \tau_4$;
4) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$, $\tau_1 \xi \tau_4$, $\tau_2 \xi \tau_4$, $\tau_3 \xi \tau_4$;
5) $\tau_1 = \tau_2 = \tau_3 = \tau_4$.

Следствие 2 вытекает из следствия 1 и того, что кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G без кручения конечного ранга классически полупросто тогда и только тогда, когда группа G совпадает со своим псевдоцоколем $\mathrm{Soc}\, G$ [5].

Литература

[1] Мельников О. В., Ремесленников В. Н., Романьков В. А., Скорняков Л. А., Шестаков И. П. Общая алгебра. Т. 1. — М.: Наука, 1990.
[2] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.
[3] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.
[4] Beaumont R. A., Pierce R. S. Torsion free groups of rank two // Mem. Amer. Math. Soc. — 1961. — Vol. 38. — P. 1—41.
[5] Reid J. D. On the ring of quasi-endomorphisms of torsion-free Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — 1963. — P. 51—68.