О кольцах квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 1

А. В. ЧЕРЕДНИКОВА
Костромской государственный технологический университет
e-mail: cherednikova@bk.ru

УДК 512.541.7

Ключевые слова: квазиэндоморфизм, абелева группа, группа без кручения, почти вполне разложимая группа, радикал Джекобсона.

Аннотация

В статье получено матричное представление минимальной рациональной алгебры, подалгебрами которой являются с точностью до изоморфизма кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 1.

Abstract

A. V. Cherednikova, Quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 *with pseudosocles of rank* 1, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 177—182.

We obtain the matrix representation of the minimal rational algebra whose subalgebras, up to isomorphism, are quasi-endomorphism rings of strongly indecomposable torsion-free Abelian groups of rank 4 with pseudosocles of rank 1.

Все рассматриваемые в статье группы являются абелевыми группами без кручения конечного ранга. Обозначим через $\mathbb{Q}$ поле рациональных чисел.

Говорят, что группа G *квазиравна* группе H ($G \doteq H$), если $G \supseteq nH \supseteq mG$ для некоторых ненулевых целых чисел n и m.

Под *квазиразложением* группы G понимается семейство ненулевых подгрупп G_i ($i \in I$) делимой оболочки $\mathbb{Q} \otimes G$ группы G, таких что $G \doteq \bigoplus\limits_{i\in I} G_i$. При этом каждая из групп G_i называется квазислагаемым группы G.

Группа G называется *сильно неразложимой*, если она не обладает нетривиальными квазиразложениями.

Кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G — это минимальная рациональная алгебра, содержащая кольцо $E(G)$ эндоморфизмов группы, т. е. $\mathcal{E}(G) = \mathbb{Q} \otimes E(G)$.

В статье даётся матричное представление минимальной рациональной алгебры, подалгебрами которой являются с точностью до изоморфизма кольца квазиэндоморфизмов сильно неразложимых абелевых групп без кручения ранга 4 с псевдоцоколями ранга 1.

Определения, факты и обозначения можно найти в [3, 4].

Лемма. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно подалгебре полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4.*

Доказательство. Зафиксируем линейно независимые элементы $x_1, x_2, x_3, x_4 \in G$. Положим $R_1 = \langle x_1 \rangle_*$, $R_2 = \langle x_2 \rangle_*$, $R_3 = \langle x_3 \rangle_*$, $R_4 = \langle x_4 \rangle_*$, где $\langle x_k \rangle_*$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ — наименьшая сервантная подгруппа группы G, содержащая элемент x_k. Обозначим через $i_k \colon R_k \to G$ и $\pi_k \colon G \to \mathbb{Q} \otimes R_k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ возникающие здесь гомоморфизмы вложения и квазигомоморфизмы проекции. Тогда $i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ образуют максимальную линейно независимую систему группы G.

Всякий квазиэндоморфизм $\varphi \colon G \to G$ вполне определяется элементами $\varphi i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$, которые могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi i_1(x_1) &= \pi_1\varphi i_1(x_1) + \pi_2\varphi i_1(x_1) + \pi_3\varphi i_1(x_1) + \pi_4\varphi i_1(x_1),\\
\varphi i_2(x_2) &= \pi_1\varphi i_2(x_2) + \pi_2\varphi i_2(x_2) + \pi_3\varphi i_2(x_2) + \pi_4\varphi i_2(x_2),\\
\varphi i_3(x_3) &= \pi_1\varphi i_3(x_3) + \pi_2\varphi i_3(x_3) + \pi_3\varphi i_3(x_3) + \pi_4\varphi i_3(x_3),\\
\varphi i_4(x_4) &= \pi_1\varphi i_4(x_4) + \pi_2\varphi i_4(x_4) + \pi_3\varphi i_4(x_4) + \pi_4\varphi i_4(x_4).
\end{aligned} \tag{1}$$

С другой стороны, $\varphi i_k(x_k)$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
\varphi i_1(x_1) &= \alpha_{11}x_1 + \alpha_{21}x_2 + \alpha_{31}x_3 + \alpha_{41}x_4,\\
\varphi i_2(x_2) &= \alpha_{12}x_1 + \alpha_{22}x_2 + \alpha_{32}x_3 + \alpha_{42}x_4,\\
\varphi i_3(x_3) &= \alpha_{13}x_1 + \alpha_{23}x_2 + \alpha_{33}x_3 + \alpha_{43}x_4,\\
\varphi i_4(x_4) &= \alpha_{14}x_1 + \alpha_{24}x_2 + \alpha_{34}x_3 + \alpha_{44}x_4,
\end{aligned} \tag{2}$$

где $\alpha_{ij} \in \mathbb{Q}$.

Отображение

$$gf \colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$f \colon \varphi \mapsto \begin{pmatrix} \pi_1\varphi i_1 & \pi_1\varphi i_2 & \pi_1\varphi i_3 & \pi_1\varphi i_4\\ \pi_2\varphi i_1 & \pi_2\varphi i_2 & \pi_2\varphi i_3 & \pi_2\varphi i_4\\ \pi_3\varphi i_1 & \pi_3\varphi i_2 & \pi_3\varphi i_3 & \pi_3\varphi i_4\\ \pi_4\varphi i_1 & \pi_4\varphi i_2 & \pi_4\varphi i_3 & \pi_4\varphi i_4 \end{pmatrix}$$

и

$$g \colon \begin{pmatrix} \pi_1\varphi i_1 & \pi_1\varphi i_2 & \pi_1\varphi i_3 & \pi_1\varphi i_4\\ \pi_2\varphi i_1 & \pi_2\varphi i_2 & \pi_2\varphi i_3 & \pi_2\varphi i_4\\ \pi_3\varphi i_1 & \pi_3\varphi i_2 & \pi_3\varphi i_3 & \pi_3\varphi i_4\\ \pi_4\varphi i_1 & \pi_4\varphi i_2 & \pi_4\varphi i_3 & \pi_4\varphi i_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24}\\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34}\\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix},$$

является изоморфизмом $\mathcal{E}(G)$ и подалгебры полной матричной алгебры $\mathbf{M}_4(\mathbb{Q})$ порядка 4 [3]. □

Теорема. *Пусть G — сильно неразложимая абелева группа без кручения ранга 4 с псевдоцоколем ранга 1. Тогда кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G является с точностью до изоморфизма подалгеброй алгебры*

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & u & v \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Доказательство. По условию $\operatorname{Soc} G$ имеет ранг 1. Пусть ненулевой элемент x_1 принадлежит $\operatorname{Soc} G$. Зафиксируем линейно независимые элементы x_2, x_3, x_4 из $G \setminus \operatorname{Soc} G$. Так как подгруппа $\operatorname{Soc} G$ сервантна в G, то элементы x_1, x_2, x_3, x_4 линейно независимы и, следовательно, образуют максимальную линейно независимую систему группы G.

Так как из определения псевдоцоколя следует, что $\operatorname{Soc} G$ является вполне характеристической подгруппой группы G, равенства (1) леммы примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(x_1) = \pi_1 \varphi i_1(x_1), \\
&\varphi i_2(x_2) = \pi_1 \varphi i_2(x_2) + \pi_2 \varphi i_2(x_2) + \pi_3 \varphi i_2(x_2) + \pi_4 \varphi i_2(x_2), \\
&\varphi i_3(x_3) = \pi_1 \varphi i_3(x_3) + \pi_2 \varphi i_3(x_3) + \pi_3 \varphi i_3(x_3) + \pi_4 \varphi i_3(x_3), \\
&\varphi i_4(x_4) = \pi_1 \varphi i_4(x_4) + \pi_2 \varphi i_4(x_4) + \pi_3 \varphi i_4(x_4) + \pi_4 \varphi i_4(x_4).
\end{aligned}$$

Тогда равенства (2) леммы примут вид

$$\begin{aligned}
&\varphi i_1(x_1) = \alpha_{11} x_1, \\
&\varphi i_2(x_2) = \alpha_{12} x_1 + \alpha_{22} x_2 + \alpha_{32} x_3 + \alpha_{42} x_4, \\
&\varphi i_3(x_3) = \alpha_{13} x_1 + \alpha_{23} x_2 + \alpha_{33} x_3 + \alpha_{43} x_4, \\
&\varphi i_4(x_4) = \alpha_{14} x_1 + \alpha_{24} x_2 + \alpha_{34} x_3 + \alpha_{44} x_4.
\end{aligned} \tag{3}$$

Тогда по лемме имеем, что

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{K}.$$

Так как кольцо $\mathcal{E}(G)$ является артиновым, радикал Джекобсона $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ кольца $\mathcal{E}(G)$ нильпотентен [1].

Найдём максимальный нильпотентный идеал кольца $\mathbf{K}$.

Легко убедиться, что если $A = \|a_{ij}\|$ — квадратная матрица порядка n с рациональными элементами и для некоторых i, j выполняются условия $a_{ij} \neq 0$,

$a_{ji} \neq 0$, то матрица A не является нильпотентной. Из этого следует, что если для некоторого натурального n

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{44} \end{pmatrix}^n = 0,$$

то

$$\alpha_{11} = \alpha_{22} = \alpha_{33} = \alpha_{44} = 0 \tag{4}$$

и при $i \neq j$

$$\alpha_{ij} \neq \alpha_{ji}. \tag{5}$$

Вычисления показывают, что среди матриц кольца $\mathbf{K}$, удовлетворяющих условиям (4) и (5), нильпотентными являются следующие матрицы с рациональными элементами:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_2 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{24} \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_3 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{43} & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_4 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & \alpha_{42} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$K_5 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{pmatrix}, \qquad K_6 = \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{32} & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{42} & \alpha_{43} & 0 \end{pmatrix}.$$

Из вычислений следует, что кольца матриц вида K_2, K_3, K_4, K_5, K_6 изоморфны кольцу матриц вида K_1.

Следовательно, $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ является с точностью до изоморфизма подкольцом кольца $\mathbf{K}_1$, где

$$\mathbf{K}_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Известно [2], что если группа G сильно неразложима, кольцо $\mathcal{E}(G)$ артиново справа и $\operatorname{rank}(G/\operatorname{Soc} G) < \infty$, то $\boldsymbol{N}\big(\mathcal{E}(G)\big) = \operatorname{Ann}(\operatorname{Soc} G)$, где $\boldsymbol{N}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ — ниль-радикал кольца $\mathcal{E}(G)$, а

$$\operatorname{Ann}(\operatorname{Soc} G) = \{\varphi \in \mathcal{E}(G) \mid \varphi(x) = 0,\ x \in \operatorname{Soc} G\}.$$

Так как идеал $\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)$ нильпотентен, он является ниль-идеалом [2]. Следовательно,

$$\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big)(\operatorname{Soc} G) = 0. \tag{6}$$

Возьмём произвольный элемент $g \in \operatorname{Soc} G$ и произвольный элемент $\varphi \in \in \boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) \subseteq \mathbf{K}_1$. Для некоторого ненулевого целого числа n элемент mg представим в виде $mg = nx_1$, где $n{\in}\mathbb{Z}$. Тогда $\varphi(mg) = \varphi(nx_1) = n_\varphi(x_1)$. Значит, для того чтобы $\varphi(mg) = 0$, достаточно выполнения условия $\varphi(x_1) = 0$. Но из (3) и (4) следует, что $\varphi(x_1) = \alpha_{11}x_1 = 0$. Значит, условие (6) выполняется.

Таким образом,

$$\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ 0 & 0 & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| \, \alpha_{ij} \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Дж. Рид [6] показал, что если P — некоторая (равносильно любая) минимальная сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G, то

$$\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) = \operatorname{rank} P.$$

Следовательно, в рассматриваемом случае $\dim_{\mathbb{Q}} \mathcal{E}(G)/\boldsymbol{J}\big(\mathcal{E}(G)\big) = 1$, так как $\operatorname{Soc} G$ имеет ранг 1.

Получили, что

$$\mathcal{E}(G) \subseteq \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & u & v \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{Q} \right\} = \mathbf{A}.$$

Теорема доказана. $\square$

Покажем, что алгебра $\mathbf{A}$ реализуется как кольцо квазиэндоморфизмов некоторой сильно неразложимой абелевой группы без кручения ранга 4 с псевдоцоколем ранга 1.

Пример. *Характеристикой* (m_p) называется упорядоченная последовательность неотрицательных целых чисел и символов ∞, занумерованная простыми числами. Две характеристики называются эквивалентными, если они различаются не более чем в конечном числе конечных элементов. Класс эквивалентности характеристики (m_p) называется *типом* (Бэра) и обозначается $\tau = [(m_p)]$.

Д. Арнольд в [5] определил на множестве типов следующее отношение: $\tau_1 \ll \tau_2$, если существует тип τ, такой что $\tau_1 = [(k_p)] < \tau = [(l_p)] < \tau_2 = = [(m_p)]$, где $k_p \leqslant l_p \leqslant_p$ для каждого простого числа p и $k_p = l_p$ всякий раз, как только $m_p = \infty$. В этой же работе Д. Арнольд доказал (см. пример 2.5, с. 24) следующее утверждение: для каждого целого $n \geqslant 1$ и типов $\tau_1 \ll \tau_2 \ll \ldots \ll \tau_n$ существует сильно неразложимая группа A ранга n с сервантными подгруппами ранга 1 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, такими что $A/(A_1 \oplus \ldots \oplus A_n)$ периодическая и $\operatorname{type}(A_i) = \tau_i$ для каждого i.

Следовательно, согласно Д. Арнольду, существует сильно неразложимая группа G ранга 4 с сервантными подгруппами ранга 1 R_1, R_2, R_3, R_4, такими что $G/(R_1 \oplus R_2 \oplus R_3 \oplus R_4)$ периодическая и

$$\mathrm{type}(R_1) \ll \mathrm{type}(R_2) \ll \mathrm{type}(R_3) \ll \mathrm{type}(R_4).$$

Тогда в равенствах (1) леммы $\pi_l \varphi i_k(x_k) = 0$, если $\mathrm{type}(R_l) \ll \mathrm{type}(R_k)$. Легко убедиться, что в рассматриваемом случае $\mathrm{Soc}\, G = R_4$ имеет ранг 1 и кольцо квазиэндоморфизмов $\mathcal{E}(G)$ группы G изоморфно алгебре $\mathbf{A}$, где

$$\mathbf{A} = \left\{ \begin{pmatrix} x & y & z & t \\ 0 & x & u & v \\ 0 & 0 & x & w \\ 0 & 0 & 0 & x \end{pmatrix} \middle| \, x, y, z, t, u, v, w \in \mathbb{Q} \right\}.$$

Литература

[1] Каш Ф. Модули и кольца. — М.: Мир, 1981.

[2] Крылов П. А. Радикалы колец эндоморфизмов абелевых групп без кручения // Мат. сб. — 1974. — Т. 95, № 10. — С. 214—228.

[3] Пирс Р. Ассоциативные алгебры. — М.: Мир, 1986.

[4] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.

[5] Arnold D. M. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes Math.; Vol. 931).

[6] Reid J. D. On the rings of quasi-endomorphism of torsion-free Abelian groups // Topics in Abelian Groups. — 1963. — P. 51—68.