Об абелевых группах, близких к E-разрешимым*

А. Р. ЧЕХЛОВ
Томский государственный университет
e-mail: cheklov@math.tsu.ru

УДК 512.541+512.552+512.553

Ключевые слова: коммутаторно инвариантная подгруппа, E-коммутант группы, E-центр группы, E-энгелева группа, полугрупповое кольцо.

Аннотация

Исследуются E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы. Изучаются свойства таких групп и приводятся примеры, иллюстрирующие различия и связи исследуемых классов групп. Указано строение E-разрешимых периодических, вполне разложимых, копериодических, расщепляющихся смешанных и др. групп.

Abstract

A. R. Chekhlov, On Abelian groups close to E-solvable groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 17 (2011/2012), no. 8, pp. 183—219.

E-nilpotent and E-solvable Abelian groups are studied. The properties of such groups are studied and examples illustrating the differences and connections between the investigated classes of groups have been presented. The structure of E-solvable periodical, completely decomposable, coperiodic, split mixed, and other groups is shown.

Как известно, заменяя в кольце эндоморфизмов $E(M)$ модуля M операцию умножения операцией коммутирования $\varphi\circ\psi=\varphi\psi-\psi\varphi$, получим лиево кольцо эндоморфизмов $L\big(E(M)\big)$ модуля M. В данной статье рассматривается действие $L\big(E(A)\big)$ на абелевы группы A, соответствующим результатам для модулей планируется посвятить отдельную статью.

Пусть A — абелева группа, через $E(A)$ будем обозначать кольцо её эндоморфизмов, $A^1=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} nA$, $\mathrm{r}(A)$ — её ранг, если не оговорено противное, то A_p — p-компонента, $t(A)$ — периодическая часть, $A[p^k]=\{a\in A\mid p^ka=0\}$, причём если A — p-группа, то $A[p^\infty]=A$. Если a — элемент порядка p^k, то через $e(a)=k$ обозначим его *экспоненту*. Запись $H\leqslant A$ означает, что H — подгруппа в A; $H\leqslant\mathrm{fi}\ A$, что H — вполне инвариантная подгруппа в A, т. е. $\varphi H\subseteq H$ для

*Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009—2013 годы (государственный контракт П 937 от 20 августа 2009 г.) и при поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.B37.21.0354 «Сохранение алгебраических и топологических инвариантов и свойств отображениями»).

Фундаментальная и прикладная математика, 2011/2012, том 17, № 8, с. 183—219.

каждого $\varphi \in E(A)$. Если $f \in \mathrm{Hom}(A, B)$, то $f|H$ — ограничение f на $H \subseteq A$. Если B, G — группы, $\varnothing \neq X \subseteq B$, то через $\mathrm{Hom}(B, G)X = \sum\limits_{f \in \mathrm{Hom}(B,G)} fX$ обозначим подгруппу группы G, порождённую всеми гомоморфными образами подмножества X, $\mathrm{Hom}(B, G)B$ совпадает со *следом* группы B в группе G. Через 0 обозначается как нулевой элемент группы, так и нулевая подгруппа; через $\langle X, Y, \ldots \rangle$ — подгруппа, порождённая подмножествами $X, Y, \ldots$ группы; через $\mathrm{o}(a)$ — порядок элемента a соответствующей группы; через 1_A — тождественный автоморфизм группы A. Если A — однородная группа без кручения, то $\mathrm{t}(A)$ — её тип. $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел, $\mathbb{Z}$ — кольцо или группа целых чисел, $\mathbb{Q}$ — поле или группа всех рациональных чисел, $\hat{\mathbb{Z}}_p$ — кольцо или группа целых p-адических чисел, P — множество всех простых чисел, Z_n — циклическая группа порядка n.

Подгруппа $G \leqslant A$ называется *чистой* в A, если $G \cap nA = nG$ для каждого натурального числа n. Абелева p-группа называется *коциклической*, если она является циклической или изоморфна группе Z_{p^∞}.

1. Определения и общие свойства

Напомним, что если R — кольцо и $a, b \in R$, то элемент $[a, b] = ab - ba$ называется *коммутатором* элементов a и b. Если $a_1, \ldots, a_n \in R$, то положим по индукции $[a_1, \ldots, a_n] = \big[[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n\big]$.

Подгруппу H группы A назовём *коммутаторно инвариантной* (обозначение $H \leqslant$ci A), если $[\varphi, \psi]H \subseteq H$ для всех $\varphi, \psi \in E(A)$. В группе с коммутативным кольцом эндоморфизмов всякая подгруппа является коммутаторно инвариантной подгруппой.

Группу A назовём *E-нильпотентной* класса n, если $[\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1}] = 0$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n+1} \in E(A)$ и $[\beta_1, \ldots, \beta_n] \neq 0$ для некоторых $\beta_1, \ldots, \beta_n \in E(A)$.

Как хорошо известно, коммутатор $[x, y]$ является билинейной знакопеременной функцией от x, y (см., например, [1, § 1, упр. 8, 9]). Для удобства ссылок приведём следующие свойства, некоторые из них с доказательством.

1. $\big[[a, b], c\big] + \big[[b, c], a\big] + \big[[c, a], b\big] = 0$, $\big[a, [b, c]\big] + \big[b, [c, a]\big] + \big[c, [a, b]\big] = 0$ (*тождества Якоби*).
2. $\big[[a, b], c\big] = [ab, c] - [ba, c]$, $\big[a, [b, c]\big] = [a, bc] - [a, cb]$.
3. $[a, b]c = a[b, c] + [ac, b]$, $[a, b]c = [a, bc] + b[c, a]$;
4. $c[a, b] = [c, a]b + [a, cb]$, $c[a, b] = [ca, b] + [b, c]a$, $[ab, c] = [a, bc] + [b, ca]$, $[a, bc] = [ab, c] + [ca, b]$.
5. Если элемент a обратим в кольце, то $a[b, c] = [aba^{-1}, aca^{-1}]a$, $[b, c]a = a[a^{-1}ba, a^{-1}ca]$.
6. $[a, b, c, d] + [b, a, d, c] + [c, d, a, b] + [d, c, b, a] = 0$ и $\big[[a, b], [c, d]\big] = [a, b, c, d] + [b, a, d, c]$.

Из этого свойства следует, что у E-нильпотентной группы класса не выше 3 перестановочны любые два коммутатора её эндоморфизмов.

7. Для кольца R с единицей 1 следующие условия эквивалентны:
   а) $[a,b] \in Z(R)$ для любых $a,b \in R$;
   б) $\bigl[[a,b],c\bigr] = \bigl[a,[b,c]\bigr]$ для любых $a,b,c \in R$;
   в) $[a,b,c] = [a,c,b]$ для любых $a,b,c \in R$;
   г) $[a,bc] = [a,cb]$ для любых $a,b,c \in R$;
   д) $\bigl[[a,b]c,d\bigr] = [a,b]\,[c,d]$ для любых $a,b,c,d \in R$.

Доказательство. Импликации а) $\Longrightarrow$ б), а) $\Longrightarrow$ в) очевидны.

Эквивалентность пунктов а) и г) вытекает из свойства 2 коммутаторов.

Докажем импликацию б) $\Longrightarrow$ а). Имеем, что $\bigl[[b,c],a\bigr] = bca - cba - abc + acb$, $\bigl[b,[c,a]\bigr] = bca - bac - cab + acb$. Приравнивая правые части, получаем $0 = cba + abc - bac - cab = \bigl[[a,b],c\bigr]$, откуда следует, что $[a,b] \in Z(R)$.

Докажем импликацию в) $\Longrightarrow$ а). Как и выше, из равенства $[c,a,b] = [c,b,a]$ получаем, что $cab - cba + bac - abc = 0$, или $c[a,b] = [a,b]c$, т. е. $[a,b] \in Z(R)$.

Импликация а) $\Longrightarrow$ д). следует из свойства 4.

При $c = 1$ из пункта д) получаем, что $\bigl[[a,b],d\bigr] = 0$, т. е. справедлива импликация д) $\Longrightarrow$ а). □

Из пункта д) свойства 7 следует, что кольцо R с единицей удовлетворяет тождествам $[x_1,x_2]\,[x_3,x_4] = 0$ и $[x_1,x_2,x_3] = 0$ тогда и только тогда, когда $c[a,b] \in Z(R)$ для любых $a,b,c \in R$.

8. Пусть кольцо R удовлетворяет тождеству $[x,y,z] = 0$. Тогда для любых натуральных чисел m, n, s, t в R справедливы тождества
   а) $[x^m,y] = mx^{m-1}[x,y]$;
   б) $[x^ny^m,x^sy^t] = (nt-ms)x^{n+s-1}y^{m+t-1}[x,y]$;
   в) $[x^ny^n,x^sy^s] = 0$.

Доказательство. Пункт а) доказывается индукцией по числу m. При $m = 1$ равенство $[x^m,y] = mx^{m-1}[x,y]$ верно. Пусть $[x^m,y] = mx^{m-1}[x,y]$. Тогда

$$[x^{m+1},y] = x^m[x,y] + [x^m,y]x = x^m[x,y] + mx^{m-1}[x,y]x = (m+1)x^m[x,y].$$

Так как

$$[x^ny^m,x^sy^t] = x^n[y^m,x^s]y^t + x^s[x^n,y^t]y^m =$$
$$= smx^{n+s-1}[y,x]y^{m+t-1} + ntx^{s+n-1}y^{t+m-1}[x,y] = (nt-ms)x^{n+s-1}y^{m+t-1}[x,y],$$

то утверждение б) доказано.

Тождество в) следует из тождества б) при $m = n$, $t = s$. □

9. Если кольцо R с единицей удовлетворяет тождеству $[x,y,z] = 0$, то $[a,b]\,[c,d] = [a,d]\,[b,c] = [a,c]\,[d,b]$ для любых $a,b,c,d \in R$. В частности, если b перестановочен с a или с c, то $[a,c]\,[b,d] = 0$. Поэтому если кольцо R не содержит ненулевых нильпотентных элементов, то оно коммутативно.

Доказательство. Действительно из утверждения д) пункта 7 и из пункта 3 следует, что

$$[a,b]\,[c,d] = \big[[a,b]c,d\big] = [a[b,c]+[ac,b],d] = \\ = [a[b,c],d] + \big[[ac,b],d\big] = \big[[b,c]a,d\big] = [b,c]\,[a,d] = [a,d]\,[b,c].$$

Равенство $[a,d]\,[b,c] = [a,c]\,[d,b]$ доказывается аналогично. □

10. Пусть R — кольцо и $[a,b] \in Z(R)$ для некоторых $a,b \in R$. Тогда множество $N_{a,b} = \{c \in R \mid c[a,b] \in Z(R)\}$ является подкольцом в R, содержащим $Z(R)$. Кроме того, если $x,y \in N_{a,b}$, то $R[x,y]R \subseteq N_{a,b}$.

Доказательство. Пусть $c,d \in N_{a,b}$. Допустим, что $cd[a,b] \notin Z(R)$. Тогда $[cd[a,b],x] \neq 0$ для некоторого $x \in R$. Так как $[a,b] \in Z(R)$, то $[cd[a,b],x] = [a,b]\,[cd,x]$. Имеем, что

$$xcd[a,b] = x(d[a,b])c = ([a,b]c)xd = cxd[a,b].$$

Отсюда следует, что

$$[cd,x]\,[a,b] = (cdx - cxd)[a,b] = c[d,x]\,[a,b].$$

Но $[a,b]\,[d,x] = \big[[a,b]d,x\big] = 0$ в силу условия $[a,b]d \in Z(R)$. Противоречие. Аналогично показывается, что $[x,s] \in N_{a,b}$ для любых $s \in R$ и $x \in N_{a,b}$, т. е. $N_{a,b}$ является идеалом $\mathbb{Z}$-алгебры Ли, ассоциированной с R. Пусть теперь $x,y \in N_{a,b}$. Если $r,s \in R$, то

$$[x,y]s = (xy-yx)s = x(ys) - (ys)x - y(xs - sx) = [x,ys] - y[x,s],$$

т. е. $[x,y]R \subseteq N_{a,b}$. Тогда

$$r[x,y]s = [x,y]sr + r[x,y]s - [x,y]sr = \\ = [x,y]sr + [r,[x,y]s] \in [x,y]R + [R,N_{a,b}] \subseteq N_{a,b}.$$ □

11. Если кольцо R не имеет ненулевых нильпотентных элементов и удовлетворяет тождеству $[x_1,\ldots,x_{n+1}] = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$, то оно коммутативно.

Доказательство. Допустим, что $u = [a_1,\ldots,a_n] \neq 0$, где $a_1,\ldots,a_n \in R$, и пусть $a = [a_1,\ldots,a_{n-1}]$. Тогда $au = a(aa_n - a_na) = [a,aa_n] \in Z(R)$ и, значит, $a_n[a,aa_n] = [a,aa_n]a_n$. Тогда $a_na[a,a_n] = aa_n[a,a_n]$ или $[a,a_n]^2 = 0$. Следовательно, $u = [a,a_n] = 0$. Противоречие. □

E-центром группы A назовём её подгруппу

$$Z(A) = \{a \in A \mid [\varphi,\psi]a = 0 \text{ для всех } \varphi,\psi \in E(A)\}.$$

Если $G \leqslant$ fi A, то $Z(G) \subseteq Z(A)$; в частности, если кольцо $E(G)$ коммутативно, то $G \subseteq Z(A)$. Если A — такая группа, что все её ненулевые эндоморфизмы являются мономорфизмами и $E(A)$ — некоммутативное кольцо, то $Z(A) = 0$.

Если A — группа без кручения, то $Z(A)$ — чистая подгруппа в A, в общем случае это не так. Ясно, что любая подгруппа в $Z(A)$ будет коммутаторно инвариантной подгруппой в A.

Подгруппу

$$A' = \langle [\varphi, \psi]A \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$$

назовём *E-коммутантом* группы A. Если $a \in A$, то через $[\varphi, \psi]a$ обозначим *коммутатор* элемента a, соответствующий эндоморфизмам φ и ψ. Ясно, что если $A' \subseteq B \leqslant A$, то $B \leqslant_{\mathrm{ci}} A$.

Очевидно, что если $H \leqslant_{\mathrm{ci}} A$ и $H \cap A' = 0$, то $H \subseteq Z(A)$. Поэтому если H — минимальная коммутаторно инвариантная подгруппа, то $H \subseteq A'$ или $H \subseteq Z(A)$. В частности, если A порождается минимальными коммутаторно инвариантными подгруппами, то $A = A' + Z(A)$.

Определим по индукции

$$A^{(0)} = A,\ A^{(1)} = A', \ldots,\ A^{(n+1)} = \langle [\varphi, \psi]A^{(n)} \mid \varphi, \psi \in E(A) \rangle$$

и

$$A^{(\alpha)} = \bigcap_{\rho < \alpha} A^{(\rho)}$$

при предельном ординале α.

Если $A = \bigoplus A_i$, то, как следует из леммы 1.1, может случиться так, что $A_i' = 0$, но $A' \neq 0$.

Лемма 1.1. *Пусть* $A = \bigoplus_{i \in I} A_i$, *где* $|I| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$. *Тогда*

1) $A' = \langle \mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i,\ \mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i,\ A_i',\ G_i' \rangle$;
2) $A' = \bigoplus_{i \in I} A_i'$ *в точности тогда, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)A_i \subseteq A_j'$ *для любых* $i, j \in I$, $j \neq i$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $\pi\colon A \to A_i$, $\theta\colon A \to G_i$ — проекции, $f \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$ и $a \in A_i$. Тогда если $\varphi \in E(A)$ — такой эндоморфизм, что $\varphi|A_i = f$, $\varphi|G_i = 1_{G_i}$, то $[\theta, \varphi]a = fa$. Это доказывает, что $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i \subseteq A'$. Если теперь $\xi, \eta \in E(A)$, то

$$[\xi, \eta]a = [(\pi + \theta)\xi, (\pi + \theta)\eta]a = [\pi\xi, \pi\eta]a + (\pi\xi\theta\eta - \pi\eta\theta\xi)a + \\ + (\theta\xi\pi\eta + \theta\xi\theta\eta - \theta\eta\pi\xi - \theta\eta\theta\xi)a.$$

Здесь $[\pi\xi, \pi\eta]a \in A_i'$, второе слагаемое принадлежит $\mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i$, а третье — $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)A_i$. Поскольку аналогичные рассуждения справедливы и для элементов подгруппы G_i, то A' совпадает с указанной подгруппой. Отметим, что

$$\mathrm{Hom}(G_i, A_i)G_i = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j.$$

Второе утверждение вытекает из первого. □

E-центр и E-коммутант — вполне инвариантные подгруппы (это следует соответственно из свойств 3 и 4 коммутаторов). Отметим ещё, что если, например, $A = B \oplus C$, где $B = Z_p$, $C = Z_{p^\infty}$, то в силу леммы 1.1 $A' = C[p]$, где $C[p] = \{x \in C \mid px = 0\}$. Поэтому $A/A' \cong A$, и следовательно, $(A/A')' \neq 0$. Фактор-группа по E-центру может быть циклической. Например, если $A = B \oplus C$, где $B = \mathbb{Q}$, $C = \mathbb{Z}$, то $Z(A) = B$ и $A/Z(A) \cong \mathbb{Z}$. Если же $C = Z_n$, где $n = p_1^{k_1} \ldots p_m^{k_m}$, $B = Z_{p_1^\infty} \oplus \ldots \oplus Z_{p_m^\infty}$, то $Z(A) = B$ и $A/Z(A) \cong Z_n$.

E-центр группы без кручения — чистая подгруппа, а E-коммутант может не быть чистой подгруппой.

Пример 1.1. Пусть $n > 1$ — натуральное число и K — кольцо всех матриц вида

$$\alpha = \begin{pmatrix} a & nb & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. Если

$$\beta = \begin{pmatrix} x & ny & z \\ 0 & x & t \\ 0 & 0 & x \end{pmatrix},$$

то

$$\alpha\beta - \beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 0 & n(bt - yd) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in Z(K).$$

По теореме Корнера [7, теорема 110.1] существует группа без кручения, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K; эта группа E-нильпотентна класса 2, её коммутант не является чистой подгруппой.

Легко привести примеры, когда подгруппы и фактор-группы E-нильпотентной группы не являются E-нильпотентными. Пусть $A = B \oplus C$, где B и C — вполне инвариантные подгруппы с коммутативными кольцами эндоморфизмов группы без кручения A и $pB \neq B$, $pC \neq C$. Кольцо $E(A)$ также коммутативно, поэтому A — E-нильпотентная группа. Однако ни для каких $0 \neq b \in B$ и $0 \neq c \in C$ подгруппа $\langle b \rangle \oplus \langle c \rangle$ и фактор-группа $A/pA \cong (B/pB) \oplus (C/pC)$, как это следует из предложения 1.1, не являются E-нильпотентными.

Напомним, что кольцо называется *нормальным* [5], если все его идемпотенты центральны. Кольцо эндоморфизмов модуля нормально тогда и только тогда, когда все его прямые слагаемые вполне инвариантны [5, утверждение 3.15].

Группу назовём *E-энгелевой* класса не выше n, если

$$\Big[\alpha, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}\Big] = 0$$

для любых её эндоморфизмов α, β.

Предложение 1.1.

1. *В E-энгелевой группе A все её прямые слагаемые вполне инвариантны. В частности, кольцо $E(A)$ нормальное.*

2. *Пусть A — E-нильпотентная группа класса не выше 3 и в кольце $E(A)$ для любого $0 \neq \alpha \in E(A)$ найдётся такой элемент $\beta \in E(A)$, что хотя бы один из элементов $\alpha\beta$, $\beta\alpha$ не является нильпотентным. Тогда кольцо $E(A)$ коммутативно.*

Доказательство. 1. Если $A = B \oplus C$, а элемент $\alpha \in E(A)$ такой, что $\alpha|C = 1_C$ и $0 \neq \alpha b \in C$ для некоторого $b \in B$, то определим $\beta \in E(A)$ следующим образом: $\beta|B = \alpha$ и $\beta|C = 0$. Теперь если $\psi_1 = [\beta, \alpha]$ и $\psi_{n+1} = [\psi_n, \alpha] = \Big[\beta, \underbrace{\alpha, \ldots, \alpha}_{n+1}\Big]$, то $\psi_n b = (-1)^n \alpha b \neq 0$. Это доказывает, что $\mathrm{Hom}(B, C) = 0$ и $\mathrm{Hom}(C, B) = 0$, т. е. прямые слагаемые группы A вполне инвариантны.

2. Докажем сначала следующий факт. Пусть R — такое кольцо (не обязательно с 1), что для любого $a \in R$ соотношение $2a = 0$ влечёт за собой $a = 0$. Пусть, далее, U — коммутативное подкольцо в R, являющееся идеалом $\mathbb{Z}$-алгебры Ли, ассоциированной с R, т. е. $[x, s] \in U$ для любых $x \in U$, $s \in R$. Тогда если $x \in U$, $s \in R$, то $([x, s]t)^3 = 0$ и $(t[x, s])^3 = 0$ для любого $t \in R$. Действительно, имеем $y = [x, s] \in U$. Поэтому

$$[x, s]^2 = xs(xs - sx) - s(xs - sx)x = (xs - sx)xs - (xs - sx)sx.$$

Тогда

$$2[x, s]^2 = x^2s^2 - xs^2x - xs^2x + s^2x^2 = x(xs^2 - s^2x) - (xs^2 - s^2x)x = 0,$$

так как x перестановочен с $xs^2 - s^2x$. Значит, $y^2 = [x, s]^2 = 0$. Аналогично $[y, t]^2 = 0$. Далее,

$$[y, t]^2 = (yt - ty)(yt - ty) = (yt)^2 - yt^2y + (ty)^2.$$

Поэтому $(yt)^3 = 0$ и $(ty)^3 = 0$.

Согласно пункту 1 прямые слагаемые группы A вполне инвариантны. Поэтому если A имеет ненулевую 2-компоненту, то $A = B \oplus C$, где B — неразложимая 2-группа, а 2-компонента группы C нулевая. Следовательно, можно предполагать, что 2-компонента группы A является нулевой, т. е. кольцо $E(A)$ удовлетворяет условию на кольцо R из предыдущего абзаца. Согласно свойству 6 коммутаторы эндоморфизмов группы A перестановочны, поэтому они порождают коммутативное подкольцо в $E(A)$. Из предыдущего абзаца следует, что если $x \in U$, $s \in E(A)$, то $[x, s] = 0$, т. е. A — E-нильпотентная группа класса не выше 2. Если $[\alpha, \beta] \neq 0$ для некоторых $\alpha, \beta \in E(A)$, то $[\alpha, \beta] \in Z\big(E(A)\big)$. Поэтому ввиду свойства 9 $([\alpha, \beta]\gamma)^2 = 0$ для любого $\gamma \in E(A)$, что противоречит условию на $E(A)$. Это доказывает утверждение. $\square$

Группы с нормальным кольцом эндоморфизмов изучались в [26]; из этих результатов следует, что, например, периодические группы и сепарабельные группы без кручения являются E-энгелевыми тогда и только тогда, когда их кольца эндоморфизмов коммутативны.

Группу A назовём *E-разрешимой*, если $A^{(n)} = 0$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Наименьшее такое n назовём *классом E-разрешимости* группы A. Прямые слагаемые E-разрешимой группы являются E-разрешимыми группами.

E-разрешимые группы класса не выше n являются подклассом класса BL_n групп — групп A со свойством $[\varphi, \psi]^n = 0$ для всех $\varphi, \psi \in E(A)$. Внимание автора на класс BL_2 обратил профессор П. А. Крылов. Отметим, что группы из класса BL_2, а также E-разрешимые группы и коммутаторно инвариантные подгруппы изучались в [25, 26, 28, 30, 31]. Помимо коммутаторно инвариантных подгрупп, автор в [22—24, 27] исследовал проективно инвариантные подгруппы.

Отметим, что для каждого n существуют E-разрешимые группы класса n, не являющиеся E-нильпотентными.

Пример 1.2. Пусть $K = \mathrm{T}_2(\mathbb{Z})$ — кольцо целочисленных треугольных матриц порядка 2. Коммутатор любых двух матриц из K имеет вид

$$\alpha = \begin{pmatrix} 0 & u \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для некоторого $u \in \mathbb{Z}$. Поэтому произведение любых двух коммутаторов есть 0 кольца K. Согласно теореме Корнера (см. пример 1.1) существует группа A с кольцом эндоморфизмов K. Эта группа будет E-разрешимой класса 2. Если

$$\beta = \begin{pmatrix} x & y \\ 0 & z \end{pmatrix} \in K,$$

где $x \neq z$ и $u \neq 0$, то

$$\alpha\beta - \beta\alpha = \begin{pmatrix} 0 & u(z-x) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq 0.$$

Поэтому $\Big[\alpha, \underbrace{\beta, \ldots, \beta}_{n}\Big] \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$, т. е. A не будет E-энгелевой.

Пример 1.3. Пусть $\mathbb{Z}[i] = \{m + ci \mid m, k \in \mathbb{Z}\}$ — кольцо целых гауссовых чисел. Рассмотрим кольцо $(\mathbb{Z}[i])[x, {}^{-}]$, состоящее из многочленов от x с коэффициентами из $\mathbb{Z}[i]$, для которых выполняется равенство $xa = \bar{a}x$, где $\bar{a}$ — комплексное число, сопряжённое к a. Пусть теперь $K_n = (\mathbb{Z}[i])[x, {}^{-}]/(x^n)$, где (x^n) — идеал, порождённый x^n. Тогда $[f, g] \in xK_n$ для любых $f, g \in K_n$. Поэтому $[f_{2n-1}, f_{2n}] \ldots [f_1, f_2] = 0$ для всех $f_1, \ldots, f_{2n} \in K_n$. Аддитивная группа кольца K_n является счётной редуцированной группой без кручения. В качестве A можно взять группу, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K_n, эта группа не является E-энгелевой, так как, например, $\Big[x, \underbrace{i, \ldots, i}_{n}\Big] = (-2i)^n x \neq 0$.

Пусть R — кольцо эндоморфизмов модуля M и $[x, y, y] = 0$ для любых $x, y \in R$. Тогда $0 = [x, y+z, y+z] = [x, y, z] + [x, z, y]$. Согласно тождеству Якоби $[x, z, y] = [x, y, z] + [y, z, x]$. Поэтому $2[x, y, z] + [y, z, x] = 0$. Поскольку $0 = [y, z+x, z+x] = [y, z, x] + [y, x, z]$, получаем, что $[y, z, x] = -[y, x, z] = [x, y, z]$. Поэтому $3[x, y, z] = 0$. Аналогичным образом, используя свойство 6 и уже доказанное равенство $3[x,y,z]=0$, можно показать, что $[x,y,z,t]=0$ для любых $x,y,z,t\in R$. Следовательно, всякий E-энгелев модуль M класса не выше 2 является E-нильпотентным класса не выше 3, а если для каждого $m\in M$ из $3m=0$ следует $m=0$, то и E-нильпотентным класса не выше 2. Если же M — абелева группа и M имеет ненулевую 3-компоненту, то $M=B\oplus C$, где B — неразложимая 3-группа и $E(B)$ — коммутативное кольцо. Из предложения 1.1 следует, что C не имеет элементов порядка 3. Поэтому в силу вышесказанного всякая E-энгелева группа класса не выше 2 является E-нильпотентной класса не выше 2.

Будем говорить, что группа A принадлежит классу BL, если $[\alpha,\beta]^n=0$ для любых $\alpha,\beta\in E(A)$ при некотором n, зависящем, вообще говоря, от этих элементов. Класс BL содержит класс всех E-разрешимых групп. Как показывает следующий пример, эти классы различны.

Пример 1.4. Пусть M — множество всех натуральных чисел, не делящихся на квадраты. Каждому $m\in M$ поставим в соответствие циклическую группу $\langle a_m\rangle$ порядка 2 и обозначим через B прямое произведение всех $\langle a_m\rangle$, т. е. B состоит из функций $f\colon M\to\bigcup\limits_{m\in M}\langle a_m\rangle$ с условием $f(m)\in\langle a_m\rangle$ и конечным *носителем* $\{m\in M\mid f(m)\neq e\}$, где e — единица соответствующей группы. Каждому простому числу p поставим в соответствие эндоморфизм φ_p группы B, задаваемый на порождающих следующим образом:

$$a_m^{\varphi_p}=\begin{cases}a_{m/p} & \text{при } p\mid m,\\ a_m & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

Очевидно, что $\varphi_p^2=\varphi_p$ и $\varphi_p\varphi_q=\varphi_q\varphi_p$, так что полугруппа Φ, порождённая всеми φ_p, коммутативна. Пусть G — полугруппа, состоящая из элементов $\{\varphi a\mid\varphi\in\Phi,\ a\in B\}$ с умножением $\varphi a\cdot\psi b=\varphi\psi a^{\psi}b$. Под носителем элемента $g=\varphi a\in G$ будем понимать носитель элемента a в B. Пусть, далее, K — целочисленное полугрупповое кольцо, заданное на G, т. е. элементами K служат всевозможные конечные суммы вида $x=n_1g_1+\ldots+n_kg_k$, где $n_i\in\mathbb{Z}$, $g_i\in G$. Некоммутативность полугруппы G влечёт некоммутативность кольца K. Всякий коммутатор элементов из K имеет вид $[x,y]=s_1[\,]_1+\ldots+s_m[\,]_m$, где $s_i\in\mathbb{Z}$, $[\,]_i=[g_{l_i},g_{t_i}]$ для некоторых $g_{l_i},g_{t_i}\in G$.

Заметим, что $[g_1,g_2]g[g_1,g_2]=0$ для любых $g,g_1,g_2\in G$. Действительно, если $g=fc$, $g_1=\varphi a$, $g_2=\psi b$, то $[\varphi a,\psi b]=\varphi\psi a^{\psi}b-\varphi\psi b^{\varphi}a$. Поэтому

$$\begin{aligned}[g_1,g_2]g[g_1,g_2]&=(\varphi\psi a^{\psi}b-\varphi\psi b^{\varphi}a)(fc)(\varphi\psi a^{\psi}b-\varphi\psi b^{\varphi}a)=\\&=(\varphi\psi a^{\psi}b-\varphi\psi b^{\varphi}a)(f\varphi\psi c^{\varphi\psi}a^{\psi}b-f\varphi\psi c^{\varphi\psi}b^{\varphi}a)=\\&=f\varphi\psi a^{f\varphi\psi}b^{f\varphi\psi}c^{\varphi\psi}a^{\psi}b-f\varphi\psi b^{f\varphi\psi}a^{f\varphi\psi}c^{\varphi\psi}a^{\psi}b-\\&-f\varphi\psi a^{f\varphi\psi}b^{f\varphi\psi}c^{\varphi\psi}b^{\varphi}a+f\varphi\psi b^{f\varphi\psi}a^{f\varphi\psi}c^{\varphi\psi}b^{\varphi}a=0.\end{aligned}$$

Значит, $[x,y]^{m+1}=(s_1[\,]_1+\ldots+s_m[\,]_m)^{m+1}=0$.

Пусть теперь $u = [\,]_1 \ldots [\,]_k \neq 0$ и $N \subset M$ — такое конечное подмножество, что носитель каждого элемента $g \in G$, входящего в произведение u, содержится в N. Если p, q — такие простые числа, что $p, q \nmid m$ для каждого $m \in N$, $[\varphi_p c, \varphi_q d] \neq 0$ и носители элементов c, d содержатся в $M \setminus N$, то $u[\varphi_p c, \varphi_q d] \neq 0$.

Пусть теперь $a = a_p$, $\psi = \varphi_p$, а $b^\varphi = b$, $b^\psi = b$. Тогда $a^\psi = e$ и

$$0 \neq \Big[\varphi a, \underbrace{\psi b, \ldots, \psi b}_{n}\Big] = \begin{cases} \varphi\psi a - \varphi\psi e & \text{при } n = 2m, \\ \varphi\psi b - \varphi\psi b a & \text{при } n = 2m+1. \end{cases}$$

Если A — группа, кольцо эндоморфизмов которой изоморфно K, то $A \in \mathrm{BL}$, но не является ни E-разрешимой, ни E-энгелевой.

Существуют E-нильпотентные группы класса 2, не являющиеся E-разрешимыми класса 2.

Пример 1.5. Рассмотрим полугруппу $S = \{0, \pm 1, \pm a, \ldots, \pm g\}$ с таблицей умножения

$\cdot$	a	b	c	d	p	q	r	s	x	y	z	u	v	t	g
a	0	x	t	u	0	0	0	z	0	p	0	0	q	0	r
b	$-x$	0	v	$-g$	$-z$	0	0	0	0	s	0	r	0	$-q$	0
c	$-t$	$-v$	0	y	0	0	$-z$	0	q	0	0	$-p$	0	0	s
d	$-u$	g	$-y$	0	0	$-z$	0	0	$-r$	0	0	0	s	p	0
p	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
q	0	0	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
r	0	0	z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
s	$-z$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
x	0	0	q	$-r$	0	0	0	0	0	z	0	0	0	0	0
y	p	s	0	0	0	0	0	0	z	0	0	0	0	0	0
z	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
u	0	r	$-p$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z	0	0
v	q	0	0	s	0	0	0	0	0	0	0	z	0	0	0
t	0	$-q$	0	p	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z
g	r	0	s	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	z	0

.

Пусть K — полугрупповое целочисленное кольцо для S (с нулём 0 и с единицей 1) и A — абелева группа с кольцом эндоморфизмов K. Из таблицы следует, что коммутатор любых элементов из K лежит в $Z(K)$. Поэтому A — E-нильпотентная группа класса 2, однако $[a, b]\,[c, d] = 4xy = 4z \neq 0$.

Из определения вытекает справедливость следующей леммы.

Лемма 1.2. *Для группы A следующие условия эквивалентны*:

1) *A — E-разрешимая группа класса не выше n;*
2) *$[\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n}] \ldots [\alpha_1, \alpha_2] = 0$ для любых $\alpha_1, \ldots, \alpha_{2n} \in E(A)$;*
3) *$A^{(n-1)} \subseteq Z(A)$.*

Из определения также следует, что если A — E-разрешимая группа, то $Z(A) \neq 0$; кроме того, если $0 \neq H \leqslant_{\mathrm{ci}} A$, то $H \cap Z(A) \neq 0$. Для E-разрешимой группы A класса n возможен случай, когда $A^{(n-1)} \neq Z(A)$. Например, если $A = B \oplus C \oplus D$, где кольца $E(B)$, $E(C)$, $E(D)$ коммутативны, для каждого $0 \neq b \in B$ существует $f \in \mathrm{Hom}(B, C)$ со свойством $fb \neq 0$, $\mathrm{Hom}(B, D) = 0$ и подгруппы C, D вполне инвариантны в A, то $A'' = 0$ и $A' = \mathrm{Hom}(B, C)B \subseteq \subseteq C \neq Z(A) = C \oplus D$.

Если $H \leqslant_{\mathrm{ci}} A$ и $R = E(A)$, то положим

$$Z_R(A/H) = \{\bar{a} \in A/H \mid [\alpha, \beta]\bar{a} = 0 \text{ для всех } \alpha, \beta \in R\}.$$

Если $H \subseteq A$, то через

$$N_R(H) = \{a \in A \mid [\alpha, \beta]a \in H \text{ для всех } \alpha, \beta \in R\}$$

обозначим *E-нормализатор* подмножества H в группе A. Индекс R иногда будем опускать. Из свойства 5 коммутаторов следует, что инвариантность подгруппы H влечёт инвариантность $N(H)$. Ясно, что $H = N(H)$ для $H \leqslant A$ в точности тогда, когда $H \leqslant_{\mathrm{ci}} A$ и A/H — *коммутаторно точная* фактор-группа, т. е. для любого $0 \neq \bar{a} \in A/H$ найдутся $\varphi, \psi \in E(A)$ со свойством $[\varphi, \psi]\bar{a} \neq 0$. Отсюда несложно вывести, что для прямого слагаемого H выполняется равенство $H = N(H)$ тогда и только тогда, когда H вполне инвариантно и $Z(C) = 0$ для каждого (эквивалентно, для некоторого в силу их изоморфизма) дополнительного прямого слагаемого C.

Ряд

$$A_i \subseteq A_{i+1} \subseteq \ldots \subseteq A_{i+n} \subseteq \ldots$$

подгрупп A_i ($i \in I$) группы A назовём *E-центральным*, если $A_i \leqslant_{\mathrm{ci}} A$ и $A_{i+1}/A_i \subseteq Z_R(A/A_i)$ (эквивалентно, $A_{i+1} \subseteq N_R(A_i)$) для всех $i \in I$. Если же $A_i \leqslant_{\mathrm{ci}} A$ для всех $i \in I$, то ряд назовём *E-нормальным*.

Если A — группа, $R = E(A)$, то положим по индукции

$$Z_0(A) = 0, \quad Z_1(A) = Z(A), \ldots, \quad Z_i(A)/Z_{i-1}(A) = Z_R\big(A/Z_{i-1}(A)\big),$$

и

$$Z_\alpha(A) = \bigcup_{\rho < \alpha} Z_\rho(A)$$

при предельном ординале α.

Обозначим для краткости $Z_\alpha = Z_\alpha(A)$. Ряд

$$0 \subseteq Z_1 \subseteq \ldots \subseteq Z_\alpha \subseteq \ldots$$

назовём *верхним E-центральным* рядом группы A. Подгруппы Z_α назовём *E-гиперцентрами* группы A. Из свойства 3 коммутаторов вытекает, что все E-гиперцентры являются вполне инвариантными подгруппами. В группе без кручения все E-гиперцентры являются чистыми подгруппами, поэтому все факторы верхнего E-центрального ряда также группы без кручения.

Если $H \subseteq A$, то подгруппу

$$\langle [\varphi, \psi]h \mid h \in H,\ \varphi, \psi \in E(A) \rangle$$

назовём *E-коммутантом* подмножества H в A и обозначим через $[H,A]$. Если $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, то $[H,A] \leqslant \mathrm{ci}\ A$, а если $H \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то из свойства 4 коммутаторов следует, что $[H,A] \leqslant \mathrm{fi}\ A$. Всегда $[B+C,A]=[B,A]+[C,A]$ для $B,C \leqslant A$. Обозначим $[H,A]_1=\langle H\rangle+[H,A]$ и $[H,A]_{n+1}=[H,A]_n+\bigl[[H,A]_n,A\bigr]$ при $n \geqslant 1$. Тогда $\bar{H}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}[H,A]_n$ — наименьшая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащая H. Действительно, $\bar{H} \leqslant \mathrm{ci}\ A$ и всякая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащая H, содержит и $\bar{H}$. Из свойства 5 коммутаторов следует, что инвариантность H влечёт инвариантность $\bar{H}$.

Положим по индукции

$$L_1(A)=A, \quad L_{i+1}(A)=[L_i(A),A]$$

и

$$L_\alpha=\bigcap_{\rho<\alpha}L_\rho(A),$$

если α — предельное порядковое число. Отметим, что $L_n(A)=A^{(n-1)}$ для $n\in\mathbb{N}$ и $L_\alpha(A) \leqslant \mathrm{fi}\ A$ для каждого ординала α.

Заметим, что

$$L_{n+1}(A)=\langle[\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a \mid a\in A,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}\in E(A)\rangle$$

и

$$Z_n(A)=\{a\in A \mid [\alpha_{2n-1},\alpha_{2n}]\ldots[\alpha_1,\alpha_2]a=0,\ \alpha_1,\ldots,\alpha_{2n}\in E(A)\};$$

если $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$ и $H\cap A'=0$, то $H\subseteq Z(A)$ и $Z(A/H)=Z(A)/H$.

Если

$$0=A_0\subseteq A_1\subseteq\ldots\subseteq A_{n-1}\subseteq A_n=A\,—$$

E-центральный ряд, то получаем включения $A_i\subseteq Z_i$ и $L_i\subseteq A_{n-i+1}$, где $L_i = L_i(A)$. Ряд

$$L_1(A)\supseteq L_2(A)\supseteq\ldots$$

назовём *нижним E-центральным* рядом группы A. Из приведённых включений следует, что в E-разрешимой группе верхний и нижний E-центральные ряды обрываются, причём их длины равны классу E-разрешимости группы. В частности, в E-разрешимой группе все её E-центральные ряды обрываются, минимальная длина таких рядов совпадает с классом E-разрешимости группы.

Хотя верхний и нижний E-центральные ряды E-разрешимой группы имеют одинаковую длину, они сами не обязаны совпадать. Так, в вышеприведённом примере E-разрешимой группы $A=B\oplus C\oplus D$ верхний E-центральный ряд имеет вид $0\subset C\oplus D\subset A$, а нижний — $0\subset \mathrm{Hom}(B,C)B\subset A$.

Некоторые свойства нильпотентных некоммутативных групп переносятся на E-разрешимые группы.

Лемма 1.3. *Для группы A равносильны следующие условия*:

1) *A — E-разрешимая группа класса n*;

2) $Z_n(A) = A$ *и* $Z_{n-1}(A) \neq A$;
3) $L_{n+1}(A) = 0$, *но* $L_n(A) \neq 0$.

Доказательство. Докажем импликацию 1) $\Longrightarrow$ 2). Так как $L_i \subseteq Z_{n-i+1}$, то $L_1 = A \subseteq Z_n$, т. е. $Z_n = A$. Допустим, что $Z_{n-1} = A$. Тогда $L_2 = A' \subseteq Z_{n-2}$ и по индукции $L_i \subseteq Z_{n-i}$. Значит, $L_n = A^{(n-1)} \subseteq Z_0 = 0$. Противоречие с условием $A^{(n-1)} \neq 0$.

Докажем импликацию 2) $\Longrightarrow$ 3). Имеем $L_{n+1} \subseteq Z_0 = 0$. Если $L_n = 0$, то $L_{n-1} \subseteq Z_1$. По индукции $L_{n-k} \subseteq Z_k$ или $L_k \subseteq Z_{n-k}$. Тогда $L_1 = A \subseteq Z_{n-1}$. Противоречие.

Импликация 3) $\Longrightarrow$ 1) очевидна. □

Предложение 1.2. *Если A — E-разрешимая группа класса n, то для любой её подгруппы H ряд последовательных E-нормализаторов достигает A не позже чем через n шагов. В частности, всякая коммутаторно инвариантная подгруппа E-разрешимой группы входит в некоторый E-центральный ряд.*

Доказательство. Обозначим $H_0 = H$, $H_{i+1} = N(H_i)$. Достаточно проверить, что $Z_i \subseteq H_i$. Для $i = 0$ это очевидно, а далее имеем $Z_{i+1} = N(Z_i) \subseteq N(H_i) = H_{i+1}$. Оставшееся утверждение для коммутаторно инвариантных подгрупп следует из того, что если $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, то $H \cap Z_i \leqslant \mathrm{ci}\ A$, $H \cap Z_{i+1} \subseteq N(H \cap Z_i)$ и $H \subseteq N(H_i)$. □

Коммутаторно инвариантную подгруппу H группы A назовём *E-малой*, если из $A = H + S$, где S — некоторая коммутаторно инвариантная подгруппа, следует, что $S = A$.

Элемент $x \in A$ назовём *E-необразующим* группы A, если $\overline{\langle x \rangle}$ — E-малая подгруппа. Очевидно, что любая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащаяся в E-малой подгруппе, является E-малой; сумма конечного числа E-малых подгрупп является E-малой подгруппой. Следовательно, сумма всех E-малых подгрупп совпадает с множеством E-необразующих элементов группы A.

Обозначим через $\operatorname{crad} A$ пересечение всех максимальных коммутаторно инвариантных подгрупп группы A, если они существуют; положим $\operatorname{crad} A = A$ в противном случае. Обозначим через $\operatorname{csoc} A$ сумму всех минимальных коммутаторно инвариантных подгрупп группы A. Если B — минимальная коммутаторно инвариантная подгруппа в A, то $B \subseteq Z(A)$ или $B \subseteq A'$, поэтому $\operatorname{csoc} A \subseteq Z(A) + A'$.

Предложение 1.3.

1. *Множество S всех E-необразующих элементов группы A совпадает с подгруппой $\operatorname{crad} A$.*
2. *$\operatorname{csoc} A$ совпадает с пересечением Q всех существенных коммутаторно инвариантных подгрупп группы A.*

Доказательство. 1. Докажем, что $S \subseteq \operatorname{crad} A$. Если A не содержит максимальных коммутаторно инвариантных подгрупп, то утверждение очевидно.

Пусть теперь $x \in S$ и H — максимальная коммутаторно инвариантная подгруппа в A. Если $x \notin H$, то $\overline{\langle x \rangle} + H = A$ и $H \neq A$. Это противоречит включению $x \in S$.

Докажем, что $\operatorname{crad} A \subseteq S$. Пусть, напротив, существуют элемент $x \in \operatorname{crad} A$ и $B \leqslant \mathrm{ci}\ A$, такие что $B \neq A$, но $\overline{\langle x \rangle} + B = A$. По лемме Цорна найдётся коммутаторно инвариантная подгруппа H группы A, максимальная среди коммутаторно инвариантных подгрупп, содержащих B и не содержащих x. Ясно, что H — максимальная коммутаторно инвариантная подгруппа. Но тогда $x \in \operatorname{crad} A \subseteq \subseteq H$. Противоречие.

2. Если B — минимальная коммутаторно инвариантная подгруппа, а H — существенная коммутаторно инвариантная подгруппа, то $B \cap H = B$ и, значит, $\operatorname{csoc} A \subseteq H$.

Пусть теперь $N \leqslant Q$ и $N \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Если K — максимальный элемент в множестве коммутаторно инвариантных подгрупп группы A, таких что $N \cap K = 0$, то $H = N + K$ — существенная коммутаторно инвариантная подгруппа в A. Далее, $Q = N \oplus (K \cap Q)$. Таким образом, каждая коммутаторно инвариантная подгруппа группы A, содержащаяся в Q, выделяется в Q прямым слагаемым. Отсюда следует, что $Q \subseteq \operatorname{csoc} A$. Действительно, конечно порождённая коммутаторно инвариантная подгруппа, содержащаяся в Q, содержит максимальную коммутаторно инвариантную подгруппу, а отсюда уже следует, что каждая (содержащаяся в Q) ненулевая коммутаторно инвариантная подгруппа содержит минимальную коммутаторно инвариантную подгруппу. Несложно убедиться, что Q является суммой минимальных коммутаторно инвариантных подгрупп, т. е. $Q \subseteq \operatorname{csoc} A$. □

Предложение 1.4. *Если A — E-разрешимая группа и H — её коммутаторно инвариантная подгруппа с условием $H + A' = A$, то $H = A$. В частности, $A' \subseteq \operatorname{crad} A$.*

Доказательство. Положим $H_i = H + Z_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$. Пусть $H_m \subset A$ и $H_{m+1} = A$. Тогда $A' = [A, A] = [H, A] + [Z_{m+1}, A] \subseteq H + Z_m = H_m$, откуда следует, что $H + A' \subseteq H_m \subset A$. Противоречие. Включение $A' \subseteq \operatorname{crad} A$ следует из предложения 1.3. □

Коммутаторно инвариантную подгруппу P группы A назовём *E-полупервичной*, если для любой подгруппы B группы A из включения $[B, A] \subseteq P$ следует, что $B \subseteq P$. Отметим, что включение $[B, A] \subseteq P$ эквивалентно включению $[\bar{B}, A] \subseteq P$. Пересечение всех E-полупервичных подгрупп группы A обозначим через $P(A)$. Из определения следует, что $Z_n(A) \subseteq P(A)$ для каждого $n \in \mathbb{N}$, в частности, $A = P(A)$ для E-разрешимой группы A.

Элемент a группы A назовём *строго E-нильпотентным*, если любой последовательности $\{\alpha_n \in E(A) \mid n \in \mathbb{N}\}$ найдётся такой номер m, что $[\alpha_{2m-1}, \alpha_{2m}] \ldots [\alpha_1, \alpha_2] a = 0$.

Следующий результат является аналогом характеризации Левицкого первичного радикала кольца [6, предложение 26.5].

Предложение 1.5. *$P(A)$ состоит из строго E-нильпотентных элементов.*

Доказательство. Пусть $a \notin P(A)$. Поэтому $a \notin P$ для некоторой E-полупервичной подгруппы P. Тогда $[\langle a\rangle, A] \nsubseteq P$, т. е. существует такой элемент $a_1 \in [\langle a\rangle, A]$, что $a_1 \notin P$. Если $a_n \notin P$, то $[\langle a_n\rangle, A] \nsubseteq P$. Значит, существует $a_{n+1} \in [\langle a_n\rangle, A]$ со свойством $a_{n+1} \notin P$. В частности, элемент a не является строго E-нильпотентным.

Обратно, пусть элемент a не является строго E-нильпотентным и пусть $T = \{a_n \mid n = 0, 1, \ldots\}$ — такая последовательность элементов группы A, что $a_0 = a$ и $0 \neq a_{n+1} \in [\langle a_n\rangle, A]$ для каждого n. Тогда $0 \notin T$ и по лемме Цорна существует коммутаторно инвариантная подгруппа P, максимальная среди коммутаторно инвариантных подгрупп, не пересекающихся с T. Пусть теперь B — такая подгруппа в A, что $B \nsubseteq P$. Согласно выбору подгруппы P имеем $(\bar{B} + P) \cap T \neq \varnothing$. Если теперь $a_n \in \bar{B} + P$, то $a_{n+1} \in [\bar{B} + P, A] = [\bar{B}, A] + [P, A]$. Поскольку $[P, A] \subseteq P$, то $[\bar{B}, P] \nsubseteq P$. Значит, и $[B, A] \nsubseteq P$. Таким образом, P — E-полупервичная подгруппа и $a_0 = a \notin P$. Следовательно, $a \notin P(A)$. □

Поскольку $Z(A) \subseteq P(A)$, то условие $P(A) = 0$ влечёт $Z(A) = 0$. Верно и обратное утверждение. Действительно, пусть $a_0 = a \neq 0$. По условию найдутся такие $\alpha_n, \beta_n \in E(A)$, что $a_{n+1} = [\alpha_n, \beta_n]a_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, т. е. элемент a не является строго E-нильпотентным. Из предложения 1.5 следует также, что если $P(A) = 0$, то 0 — единственная среди подгрупп H группы A подгруппа со свойством $L_n(H) = 0$ для некоторого n, где $L_n(H) = [L_{n-1}(H), A]$ при $n \geqslant 2$, а $L_1(H) = H$.

2. Коммутаторно инвариантные подгруппы

Лемма 2.1. *В группе без кручения A любая коммутаторно инвариантная подгруппа ранга 1 лежит в E-центре.*

Доказательство. Пусть $B \leqslant \mathrm{ci}\ A$, $\mathrm{r}(B) = 1$, $a \in B$ и $G = \langle B\rangle_*$ — чистая подгруппа в A, порождённая B. Если $G \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то утверждение очевидно. Допустим, что $x = \alpha a \notin G$ для некоторого $\alpha \in E(A)$. Если теперь $\beta \in E(A)$, то $[\alpha, \beta]a \in G$. Значит, $n[\alpha, \beta]a = ma$ для некоторых $n, m \in \mathbb{Z}$, причём $n \neq 0$. Допустим, что $m \neq 0$. Тогда
$$mx = m\alpha a = n\alpha[\alpha, \beta]a = n[\alpha, \alpha\beta]a \in G.$$
Противоречие. Если же $[\alpha, \beta]a = 0$ для всех $\beta \in E(A)$, то и $[\alpha, \beta]G = 0$, т. е. $G \subseteq Z(A)$. □

Если A не является группой без кручения, то утверждение леммы 2.1 в общем случае не справедливо. Например, пусть $\mathrm{o}(a) = p$, $\mathrm{o}(b) = p^3$, $A = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle$ и $H = \langle a + pb\rangle$. Тогда H — чистая коммутаторно инвариантная подгруппа (по лемме 2.2) в A. Пусть $\gamma(a) = p^2 b$ и $\gamma|b = 0$. Теперь если π — проекция группы A на $\langle b\rangle$, то $[\pi, \gamma](a + pb) = (\pi\gamma - \gamma\pi)(a + pb) = p^2 b \neq 0$. В частности, $H \nleqslant \mathrm{fi}\ A$.

Лемма 2.2. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, $\pi_i\colon A \to A_i$ — *соответствующие проекции и* $H \leqslant A$. *Тогда*

1) $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)\pi_i H \subseteq H \cap A_j$ *и* $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ *для любых* $\varphi_i, \psi_i \in E(A_i)$, *где* $i, j \in I$ *и* $j \neq i$;
2) *если* $B_i \leqslant \mathrm{ci}\ A_i$, *то* $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i \leqslant \mathrm{ci}\ A$ *в том и только в том случае, когда* $\mathrm{Hom}(A_i, A_j)B_i \subseteq B_j$ *для всех* $i, j \in I$, *где* $j \neq i$;
3) *если* $A_i \leqslant \mathrm{fi}\ A$ *и* $B_i \leqslant A_i$, *то* $B = \bigoplus\limits_{i \in I} B_i \leqslant \mathrm{ci}\ A$ *в том и только в том случае, когда* $B_i \leqslant \mathrm{ci}\ A_i$ *для всех* $i \in I$;
4) *коммутаторно инвариантная подгруппа* H *группы* A *является её вполне инвариантной подгруппой в том и только в том случае, когда* $\pi_i H = H \cap A_i$ *и* $H \cap A_i \leqslant \mathrm{fi}\ A_i$ *для каждого* $i \in I$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$. Докажем необходимость. Продолжим $f \in \mathrm{Hom}(A_i, A_j)$ до $\bar{f} \in E(A)$, полагая $\bar{f}|A_i = f$, $\bar{f}|G_i = 0$. Тогда если $a_i + g_i \in H$ ($a_i \in A_i$, $g_i \in G_i$), то $[\bar{f}, \pi_i](a_i + g_i) = fa_i \in H \cap A_j$. Необходимость включения $[\varphi_i, \psi_i]\pi_i H \subseteq H \cap A_i$ очевидна.

Докажем достаточность. Пусть $\theta\colon A \to G_i$ — проекция, $1 - \theta = \pi$ ($\pi = \pi_i$), $\alpha, \beta \in E(A)$ и $a = \pi h$ для некоторого $h \in H$. Тогда

$$\begin{aligned}[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a = \\ = [\pi\alpha, \pi\beta]a + (\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a + (\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a.\end{aligned}$$

Здесь

$$[\pi\alpha, \pi\beta]a \in [\pi\alpha, \pi\beta]\pi H \subseteq H \cap A_i,$$
$$(\pi\alpha\theta\beta - \pi\beta\theta\alpha)a \in \mathrm{Hom}(G_i, A_i)\theta H = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \mathrm{Hom}(A_j, A_i)\pi_j H \subseteq H \cap A_i$$

и

$$\begin{aligned}(\theta\alpha\pi\beta + \theta\alpha\theta\beta - \theta\beta\pi\alpha - \theta\beta\theta\alpha)a \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)\pi H = \\ = \sum_{j \in I \setminus \{i\}} \mathrm{Hom}(A_i, A_j)\pi H \subseteq \sum_{j \in I \setminus \{i\}} (H \cap A_j).\end{aligned}$$

Поскольку $h = \pi_1 h + \ldots + \pi_n h$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$ ($\pi_j = \pi_{i_j}$, $i_j \in I$, $j = 1, \ldots, n$), то $[\alpha, \beta]h \in H$.

Утверждения 2—4 вытекают из утверждения 1. □

Из пункта 1 леммы 2.2 непосредственно вытекает, что коммутаторно инвариантные прямые слагаемые вполне инвариантны.

Следующая лемма проверяется непосредственно.

Лемма 2.3.

1. *Пусть* $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. *Тогда*
   a) *если* B — *прямое слагаемое группы* A *и* π — *проекция* A *на* B, *то* $H \cap B, \pi H \leqslant \mathrm{ci}\ B$;

б) *если* $A = \bigoplus A_i$, $\pi_i \colon A \to A_i$ — *соответствующие проекции и* $\underline{H} = \bigoplus (H \cap A_i)$, $\overline{H} = \bigoplus (\pi_i H)$, *то* $\underline{H}, \overline{H} \leqslant \mathrm{ci}\ A$, $\underline{H} \leqslant H \leqslant \overline{H}$ *и* $\underline{H} = \overline{H}$, *если и только если* $H = \bigoplus (H \cap A_i)$.

2. *Если* $A = B \oplus G$, *где* $G \leqslant \mathrm{fi}\ A$, *и* $E \leqslant \mathrm{ci}\ B$, $F \leqslant \mathrm{ci}\ G$, *причём* $\mathrm{Hom}(B, G)E \subseteq F$, *то* $E \oplus F \leqslant \mathrm{ci}\ A$. *В частности,* $E \oplus \mathrm{Hom}(B, G)E \leqslant \mathrm{ci}\ A$.

Несложно проверяется, что если $H \leqslant \mathrm{fi}\ G$ и $G \leqslant \mathrm{ci}\ A$, то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$; если $H \leqslant \mathrm{ci}\ G$ и $G \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Как показывает следующий пример, может случиться так, что $H \leqslant \mathrm{ci}\ G$, $G \leqslant \mathrm{ci}\ A$, но $H \nleqslant \mathrm{ci}\ A$.

Пример 2.1. Пусть $\mathrm{o}(a) = p$, $\mathrm{o}(b) = p^3$, $\mathrm{o}(c) = p^8$, $A = \langle a\rangle \oplus \langle b\rangle \oplus \langle c\rangle$, $x = a + pb$, $y = p^2 c$ и $G = \langle x\rangle \oplus \langle y\rangle$. Если $\pi_a \colon A \to \langle a\rangle$, $\pi_b \colon A \to \langle b\rangle$, $\pi_c \colon A \to \langle c\rangle$ — проекции, то $\pi_a(G) = \langle a\rangle$, $\pi_b(G) = \langle pb\rangle$, $\pi_c(G) = \langle p^2 c\rangle$. Поэтому

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Hom}(\langle a\rangle, \langle b\rangle)\bigl(\pi_a(G)\bigr) = \langle p^2 b\rangle \subseteq G \cap \langle b\rangle = \langle p^2 b\rangle,\\
&\mathrm{Hom}(\langle a\rangle, \langle c\rangle)\bigl(\pi_a(G)\bigr) = \langle p^7 c\rangle \subseteq G \cap \langle c\rangle = \langle p^2 c\rangle,\\
&\mathrm{Hom}(\langle b\rangle, \langle a\rangle)\bigl(\pi_b(G)\bigr) = 0 = G \cap \langle a\rangle,\\
&\mathrm{Hom}(\langle b\rangle, \langle c\rangle)\bigl(\pi_b(G)\bigr) = \langle p^6 c\rangle \subseteq G \cap \langle c\rangle = \langle p^2 c\rangle,\\
&\mathrm{Hom}(\langle c\rangle, \langle a\rangle)\bigl(\pi_c(G)\bigr) = 0 = G \cap \langle a\rangle,\\
&\mathrm{Hom}(\langle c\rangle, \langle b\rangle)\bigl(\pi_c(G)\bigr) = \langle p^2 b\rangle \subseteq G \cap \langle b\rangle = \langle p^2 b\rangle.
\end{aligned}$$

Следовательно, по лемме 2.2 $G \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Если теперь $H = \langle x + p^2 y\rangle$, то аналогично проверяется, что $H \leqslant \mathrm{ci}\ G$. Однако $H = \langle a + pb + p^4 c\rangle \nleqslant \mathrm{ci}\ A$, поскольку $\pi_a(H) = \langle a\rangle$ и $\mathrm{Hom}(\langle a\rangle, \langle b\rangle)\langle a\rangle = \langle p^2 b\rangle \nsubseteq H$.

Теорема 2.1. *В группе A каждая её подгруппа является коммутаторно инвариантной подгруппой тогда и только тогда, когда $E(A)$ — коммутативное кольцо.*

Доказательство. Докажем необходимость. Из леммы 2.2 следует, что прямые слагаемые группы A вполне инвариантны, поэтому её p-компоненты A_p являются коциклическими. Значит, для каждого $m \in \mathbb{N}$ имеет место разложение $A = A_{p_1} \oplus \ldots \oplus A_{p_m} \oplus B_m$, где $B_m[p_j] = 0$ при $j = 1, \ldots, m$ и $(p_1 \ldots p_m)B_m = B_m$. Если a — элемент конечного порядка, то $a \in A_{p_1} \oplus \ldots \oplus A_{p_m}$ для некоторого m, а поскольку кольцо $E(A_{p_1} \oplus \ldots \oplus A_{p_m})$ коммутативно, то $[\varphi, \psi]a = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$. Пусть теперь a — элемент бесконечного порядка. Имеем, что $[\varphi, \psi]a \in \langle a\rangle$. Поэтому $[\varphi, \psi]a = na$ для некоторого $n \in \mathbb{Z}$, $\varphi[\varphi, \psi]a = n\varphi a$. Так как $\varphi[\varphi, \psi] = [\varphi, \varphi\psi]$, то $n\varphi a \in \langle a\rangle$, т. е. $n\varphi a = sa$ для некоторого $s \in \mathbb{Z}$. Аналогично $n\psi a = ka$, где $k \in \mathbb{Z}$. Можно считать, что $a \in B_m$, где m — такое натуральное число, что B_m не содержит элементов, порядки которых делятся на простые делители числа n. Поэтому равенство $n^2[\varphi, \psi]a = 0$ влечёт $[\varphi, \psi]a = 0$, это доказывает коммутативность $E(A)$. Достаточность очевидна. $\square$

Лемма 2.4. *Если $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где $|I| > 1$ и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то каждая коммутаторно инвариантная подгруппа группы A является вполне инвариантной.*

Доказательство. Если $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, то в данном случае $H = \bigoplus(H \cap A_i)$. Действительно, если π — проекция A на A_i и $\pi h = a \neq 0$ для некоторого $h \in H$, то при условии, что $\varphi\colon A_i \to A_j$ и $\psi\colon A_j \to A_i$ — взаимно обратные изоморфизмы, в силу леммы 2.2 имеем, что $b = \varphi a \in H \cap A_j$ и $a = \psi b \in H \cap A_i$. Аналогично показывается, что $fa \in H \cap A_i$ для любого $f \in E(A_i)$. Этого в силу пункта 4 леммы 2.2 достаточно для вполне инвариантности H. $\square$

Из леммы 2.4 вытекает, что в делимой группе $D = t(D) \oplus D_0$ каждая коммутаторно инвариантная подгруппа H либо является периодической вполне инвариантной подгруппой в D, либо имеет вид $H = t(D) \oplus H_1$ для некоторой подгруппы $0 \neq H_1 \leqslant D_0$, причём $H_1 = D_0$, если группа D_0 разложима.

Если D — делимая часть p-группы $A = B \oplus D$, $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, $\theta\colon A \to D$ — проекция и $\mathrm{r}(D) > 1$, то из леммы 2.2 следует, что $H \cap D = \theta H$. Если же $\mathrm{r}(D) = 1$, то возможен случай, когда $H \cap D \neq \theta H$. Например, если $B = \langle b \rangle$ — циклическая группа, $e(b) = k \geqslant 1$, $d \in D$, $e(d) = n \geqslant 2k$ и $H = \langle b + d \rangle$, то

$$\mathrm{Hom}(B, D)B = D[p^k] = \langle p^{n-k} d \rangle \subseteq H \cap D = \langle p^k d \rangle.$$

Поэтому по пункту 1 леммы 2.2 $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Однако

$$\theta H = \langle d \rangle \neq H \cap D = \langle p^k d \rangle.$$

Подобная ситуация рассматривается в следующей лемме.

Лемма 2.5. *Пусть $A = B \oplus D$, где B — редуцированная, а D — делимая группа, $\pi\colon A \to B$ — проекция, $H \leqslant A$ и πH — периодическая группа. Тогда*

1) *если $D \cong \mathbb{Q}$, то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq H \cap B$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$;*
2) *если $D = \bigoplus_{p \in \Pi} D_p$ — такая периодическая группа, что $\mathrm{r}(D_p) = 1$ для каждого $p \in \Pi$ (Π — некоторое множество простых чисел), то $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$, если и только если $[\varphi, \psi]H \subseteq (H \cap B) \oplus (H \cap D)$ для любых $\varphi, \psi \in E(A)$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Поскольку $D \leqslant \mathrm{fi}\ A$ и в обоих случаях $E(D)$ — коммутативное кольцо, то $[\varphi, \psi]H = [\varphi, \psi](\pi H)$. Следовательно, в пункте 1 $[\varphi, \psi]H$ — периодическая группа и, значит, она содержится в $H \cap B$.

Пусть $h = b + d \in H$, где $b \in B$, $d \in D$ и $\theta = 1 - \pi$. Имеем

$$\begin{aligned}[\varphi, \psi](b + d) = [\varphi, \psi]b = [(\pi + \theta)\varphi, (\pi + \theta)\psi]b = \\ = [\pi\varphi, \pi\psi]b + [\pi\varphi, \theta\psi]b + [\theta\varphi, \pi\psi]b + [\theta\varphi, \theta\psi]b.\end{aligned}$$

Здесь первое слагаемое содержится в $H \cap B$, а остальные в $H \cap D$ (учтено, что $\pi\varphi\theta\psi b = 0$ и $\pi\psi\theta\varphi b = 0$). Достаточность пунктов 1 и 2 очевидна. $\square$

Легко проверить, что если H — периодическая подгруппа группы A, D — периодическая делимая группа, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D_p[p^{m_p}]$, где $m_p = \sup\{e(h) \mid h \in H_p\}$. Здесь $m_p = 0$, если $H_p = 0$, и значит, $D_p[p^{m_p}] = 0$. Если же D — произвольная делимая группа, $0 \neq H$ — непериодическая подгруппа группы A, то $\mathrm{Hom}(A, D)H = D$.

Теорема 2.2. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая часть группы A и $H \leqslant A$. Тогда $H \leqslant \mathrm{ci}\, A$ в том и только в том случае, когда H совпадает с одной из следующих подгрупп:*

1) *$H = F \oplus \Big(\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}]\Big)$, где F — периодическая коммутаторно инвариантная подгруппа группы B и $k_p \geqslant \sup\{e(b) \mid b \in F_p\}$;*
2) *$H = G \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in K} D_p[p^{k_p}]\Big)$, где G — периодическая коммутаторно инвариантная подгруппа в группе $B \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p\Big)$, такая, как во втором пункте леммы 2.5, $k_p \geqslant \sup\{e(g) \mid g \in G_p\}$ и $K \cap \Pi = \varnothing$;*
3) *$H = C \oplus D$, где $C \leqslant \mathrm{ci}\, B$;*
4) *$H = E \oplus t(D)$, $\mathrm{r}(D_0) = 1$ и E — коммутаторно инвариантная подгруппа в группе $B \oplus D_0$, такая, как в первом пункте леммы 2.5.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $\pi\colon A \to B$, $\theta_p\colon A \to D_p$, $\theta_0\colon A \to D_0$ — проекции, то

$$(H \cap B) \oplus \left(\bigoplus_p (H \cap D_p)\right) \oplus (H \cap D_0) \leqslant H \leqslant \pi H \oplus \left(\bigoplus_p (\theta_p H)\right) \oplus (\theta_0 H).$$

Так как $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ (лемма 2.2), то непериодичность подгруппы πH влечёт равенство $H \cap D = D$ (см. абзац перед теоремой), т. е. $D \subseteq H$. Аналогично если $\theta_0 H \neq 0$, то из того, что $\mathrm{Hom}\big(D_0, t(D)\big)(\theta_0 H) = t(D) = H \cap t(D)$, следует, что $t(D) \subseteq H$. Из леммы 2.4 при условии $\theta_0 H \neq 0$ и $\mathrm{r}(D_0) > 1$ вытекает включение $D_0 \subseteq H$. Для доказательства пункта 3 осталось заметить, что если $D \subseteq H$, то $H = C \oplus D$, где $C = H \cap B \leqslant \mathrm{ci}\, B$ по лемме 2.3. Если же $t(D) \subseteq H$ и $\theta_0 H \neq 0$, но $D_0 \nsubseteq H$, то $\mathrm{r}(D_0) = 1$ и $H = E \oplus t(D)$, где $E = H \cap (B \oplus D_0) \leqslant \mathrm{ci}\, (B \oplus D_0)$, что доказывает пункт 4.

Ввиду включения $\mathrm{Hom}(B, D)\pi H \subseteq H \cap D$ условие $\theta_0 H = 0$ влечёт периодичность группы πH. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D_p)\pi H \subseteq H \cap D_p$, то $D_p[p^{m_p}] \subseteq H \cap D_p$, где $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in (\pi H)_p\}$. Заметим, что если D_p — разложимая группа, то из леммы 2.4 следует, что $\theta_p H = D_p[p^{k_p}] = H \cap D_p$ для некоторого $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ ($k_p \geqslant m_p$). Если $\theta_p H = H \cap D_p$ для каждого простого p, то $H = F \oplus \Big(\bigoplus\limits_p D_p[p^{k_p}]\Big)$, где $F = B \cap H = \pi H \leqslant \mathrm{ci}\, B$, это доказывает пункт 1. В противном случае пусть K — множество всех простых p с условием $\theta_p H = H \cap D_p$, $\Pi = \{p \in P \setminus K \mid D_p \neq 0\}$. Тогда $H = G \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in K} D_p[p^{k_p}]\Big)$, где $G = H \cap \Big(B \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p\Big)\Big) \leqslant \mathrm{ci}\, \Big(B \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p\Big)\Big)$, $\mathrm{r}(D_p) = 1$ при $p \in \Pi$, это доказывает пункт 2.

Достаточность вытекает из пункта 2 леммы 2.3. □

Отметим, что соответствующая теорема для вполне инвариантных подгрупп доказана в [2, теорема 1.4].

Если A — сепарабельная группа без кручения, то обозначим через $\Omega(A)$ множество типов всех прямых слагаемых ранга 1 группы A. Типы $s, t \in \Omega(A)$ будем считать *эквивалентными*, если существуют такие $r_1, \ldots, r_n \in \Omega(A)$, что типы r_i, r_{i+1} сравнимы для всех $i = 0, \ldots, n$, где $r_0 = s$, $r_{n+1} = t$. Если теперь $\Omega(A) = \bigcup\limits_{k \in K} \Omega_k$ — разбиение множества $\Omega(A)$ на непересекающиеся классы эквивалентности, то $A = \bigoplus\limits_{k \in K} A_k$, где A_k — сепарабельные группы, $\Omega(A_k) = \Omega_k$, слагаемые A_k вполне инвариантны в A [3, § 19, упражнение 7].

Теорема 2.3. *В разложимой редуцированной сепарабельной группе без кручения A все коммутаторно инвариантные подгруппы являются вполне инвариантными тогда и только тогда, когда для каждого прямого слагаемого B ранга 1 группы A в дополнительном прямом слагаемом найдётся прямое слагаемое G, изоморфное B.*

Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, что в $\Omega(A)$ (см. абзац перед теоремой) все типы несравнимы. Тогда $A = \bigoplus\limits_{t \in \Omega(A)} A_t$, где $\mathrm{r}(A_t) = 1$ и типы групп A_t несравнимы. В этом случае кольцо $E(A)$ коммутативно и каждая подгруппа группы A будет коммутаторно инвариантной подгруппой, однако A имеет не вполне инвариантные подгруппы. Допустим теперь, что $B \oplus G$ — прямое слагаемое в A, $\mathrm{r}(B) = \mathrm{r}(G) = 1$ и $\mathrm{t}(B) < \mathrm{t}(G)$. Поскольку A редуцированная, то $pB \neq B$ и $pG \neq G$ для некоторого простого числа p. Если $b \in B$, $g \in G \setminus pG$ и $A = B \oplus C$ $(G \subseteq C)$, то пусть $H = \langle pb + g \rangle + E$, где $E = \mathrm{Hom}(B, C)\langle pb \rangle$. Тогда $E \subseteq pC$ и $E \leqslant \mathrm{fi}\ C$. Если θ — проекция A на C и если в C нет прямых слагаемых, изоморфных B, то $\mathrm{Hom}(C, B)\theta H = 0$. Следовательно, по лемме 2.2 $H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Однако $g \notin H$, значит, $\theta H \not\subseteq H$, т. е. $H \not\leqslant \mathrm{fi}\ A$.

Докажем достаточность. Пусть $h \in H \leqslant \mathrm{ci}\ A$. Тогда $h = a_1 + \ldots + a_n$, где $a_i \in A_i$, $\mathrm{r}(A_i) = 1$ и A_i — прямые слагаемые в A. Поскольку для каждого A_i в дополнительном прямом слагаемом найдётся прямое слагаемое $A_j \cong A_i$, то так же, как в лемме 2.4, получаем, что $a_i \in H$ и, кроме того, $f(a_i) \in H$ для каждого $f \in E(A)$, т. е. $f(h) \in H$, значит, $H \leqslant \mathrm{fi}\ A$. □

Теорема 2.4. *В редуцированной алгебраически компактной группе без кручения A каждая её коммутаторно инвариантная подгруппа является вполне инвариантной тогда и только тогда, когда все p-адические компоненты группы A разложимы.*

Доказательство. Докажем необходимость. Группа A представима в виде $A = \prod A_p$, где каждая p-адическая компонента A_p является p-адической алгебраически компактной группой. Можно считать, что $A_p \leqslant A$. Пусть $B = \prod\limits_{p \in K} A_p$ — прямое произведение всех неразложимых групп A_p. Тогда кольцо $E(B)$ коммутативно, а так как $B \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то каждая подгруппа группы B будет коммутаторно инвариантной подгруппой в A. Поскольку B содержит не вполне инвариантные подгруппы, то это доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть $h \in H \leqslant \text{ci}\ A$, $f \in E(A)$, $h = (\ldots, a_p, \ldots)$, где $a_p \in A_p$. Запишем A_p в виде $A_p = B_p \oplus G_p$, где $a_p \in B_p$, $G_p \neq 0$. Тогда $A = B \oplus G$, где $B = \prod B_p$. Имеем $f(h) = b + g$, где $b = (\ldots, b_p, \ldots) \in B$, $g = (\ldots, g_p, \ldots) \in G$. По лемме 2.2 $g \in H \cap G$. Осталось показать, что $b \in H$. Найдутся $\varphi_p, \psi_p \in E(A_p)$ со свойствами $\varphi_p(b_p) \in H \cap G_p$ и $\psi_p(\varphi_p(b_p)) = b_p$. Если теперь $\varphi = (\ldots, \varphi_p, \ldots)$, $\psi = (\ldots, \psi_p, \ldots)$, то $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$. По лемме 2.2 $\varphi b \in H \cap G$ и $b = \psi(\varphi b) \in H \cap B$. □

Приведём следующий полезный результат.

Лемма 2.6 [7, лемма 9.5]. *Пусть $A = B \oplus C$ — прямое разложение с проекциями π, θ. Если разложению $A = B \oplus C_1$ соответствуют проекции π_1, θ_1, то $\pi_1 = \pi + \pi\varphi\theta$, $\theta_1 = \theta - \pi\varphi\theta$ для некоторого эндоморфизма φ группы A. Обратно, для всяких эндоморфизмов π_1, θ_1 приведённого выше вида имеет место разложение $A = B \oplus \theta_1 A$.*

Если $A = B \oplus C$, то в [7, теорема 9.6] доказано, что пересечение всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A есть максимальная вполне инвариантная подгруппа группы A, не пересекающаяся с B. Некоторые свойства пересечений прямых слагаемых рассматривались в [8].

Теорема 2.5. *Пусть $A = B \oplus C$.*

1. *Наименьшая коммутаторно инвариантная подгруппа группы A, содержащая C, является вполне инвариантной подгруппой и совпадает с*
   а) $\mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C$;
   б) *суммой G всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*
2. *Наибольшая коммутаторно инвариантная подгруппа группы A, содержащаяся в C, является вполне инвариантной подгруппой и совпадает с*
   а) $K = \bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \mathrm{Ker}\,\varphi$;
   б) *пересечением N всех дополнительных прямых слагаемых к B в группе A.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пункт а) вытекает из п. 1) леммы 2.2. Поскольку $C \subseteq G$, то $G = (B \cap G) \oplus C$. Если C_1 — дополнительное прямое слагаемое к B, то из леммы 2.6 следует, что $C + C_1 = \varphi(C) \oplus C$ для некоторого гомоморфизма $\varphi \colon C \to B$. Поэтому

$$G = \left(\sum_{\varphi \in \mathrm{Hom}(C,B)} \varphi(C) \right) \oplus C = \mathrm{Hom}(C, B)C \oplus C,$$

что ввиду пункта а) доказывает пункт б).

Докажем утверждение 2. Вполне инвариантность подгруппы K следует из её определения. Если теперь $X \leqslant \text{ci}\ A$ и $X \subseteq C$, то ввиду пункта 1) леммы 2.2 $X \subseteq \mathrm{Ker}\,\varphi$ для каждого $\varphi \in \mathrm{Hom}(C, B)$. Поэтому $X \subseteq K$, что доказывает пункт а).

Согласно замечанию перед теоремой N является вполне инвариантной подгруппой в A, поэтому $N \subseteq K$. Если $A = B \oplus C_1$, то $K = (K \cap B) \oplus (K \cap C_1)$, где $K \cap B = 0$, поэтому $K \subseteq C_1$ и, значит, $K \subseteq N$. $\square$

В [22, теорема 12] доказана соответствующая теорема для проективно инвариантных подгрупп. В [31] исследовался вопрос существования минимальных и максимальных коммутаторно инвариантных подгрупп в p-группах.

Возможен случай, когда $Z(A) = A'$. Например, если B, C — группы с коммутативными кольцами эндоморфизмов и $C \leqslant \text{fi } A = B \oplus C$, причём $\mathrm{Hom}(B, C)B = C$, то $A' = C = Z(A)$ (см. лемму 1.1 и следствие 2.1).

Лемма 2.7. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, *где* $|I| > 1$, *и* $G_i = \bigoplus\limits_{j \in I \setminus \{i\}} A_j$.

1. *Если для любого* $0 \neq a \in A_i$ *каждой группы* A_i *существует* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$ *со свойством* $\varphi a \neq 0$, *то* $Z(A) = 0$.
2. $Z(A) = \bigoplus\limits_{i \in I} (Z(A) \cap A_i)$.
3. $\varphi(Z(A) \cap A_i) = 0$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$.
4. $Z(A) \cap A_i = B_i$, *где* $B_i = Z(A_i) \cap \Big(\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)} \mathrm{Ker}\, \varphi \Big)$. *В частности, равенство* $Z(A) \cap A_i = Z(A_i)$ *имеет место тогда и только тогда, когда* $\varphi\big(Z(A_i)\big) = 0$ *для любого* $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_i, G_i)$.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Пусть $x = a_1 + \ldots + a_n \in A$, где $0 \neq a_j \in A_{i_j}$ $(j = 1, \ldots, n,\ i_j \in I)$, $\theta\colon A \to G_{i_1}$ — проекция и гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}(A_{i_1}, G_{i_1})$ такой, что $\varphi a_1 \neq 0$. Считаем, что $\varphi \in E(A)$, полагая $\varphi | A_{i_1} = \varphi$, $\varphi | G_{i_1} = 0$. Тогда $[\varphi, \theta]x = -\varphi a_1 \neq 0$. Следовательно, $x \notin Z(A)$. Поэтому $Z(A) = 0$.

Пункт 2 следует из вполне инвариантности E-центра. Пункт 3 вытекает из доказательства пункта 1.

Докажем пункт 4. Имеем $Z(A) = \bigoplus (Z(A) \cap A_i)$. Включение $Z(A) \cap A_i \subseteq Z(A_i)$ очевидно. Из доказательства пункта 1 следует включение $Z(A) \cap A_i \subseteq B_i$. Пусть теперь $a \in B_i$, $\pi\colon A \to A_i$ и $\theta\colon A \to G_i$ — проекции. Тогда для любых $\alpha, \beta \in E(A)$ имеем

$$[\alpha, \beta]a = [(\pi + \theta)\alpha, (\pi + \theta)\beta]a = [\pi\alpha, \pi\beta]a + [\pi\alpha, \theta\beta]a + [\theta\alpha, \pi\beta]a + [\theta\alpha, \theta\beta]a.$$

Здесь $(\pi\alpha)|A_i, (\pi\beta)|A_i \in E(A_i)$, поэтому $[\pi\alpha, \pi\beta]a = 0$, а оставшиеся три слагаемые равны 0, поскольку в $[\pi\alpha, \theta\beta]$, $[\theta\alpha, \pi\beta]$, $[\theta\alpha, \theta\beta]$ входят эндоморфизмы $\theta\alpha$, $\theta\beta$, действующие на элементах из A_i как гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(A_i, G_i)$. Итак, $B_i \subseteq Z(A) \cap A_i$. $\square$

Из леммы 2.7, в частности, следует, что для гомоморфизма $f\colon A \to B$ не обязательно $f\big(Z(A)\big) \subseteq Z(B)$. Кроме того, если $A = \bigoplus A_i$ $(A = \prod A_i)$, где $A_i \leqslant \text{fi } A$, то $Z(A) = \bigoplus Z(A_i)$ $(Z(A) = \prod Z(A_i))$. Если $A = \bigoplus A_i$ $(A = \prod A_i)$, где $|I| > 1$ и $A_i \cong A_j$ при $i, j \in I$, то $Z(A) = 0$.

Следствие 2.1. *Если $A = B \oplus C$ и $C \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то $Z(A) = G \oplus Z(C)$, где $G = Z(B) \cap \Bigl(\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(B,C)} \mathrm{Ker}\,\varphi\Bigr)$.*

Следствие 2.2. *Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа. Тогда*

1) *если $t(D) \neq 0$, то $Z(D) = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p$,* где $\Pi = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) = 1\}$ *и $Z(D) = 0$ при $\Pi = \varnothing$;*
2) *если $t(D) = 0$, то $Z(D) = D_0$ при условии, что $\mathrm{r}(D_0) = 1$, и $Z(D) = 0$ при $\mathrm{r}(D_0) > 1$.*

Следствие 2.3.

1. *Если $A = B \oplus D$ — нередуцированная группа без кручения, где D — её делимая часть, то $Z(D) = D$ при условии $\mathrm{r}(D) = 1$, в противном случае $Z(A) = 0$.*
2. *Если $T = t(A)$ и $A = T \oplus R$ — расщепляющаяся группа, то $Z(A) = Z(T)$ при условии, что T — нередуцированная группа, в противном случае $Z(A) = Z(T) \oplus \Bigl(Z(R) \cap \Bigl(\bigcap\limits_{p \in \Pi} p^{m_p} R\Bigr)\Bigr)$,* где $\Pi = \{p \in P \mid T_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(a) \mid a \in T_p\}$.

Теорема 2.6. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A, и пусть $G = Z(B) \cap \Bigl(\bigcap\limits_{\varphi \in \mathrm{Hom}(B,D)} \mathrm{Ker}\,\varphi\Bigr)$. Тогда G является периодической подгруппой, $G = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} G_p$, а $Z(A)$ совпадает с одной из следующих подгрупп*:

1) *если $t(D) \neq 0$, то $Z(A) = G \oplus \Bigl(\bigoplus\limits_{p \in K} D_p\Bigr)$,* где $K = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) = 1\}$ *и $\Pi \cap K = \varnothing$;*
2) *если $t(D) = 0$, то либо $Z(A) = G$, либо, если $\mathrm{r}(D_0) = 1$, $Z(A) = G \oplus D_0$.*

Доказательство. Имеем $Z(A) = (Z(A) \cap B) \oplus \bigl(Z(A) \cap t(D)\bigr) \oplus (Z(A) \cap D_0)$. Так как $t(D) \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то согласно следствию 2.1 $Z(A) \cap t(D) = Z\bigl(t(D)\bigr) = \bigoplus\limits_{p \in K} D_p$, где $K = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) = 1\}$, причём $Z(A) \cap D_0 = 0$, если $t(D) \neq 0$ или $\mathrm{r}(D_0) > 1$. Всякая подгруппа $X \leqslant B$ со свойством $\mathrm{Hom}(B, D)X = 0$ является периодической, причём $X_p = 0$ при $D_p \neq 0$. Оставшиеся утверждения — следствие леммы 2.7. □

Пусть $D = t(D) \oplus D_0$ — делимая группа, где $t(D) = \bigoplus D_p$ — её периодическая часть. Тогда из леммы 1.1 следует, что если $D_0 = 0$, то $D' = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} D_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) > 1\}$; если $\mathrm{r}(D_0) = 1$, то $D' = t(D)$; если $\mathrm{r}(D_0) > 1$, то $D' = D$. Кроме того, если $A = B \oplus C$, где $C \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то $A' = B' \oplus \langle \mathrm{Hom}(B, C)B, C' \rangle$. В частности, если $A = B \oplus D$ — p-группа или группа без кручения, где D — её делимая часть, то $A' = B' \oplus D$. Более общим является следствие 2.4.

Следствие 2.4. *Пусть $A = B \oplus D$, где $D = t(D) \oplus D_0$ — ненулевая делимая часть группы A и $B \neq 0$. Тогда A' совпадает с одной из следующих подгрупп*:

1) *если B — непериодическая группа, то $A' = B' \oplus D$;*
2) *если B — периодическая группа, то $A' = B' \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} D_p\Big) \oplus \Big(\bigoplus\limits_{p\in K} D_p[p^{m_p}]\Big) \oplus$ $\oplus\, D_0'$, где $\Pi = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) > 1\}$, $K = \{p \in P \mid \mathrm{r}(D_p) = 1$ и $B_p \neq 0\}$, $m_p = \sup\{e(b) \mid b \in B_p\}$, а $D_0' = 0$ при $\mathrm{r}(D_0) = 1$ и $D_0' = D_0$ при $\mathrm{r}(D_0) > 1$.*

Лемма 2.8. *Если $A = B \oplus G$ и для любых $b \in B$, $g \in G$ найдутся такие $x \in G$, $y \in B$ и $\varphi \in \mathrm{Hom}(B, G)$, $\psi \in \mathrm{Hom}(G, B)$, что $\varphi y = g$, $\psi x = b$, то каждый элемент группы A является коммутатором.*

Доказательство. Продолжим φ, ψ до эндоморфизмов группы A, полагая их действия равными нулевому эндоморфизму на соответствующих дополнительных прямых слагаемых. Тогда если π — проекция A на B, то $[\pi, \varphi + \psi](x - y) = b + g$.

Если $A = Z_p \oplus Z$, то $Z(A) = Z_p \oplus pZ$, а $A' = Z_p$. В данном случае $Z(A)$ — максимальная подгруппа в A. Покажем, что если в A нет прямых слагаемых, изоморфных Z_p для каждого простого числа p, то $Z(A)$ не может быть максимальной подгруппой. Действительно, в противном случае $A/Z(A)$ — группа простого порядка p, и так как $pA \subseteq Z(A)$, то $A_p \neq 0$. Из леммы 2.7 следует, что A_p — неразложимая группа. Поэтому $A = A_p \oplus B$ для некоторой подгруппы B. Так как $A_p \subseteq Z(A)$, то $Z(A) = A_p \oplus (Z(A) \cap B)$. Здесь $|B/(Z(A) \cap B)| = p$, следовательно, $|A_p| = p$, что противоречит условию. □

Приведём описание E-центров и E-коммутантов некоторых редуцированных групп.

1. Если A — неограниченная сепарабельная p-группа, то $Z(A) = 0$ и $A' = A$.

Допустим, что $a \in A$. Тогда a можно вложить в прямое слагаемое B группы A, являющееся ограниченной группой, $A = B \oplus G$. Поскольку G — неограниченная группа, то существует гомоморфизм $f\colon B \to G$ со свойством $fa \neq 0$, откуда согласно пункту 3 леммы 2.7 следует, что $a \notin Z(A)$. А поскольку G — неограниченная группа, то $\mathrm{Hom}(G, B)G = B$. Согласно лемме 1.1 $B \subseteq A'$.

Для произвольной редуцированной p-группы A возможен случай, когда $Z(A) \neq 0$. Действительно, если, например, подгруппа A^1 циклическая, то $Z(A) = A^1$.

2. Пусть A — ограниченная p-группа, $A = B_1 \oplus \ldots \oplus B_m$, где B_i — прямые суммы некоторого числа копий группы $Z_{p^{k_i}}$, $k_1 < \ldots < k_m$, $i = 1, \ldots, m$. Тогда $Z(A) = p^{k_{m-1}} B_m$ и $A' = A[p^{k_{m-1}}]$, если B_m — циклическая группа и $Z(A) = 0$, $A' = A$ в противном случае.

3. Пусть A — сепарабельная группа без кручения, $\Omega(A)$ — множество типов всех её прямых слагаемых ранга 1. Тогда $Z(A) = \sum\limits_{t \in C(A)} A(t)$, где $C(A)$ — множество всех таких типов $t \in \Omega(A)$, что $\mathrm{r}\big(A(t)\big) = 1$, т. е. $Z(A)$ совпадает с суммой всех вполне инвариантных прямых слагаемых ранга 1 группы A, а A' совпадает с суммой тех прямых слагаемых A_i ранга 1, для которых в дополнительном прямом слагаемом есть прямое слагаемое ранга 1 типа не выше $\mathrm{t}(A_i)$.

4. Пусть $A = \prod\limits_{i \in I} A_i$ — векторная группа, где A_i — группы без кручения ранга 1. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{j \in J} A_j$, где J — множество всех таких $j \in I$, что $\mathrm{r}\Big(A\big(t(A_j)\big)\Big) = 1$ при $j \in J$, т. е. $Z(A)$ совпадает с прямым произведением всех вполне инвариантных подгрупп A_j, а $A' = \prod\limits_{k \in K} A_k$, где K — множество всех таких $k \in I$, что в $I \setminus \{k\}$ найдётся подгруппа A_s со свойством $t(A_s) \leqslant t(A_k)$.

5. Пусть $A = \prod A_p$ — алгебраически компактная группа без кручения, где A_p — p-адические компоненты группы A. Тогда $Z(A) = \prod\limits_{p \in \Pi} A_p$, где $\Pi = \{p \in P \mid A_p$ — неразложимая группа$\}$, а $A' = \prod\limits_{p \in K} A_p$, где $K = \{p \in P \mid A_p$ — разложимая группа$\}$.

3. Группы из класса BL_2

Лемма 3.1.

1. *Если $A = \bigoplus\limits_{j \in J} A_j$, где $A_j \leqslant \mathrm{fi}\ A$, то $A \in \mathrm{BL}_2$ тогда и только тогда, когда $A_j \in \mathrm{BL}_2$ для каждого $j \in J$.*
2. *Если $A \in \mathrm{BL}_2$ и $A = B \oplus G$, то $\alpha(\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$ и $\beta(\mathrm{Hom}(G,B)G) = 0$ для любых $\alpha \in \mathrm{Hom}(G,B)$ и $\beta \in \mathrm{Hom}(B,G)$.*

Доказательство. Пункт 1 очевиден.

Докажем пункт 2. Пусть θ — проекция $A \to G$, $g = \gamma b$ для некоторых $\gamma \in \mathrm{Hom}(B,G)$ и $b \in B$. Пусть теперь эндоморфизм $f \in E(A)$ такой, что $f|B = \gamma$ и $f|G = \alpha$. Имеем $[\theta, f]g = -\alpha g$, $[\theta, f]b = \gamma b$. Следовательно, $[\theta, f]^2 b = -\alpha\gamma b = 0$. Поскольку γ и b произвольны, отсюда вытекает, что $\alpha(\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть $A = B \oplus G$, где $G \leqslant \mathrm{fi}\ A$. Тогда условие $A \in \mathrm{BL}_2$ равносильно тому, что $B, G \in \mathrm{BL}_2$, $[\varphi, \psi](\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(G)$ и $\beta(B') = 0$ для любого $\beta \in \mathrm{Hom}(B,G)$. В частности, если кольца $E(B)$ и $E(G)$ коммутативны, то $A \in \mathrm{BL}_2$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Продолжим $\varphi, \psi \in E(G)$ до эндоморфизмов группы A, полагая $\varphi|B = \beta \in \mathrm{Hom}(B,G)$, $\psi|B = 0$. Тогда для $b \in B$ имеем $[\varphi,\psi]b = -\psi\beta b$, откуда следует, что $[\varphi,\psi]^2 b = -[\varphi,\psi]\psi\beta b$. Поэтому $[\varphi,\psi]\psi(\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$. Симметрично $[\varphi,\psi]\varphi(\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$.

Если продолжить φ, ψ, положив $\varphi|B = 1_B + \beta$, $\psi|B = 1_B - \beta$, то $[\varphi,\psi]b = 2\beta b - \varphi\beta b - \psi\beta b$, откуда ввиду уже доказанного получаем, что $2[\varphi,\psi]\beta b = 0$.

Если же положить $\varphi|B = 1_B + 2\beta$, $\psi|B = 1_B - \beta$, то аналогично предыдущему $3[\varphi,\psi]\beta b = 0$, откуда получаем, что $[\varphi,\psi]\beta b = 0$. Итак, $[\varphi,\psi](\mathrm{Hom}(B,G)B) = 0$.

Второе нулевое равенство доказывается аналогично. Зафиксируем некоторый $\beta \in \mathrm{Hom}(B,G)$. Продолжим $\xi, \eta \in E(B)$ до $\bar\xi, \bar\eta \in E(A)$, полагая $\bar\xi|G = 1_G$, $\bar\eta|G = 0$, $\bar\xi|B = \xi + \beta$, $\bar\eta|B = \eta$. Тогда для $b \in B$ имеем $[\bar\xi,\bar\eta]b = [\xi,\eta]b + \beta\eta b$.

Так как $[\xi,\eta]^2 b = 0$ и $[\bar{\xi},\bar{\eta}]\beta\eta b = 0$, то $[\bar{\xi},\bar{\eta}]^2 b = \beta\eta[\xi,\eta]b = 0$. Так как элемент b произволен, получаем, что $\beta(\eta[\xi,\eta]B) = 0$ и симметрично $\beta(\xi[\xi,\eta]B) = 0$.

Если продолжить ξ, η, положив $\bar{\xi}|G = 1_G$, $\bar{\eta}|G = 1_G$, $\bar{\xi}|B = \xi+\beta$, $\bar{\eta}|B = \eta-\beta$, то $[\bar{\xi},\bar{\eta}]b = [\xi,\eta]b + \beta\eta b + \beta\xi b - 2\beta b$, откуда ввиду уже доказанного получаем $[\bar{\xi},\bar{\eta}]^2 b = -2\beta[\xi,\eta]b = 0$.

Если же положить $\bar{\xi}|G = 1_G$, $\bar{\eta}|G = 1_G$, $\bar{\xi}|B = \xi + 2\beta$, $\bar{\eta}|B = \eta - \beta$, то $[\bar{\xi},\bar{\eta}]b = [\xi,\eta]b + 2\beta\eta b + \beta\xi b - 3\beta b$, откуда получаем, что $[\bar{\xi},\bar{\eta}]^2 b = -3\beta[\xi,\eta]b = 0$. Следовательно, $\beta([\xi,\eta]B) = 0$. Значит, $\beta(B') = 0$ в силу произвольности ξ и η.

Докажем достаточность. Пусть $\pi\colon A \to B$, $\theta\colon A \to G$ — проекции и $\gamma,\delta \in E(A)$. Имеем

$$[\gamma,\delta] = (\pi+\theta)[\gamma,\delta](\pi+\theta) = \pi[\gamma,\delta]\pi + \theta[\gamma,\delta]\pi + \theta[\gamma,\delta]\theta$$

(нужно учесть, что $\pi[\gamma,\delta]\theta = 0$). Здесь можно считать, что $\theta[\gamma,\delta]\theta \in E(G)$. Поэтому осталось проверить действие $[\gamma,\delta]$ на B. Если $b \in B$, то

$$[\gamma,\delta]b = [\pi\gamma,\pi\delta]b + \theta\gamma(\pi\delta b) - \theta\delta(\pi\gamma b) + [\theta\gamma,\theta\delta]b.$$

Последние три слагаемые принадлежат следу B в G, поэтому они аннулируются при действии $[\gamma,\delta]$. Следовательно,

$$[\gamma,\delta]^2 b = \theta\gamma(\pi\delta[\pi\gamma,\pi\delta]b) - \theta\delta(\pi\gamma[\pi\gamma,\pi\delta]b) + [\theta\gamma,\theta\delta]\,[\pi\gamma,\pi\delta]b = 0,$$

поскольку все эти слагаемые принадлежат соответствующему гомоморфному образу в G подгруппы $[\pi\gamma,\pi\delta]B$, так как $\pi\gamma,\pi\delta \in E(B)$. $\square$

Лемма 3.3. *Если $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, $|I| > 1$, то $A \in \mathrm{BL}_2$ тогда и только тогда, когда $A_i \in \mathrm{BL}_2$, $\alpha_i(\mathrm{Hom}(A_j,A_i)A_j) = 0$, $[\varphi_i,\psi_i](\mathrm{Hom}(A_j,A_i)A_j) = 0$ и $\alpha_i(A_i') = 0$ для любых $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i,A_k)$ и $\varphi_i,\psi_i \in E(A_i)$, где $j,k \in I\setminus\{i\}$.*

Доказательство. Необходимость вытекает из лемм 3.1 и 3.2.

Докажем достаточность. Пусть $B_j = \bigoplus\limits_{i\in I\setminus\{j\}} A_i$, $\pi\colon A \to A_j$, $\theta\colon A \to B_j$ — проекции и $\gamma,\delta \in E(A)$. Если $a \in A_j$, то

$$\begin{aligned}[\gamma,\delta]a &= [(\pi+\theta)\gamma,(\pi+\theta)\delta]a = [\pi\gamma,\pi\delta]a + [\pi\gamma,\theta\delta]a + [\theta\gamma,\pi\delta]a + [\theta\gamma,\theta\delta]a = \\ &= [\pi\gamma,\pi\delta]a + \pi\gamma\theta\delta a - \theta\delta\pi\gamma a + \theta\gamma\theta\delta a - \theta\delta\theta\gamma a + \theta\gamma\pi\delta a - \pi\delta\theta\gamma a.\end{aligned}$$

Здесь $\theta\delta a \in \mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j$ и $(\pi\gamma)|B_j \in \mathrm{Hom}(B_j,A_j)$, поэтому $\pi\gamma\theta\delta a = 0$. Аналогично $\pi\delta\theta\gamma a = 0$. Далее, $\theta\delta\pi\gamma a, \theta\gamma\theta\delta a, \theta\delta\theta\gamma a, \theta\gamma\pi\delta a \in \mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j$, а поскольку в скобки $[\pi\gamma,\theta\delta]$, $[\theta\gamma,\pi\delta]$ в качестве множителей входят гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(B_j,A_j)$, то перечисленные элементы аннулируются при действии этих скобок. С учётом того, что $[\pi\gamma,\pi\delta]^2 a = 0$ и $[\theta\gamma,\theta\delta](\mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j) = 0$, окончательно получаем, что $[\gamma,\delta]^2 a = 0$. $\square$

Теорема 3.1. *Если $A \in \mathrm{BL}_2$, то каждая ненулевая p-компонента группы A есть либо циклическая группа, либо группа Z_{p^∞}, либо прямая сумма некоторой ненулевой циклической группы B_p и группы Z_{p^∞}, причём в последнем случае $A/B_p = p(A/B_p)$.*

Доказательство. Всякое ненулевое циклическое прямое слагаемое F_p p-компоненты A_p группы A является прямым слагаемым в A, $A = F_p \oplus G$. Если бы в p-компоненте группы G нашлось циклическое прямое слагаемое E, то существовали бы ненулевые гомоморфизмы $F_p \to E$ и $E \to F_p$, причём след одной из групп, скажем F_p, в E совпал бы с E, что противоречит пункту 2 леммы 3.1. Поэтому если группа A_p редуцированная, то $A_p = F_p$, в противном случае $A_p = F_p \oplus D_p$. Из леммы 3.3 следует, что D_p неразложима, т. е. $D_p \cong Z_{p^\infty}$. Имеем $A = (F_p \oplus D_p) \oplus C$. Наконец, из того, что $pC \neq C$, следует существование ненулевой композиции гомоморфизмов $C \to F_p \to D_p$, что противоречит лемме 3.3. $\square$

Следствие 3.1. *Если A — периодическая группа, то $A \in \mathrm{BL}_2$ тогда и только тогда, когда каждая её ненулевая p-компонента либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и группы Z_{p^∞}. В частности, если A — редуцированная группа, то её кольцо эндоморфизмов коммутативно.*

Из лемм 3.1, 3.2 следует, что делимая группа принадлежит BL_2 тогда и только тогда, когда все её ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, часть без кручения (если она ненулевая) также имеет ранг 1.

Теорема 3.2. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$, то $A \in \mathrm{BL}_2$ тогда и только тогда, когда $B, D \in \mathrm{BL}_2$, E-коммутант B' группы B — периодическая группа, причём если обе подгруппы D_p, B_p отличны от 0, то $B/B_p = p(B/B_p)$ и, кроме того, условие $0 \neq t(D) \neq D$ влечёт периодичность B. В этом случае A имеет строение $A = \Big(\bigoplus\limits_{p \in \Pi} A_p\Big) \oplus D_0$, где Π — некоторое множество простых чисел, каждая A_p или циклическая p-группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической p-группы и группы Z_{p^∞}, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $0 \neq b \in B$ — элемент бесконечного порядка, то ввиду инъективности D найдётся гомоморфизм $\alpha\colon B \to D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причём если часть без кручения D_0 группы D отлична от нуля, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma\alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Hom}(D_0, Z_{p^\infty})$. Поэтому согласно лемме 3.3 условие $0 \neq t(D) \neq D$ влечёт периодичность B. Наконец, если $B_p \neq 0$, то по теореме 3.1 B_p — циклическая группа, поэтому $B = B_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq A$. Если теперь $pE_{(p)} \neq E_{(p)}$, то при условии $D_p \neq 0$ найдётся ненулевая композиция гомоморфизмов $E_{(p)} \to B_p \to D_p$, что противоречит лемме 3.3.

Докажем достаточность. Пусть $0 \neq t(D) \neq D$. Имеем $A = B \oplus t(D) \oplus D_0$, где $B \oplus t(D) \leqslant\mathrm{fi}\ A$, $E\big(t(D)\big)$ — коммутативное кольцо. Согласно следствию 3.1 $B \oplus t(D) \in \mathrm{BL}_2$. Поскольку след группы D_0 в $B \oplus t(D)$ содержится в подгруппе $t(D)$, а $E\big(t(D)\big)$ и $E(D_0)$ — коммутативные кольца, то из леммы 3.2 следует, что $A \in \mathrm{BL}_2$. Если же $D_0 = 0$, то $E(D)$ — коммутативное кольцо и $D \leqslant\mathrm{fi}\ A$. Далее, если $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то по условию $pE_{(p)} = E_{(p)}$ при $B_p, D_p \neq 0$. В этом случае в силу леммы 1.1 $B' = \big(E_{(p)}\big)'$, и значит, $(B')_p = 0$. Отсюда вытекает, что $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Поэтому по лемме 3.2 $A \in \mathrm{BL}_2$. Пусть, наконец, D — группа без кручения. Тогда $\mathrm{r}(D) = 1$, $D \leqslant \mathrm{fi}\ A$, $E(D)$ — коммутативное кольцо и, так как B' — периодическая группа, $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Следовательно, по лемме 3.2 опять $A \in \mathrm{BL}_2$. □

Следствие 3.2. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ — группа без кручения, то $A \in \mathrm{BL}_2$ тогда и только тогда, когда $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.2, а достаточность из леммы 3.2. □

Следствие 3.3. *Пусть $A = t(A) \oplus R$ — расщепляющаяся группа ($t(A), R \neq 0$). Запишем A в виде $A = T \oplus B \oplus t(D) \oplus D_0$, где $T \oplus B$ — редуцированная, а $D = t(D) \oplus D_0 \neq 0$ — делимая часть A. Группа A принадлежит BL_2 тогда и только тогда, когда $t(D) \cong \bigoplus\limits_{p \in \Pi} \mathbb{Z}_{p^\infty}$, $\mathrm{r}(D_0) \leqslant 1$, $T = \bigoplus\limits_{p \in \Pi_1} T_p$, каждая T_p — ненулевая циклическая p-группа, $pB = B$ при $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$, $E(B)$ — коммутативное кольцо и если $B, D_0 \neq 0$, то $t(D) = 0$ (т. е. $\Pi = \varnothing$).*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 3.2. Докажем достаточность. Если $D_0 = 0$, то $t(A) = T \oplus t(D) \leqslant \mathrm{fi}\ A$. Обозначим через G след группы B в $t(A)$. G можно записать в виде $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \bigoplus\limits_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} G_p \subseteq T$, $G_2 = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} G_p \subseteq t(D)$ ($pG = G$ при $p \in \Pi'$, поэтому $G \cap T_p = 0$ для таких p). Поскольку подгруппа $\bigoplus\limits_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} T_p$ вполне инвариантна в $t(A)$ и кольца $E(T)$, $E\big(t(D)\big)$ коммутативные, то $[\varphi, \psi]G = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E\big(t(A)\big)$. Поэтому $A \in \mathrm{BL}_2$ по лемме 3.2. Если же $D_0 \cong \mathbb{Q}$, то $A = B \oplus T \oplus D_0$, где $T \oplus D_0 \leqslant \mathrm{fi}\ A$ и $E(B)$, $E(T \oplus D_0)$ — коммутативные кольца (возможно, $B = 0$). Опять по лемме 3.2 $A \in \mathrm{BL}_2$. □

Теорема 3.3.

1. *Пусть A — вполне разложимая группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D — делимая часть группы A. Тогда $A \in \mathrm{BL}_2$ в том и только в том случае, когда*
   а) *если $D \neq 0$, то $\mathrm{r}(D) = 1$, а B — прямая сумма групп ранга 1 несравнимых между собой типов;*
   б) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где либо $\mathrm{r}(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $\mathrm{r}(B_i) = 1$, а C_i — прямая сумма групп ранга 1 несравнимых между собой типов выше $\mathrm{t}(B_i)$, причём типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j несравнимы при $i \neq j$.*
2. *Пусть A — сепарабельная (векторная) группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D — делимая часть группы A. Тогда $A \in \mathrm{BL}_2$ в том и только в том случае, когда*

а) *если $D \neq 0$, то $\mathrm{r}(D) = 1$, а B — прямая сумма (прямое произведение) групп ранга 1 несравнимых между собой типов;*

б) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$ $(A = \prod\limits_{i \in I} A_i)$, где $\mathrm{r}(A_i) = 1$, либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $\mathrm{r}(B_i) = 1$, а C_i — сепарабельная (векторная) группа, типы прямых слагаемых ранга 1 которой несравнимы и выше $\mathrm{t}(B_i)$, причём типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j несравнимы при $i \neq j$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Необходимость следует из леммы 3.3, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A, где $\mathrm{r}(N_i) = 1$, невозможны следующие соотношения для типов: $\mathrm{t}(N_1) = \mathrm{t}(N_2)$ и $\mathrm{t}(N_1) \leqslant \mathrm{t}(N_2) \leqslant \mathrm{t}(N_3)$. Достаточность в случае а) вытекает из леммы 3.2, поскольку $D \leqslant_{\mathrm{fi}} A$ и $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца. В случае б) достаточность следует из того, что $A_i \leqslant_{\mathrm{fi}} A$, где согласно лемме 3.2 $A_i \in \mathrm{BL}_2$.

Докажем утверждение 2. Прямые слагаемые сепарабельных групп являются сепарабельными группами. Согласно абзацу перед теоремой 2.3 $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и $A_i \leqslant_{\mathrm{fi}} A$, т. е. типы из Ω_i и Ω_j несравнимы при $i \neq j$. С учётом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично первому утверждению. □

Теорема 3.4. *Пусть A — копериодическая группа, D — её делимая часть, $A = B \oplus D$, $D = t(D) \oplus D_0$. Тогда $A \in \mathrm{BL}_2$ в том и только в том случае, когда A алгебраически компактна, $t(D) \cong \bigoplus\limits_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, где Π — некоторое множество простых чисел, $\mathrm{r}(D_0) \leqslant 1$ и, кроме того,*

а) *если $0 \neq t(D) \neq D$, то $B = \bigoplus\limits_{p \in \Pi_1} B_p$, каждая B_p — циклическая p-группа и Π_1 — некоторое конечное множество простых чисел;*

б) *если $D_0 = 0$, то $B = G \oplus C$, $G = \prod\limits_{p \in \Pi_1} B_p$, каждая B_p — циклическая p-группа, $C \cong \prod\limits_{p \in \Pi_2} \hat{\mathbb{Z}}_p$, Π_1 и Π_2 — такие множества простых чисел, что $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$, причём если $D \neq 0$, то множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Имеем $A^1 = D \oplus B^1$. Если $B_p \neq 0$, $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то $B^1 = E^1_{(p)}$. Отсюда следует, что B^1 — делимая подгруппа без кручения в B и, значит, $B^1 = 0$, $A^1 = D$. Поэтому группа A алгебраически компактна [7, предложение 54.2]. Если $0 \neq t(D) \neq D$, то по теореме 3.2 B — периодическая группа. Всякая периодическая алгебраически компактная группа ограниченная [7, следствие 40.3], это доказывает пункт а). Если же $D_0 = 0$, то замыкание $G = \big(t(B)\big)^-$ в $\mathbb{Z}$-адической топологии периодической части $t(B)$ выделяется в B прямым слагаемым, $B = G \oplus C$ $(\Pi_1 = \{p \in P \mid B_p \neq 0\})$. Если $D_p, B_p \neq 0$, то $pC = C$, поэтому $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Если множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ бесконечно, то след группы C в G является смешанной группой, а это при условии $D \neq 0$ ввиду леммы 1.1 противоречит теореме 3.2.

Докажем достаточность. В случае а) $A \in \mathrm{BL}_2$ по теореме 3.2. Если выполнено условие пункта б), то $D \leqslant$fi A, $G \leqslant$fi $(G \oplus C)$ и $E(G)$, $E(C)$ — коммутативные кольца. Поэтому по лемме 3.2 $G \oplus C \in \mathrm{BL}_2$. По лемме 1.1 $(G \oplus C)' = \mathrm{Hom}(C, G)C$. Так как множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно, то $(G \oplus C)'$ — периодическая группа, и $\beta(G \oplus C)' = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(G \oplus C, D)$ в силу условия $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Следовательно, по лемме 3.2 $A \in \mathrm{BL}_2$. □

4. E-разрешимые группы класса 2

Лемма 4.1. *Пусть $A = \bigoplus\limits_{j \in I} A_j$, $|I| > 1$. Тогда*

1) *если $A_j \leqslant$fi A для каждого $j \in I$, то группа A E-разрешима класса не выше 2 в том и только в том случае, когда каждая A_j — E-разрешимая группа класса не выше 2, причём если кольцо $E(A_j)$ некоммутативно хотя бы для одного $j \in I$, то A — E-разрешимая группа класса 2;*
2) *если A — E-разрешимая группа класса 2, то $\alpha_i(\mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ для любого $\alpha_i \in \mathrm{Hom}(A_i, A_k)$, где $j, k \in I \setminus \{i\}$.*

Доказательство. Первое утверждение очевидно.

Докажем второе утверждение. Пусть θ — проекция A на $\bigoplus\limits_{k \in I \setminus \{i\}} A_k$ и $\gamma a = g \in A_i$, где $a \in A_j$, $\gamma \in \mathrm{Hom}(A_j, A_i)$. Пусть теперь $f \in E(A)$ такой, что $f|A_j = \gamma$, $f|A_i = \alpha_i$ и $f|A_s = 0$ при $s \neq j, i$. Имеем $[\theta, f]g = \alpha_i g = \alpha_i \gamma a$, $[\theta, f]a = -\gamma a = -g$. Следовательно, $[\theta, f]^2 a = -\alpha_i \gamma a = 0$, откуда получаем $\alpha_i(\mathrm{Hom}(A_j, A_i)A_j) = 0$ ввиду произвольности γ и a. □

Лемма 4.2. *Пусть $A = B \oplus G$, где $G \leqslant$fi A. Тогда условие E-разрешимости группы A класса не выше 2 равносильно тому, что обе группы B, G являются E-разрешимыми класса не выше 2, $[\varphi, \psi](\mathrm{Hom}(B, G)B) = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E(G)$ и $\beta(B') = 0$ для любого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, G)$, причём при одном из условий $\mathrm{Hom}(B, G) \neq 0$, $B' \neq 0$ или $G' \neq 0$ группа A E-разрешима класса 2. В частности, если кольца $E(B)$ и $E(G)$ коммутативны и $\mathrm{Hom}(B, G) \neq 0$, то A — E-разрешимая группа класса 2.*

Доказательство. Пусть $\theta\colon A \to G$ — проекция, $f \in E(A)$ такой, что $f|B = \beta$, $f|G = 1_G$. Тогда если $b \in B$, то $[\theta, f]b = \beta b \in A'$, что ввиду $B' \subseteq A'$ доказывает необходимость.

Докажем достаточность. Пусть $\pi\colon A \to B$, $\theta\colon A \to G$ — проекции и $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in E(A)$. Имеем

$$[\gamma, \delta] = (\pi + \theta)[\gamma, \delta](\pi + \theta) = \pi[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\pi + \theta[\gamma, \delta]\theta$$

(учтено, что $\pi[\gamma, \delta]\theta = 0$). Здесь можно считать, что $\theta[\gamma, \delta]\theta \in E(G)$, поэтому ввиду вполне инвариантности подгруппы G осталось проверить действие $[\alpha, \beta]\,[\gamma, \delta]$ на B. Если $b \in B$, то

$$[\gamma, \delta]b = [\pi\gamma, \pi\delta]b + \theta\gamma(\pi\delta b) - \theta\delta(\pi\gamma b) + [\theta\gamma, \theta\delta]b.$$

Последние три слагаемые принадлежат следу B в G, поэтому они аннулируются при действии $[\alpha,\beta]$. Далее, $[\pi\alpha,\pi\beta]\,[\pi\gamma,\pi\delta]b \in B'' = 0$. Следовательно,

$$[\alpha,\beta]\,[\gamma,\delta]b = \theta\alpha(\pi\beta[\pi\gamma,\pi\delta]b) - \theta\beta(\pi\alpha[\pi\gamma,\pi\delta]b) + [\theta\alpha,\theta\beta]([\pi\gamma,\pi\delta]b) = 0,$$

поскольку ввиду того, что $\pi\alpha|B, \pi\beta|B \in E(B)$, все эти слагаемые принадлежат образу в G подгруппы $[\pi\gamma,\pi\delta]B$. □

Лемма 4.3. *Пусть* $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ *и* $|I| > 1$. *Тогда*

1) A — *E-разрешимая группа класса не выше* 2 *в том и только в том случае, когда каждая* A_i — *E-разрешимая группа класса не выше* 2, $\alpha_i(\mathrm{Hom}(A_j,A_i)A_j) = 0$, $[\varphi_i,\psi_i](\mathrm{Hom}(A_j,A_i)A_j) = 0$ *и* $\beta_i(A_i') = 0$ *для любых* $\alpha_i,\beta_i \in \mathrm{Hom}(A_i,A_k)$ *и* $\varphi_i,\psi_i \in E(A_i)$, *где* $j,k \in I \setminus \{i\}$, *причём если* $\mathrm{Hom}(A_j,A_i) \neq 0$ *хотя бы для одной пары* (i,j) *или* $A_i' \neq 0$ *хотя бы для одной группы* A_i, *то* A — *E-разрешимая группа класса* 2;
2) *если* $A \in \mathrm{BL}_2$ *и каждая* A_i *является E-разрешимой группой класса не выше* 2, *то и сама группа* A *E-разрешима класса не выше* 2.

Доказательство. Докажем первое утверждение. Необходимость вытекает из лемм 4.1, 4.2. Докажем достаточность. Пусть $B_j = \bigoplus\limits_{i\in I\setminus\{j\}} A_i$, $\pi\colon A \to A_j$ и $\theta\colon A \to B_j$ — проекции, а $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in E(A)$. Если $a \in A_j$, то

$$\begin{aligned}[\gamma,\delta]a = [(\pi+\theta)\gamma,(\pi+\theta)\delta]a = [\pi\gamma,\pi\delta]a + [\pi\gamma,\theta\delta]a + [\theta\gamma,\pi\delta]a + [\theta\gamma,\theta\delta]a =\\ = [\pi\gamma,\pi\delta]a + \pi\gamma\theta\delta a - \theta\delta\pi\gamma a + \theta\gamma\pi\delta a - \pi\delta\theta\gamma a + \theta\gamma\theta\delta a - \theta\delta\theta\gamma a.\end{aligned}$$

Здесь $\theta\delta a \in \mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j$ и $\pi\gamma|B_j \in \mathrm{Hom}(B_j,A_j)$, поэтому $\pi\gamma\theta\delta a = 0$. Аналогично $\pi\delta\theta\gamma a = 0$. Далее, $\theta\delta\pi\gamma a, \theta\gamma\pi\delta a, \theta\gamma\theta\delta a, \theta\delta\theta\gamma a \in \mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j$, а поскольку в скобки $[\pi\alpha,\theta\beta]$, $[\theta\alpha,\pi\beta]$ в качестве множителей входят гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(B_j,A_j)$, то перечисленные элементы аннулируются при действии этих скобок. С учётом того, что $[\pi\alpha,\pi\beta]\,[\pi\gamma,\pi\delta]a = 0$ и $[\theta\alpha,\theta\beta](\mathrm{Hom}(A_j,B_j)A_j) = 0$, окончательно получаем $[\alpha,\beta]\,[\gamma,\delta]a = 0$.

Второе утверждение вытекает из леммы 3.3 и первого утверждения. □

Из лемм 4.1, 4.3 следует, что никакая E-разрешимая группа не содержит прямых слагаемых, разложимых в прямые суммы изоморфных групп. Поэтому делимая группа D является E-разрешимой тогда и только тогда, когда все её ненулевые p-компоненты имеют ранг 1, а часть без кручения либо нулевая, либо также имеет ранг 1 (такая группа D принадлежит BL_2).

Следствие 4.1. *Если* A — *E-разрешимая группа класса не выше* 2, *то каждая её ненулевая p-компонента* A_p *есть либо циклическая группа, либо прямая сумма циклической группы* B_p *и группы* Z_{p^∞}, *причём в последнем случае если* $B_p \neq 0$, *то* $A/A_p = p(A/A_p)$.

Следствие 4.2. *Если* A — *периодическая группа, то следующие условия эквивалентны*:

1) A — *E-разрешимая группа класса не выше* 2;

2) $A \in \mathrm{BL}_2$;
3) *каждая ненулевая p-компонента группы A есть либо циклическая группа, либо прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической группы и группы Z_{p^∞}. В частности, если A редуцированная, то её кольцо эндоморфизмов коммутативно.*

Теорема 4.1. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$, то A — E-разрешимая группа класса не выше 2 тогда и только тогда, когда*

1) *обе группы B, D являются E-разрешимыми класса не выше 2;*
2) *E-коммутант B' группы B — периодическая группа;*
3) *если $D_p, B_p \neq 0$, то $B/B_p = p(B/B_p)$;*
4) *$0 \neq t(D) \neq D$ влечёт периодичность B, в этом случае A имеет строение $A = \Big(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} A_p\Big) \oplus D_0$, где Π — некоторое множество простых чисел, каждая A_p есть или циклическая группа, или прямая сумма некоторой (возможно, нулевой) циклической p-группы и группы Z_{p^∞}, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$.*

Доказательство. Докажем необходимость. Если $0 \neq b \in B$ — элемент бесконечного порядка, то ввиду инъективности группы D найдётся гомоморфизм $\alpha\colon B \to D$ со свойством $\alpha b \neq 0$, причём если $D = t(D) \oplus D_0$ и $D_0 \neq 0$, то α можно выбрать так, чтобы $\alpha b \in D_0$ и $\gamma\alpha b \neq 0$ для некоторого $\gamma \in \mathrm{Hom}(D_0, Z_{p^\infty})$. Поэтому в силу леммы 4.1 условие $0 \neq t(D) \neq D$ влечёт периодичность B. Наконец, если $B_p \neq 0$, то по следствию 4.1 B_p — циклическая группа, поэтому $B = B_p \oplus E_{(p)}$ для некоторой подгруппы $E_{(p)} \subseteq B$. Если теперь $pE_{(p)} \neq E_{(p)}$, то при условии $D_p \neq 0$ найдётся ненулевая композиция гомоморфизмов $E_{(p)} \to B_p \to D_p$, что противоречит лемме 4.1.

Докажем достаточность. Пусть $0 \neq t(D) \neq D$. Имеем $A = B \oplus t(D) \oplus D_0$, где $B \oplus t(D) \leqslant \mathrm{fi}\ A$, $E(B)$ и $E\big(t(D)\big)$ — коммутативные кольца. Согласно лемме 4.2 $B \oplus t(D)$ — E-разрешимая группа класса не выше 2. Поскольку след группы D_0 в $B \oplus t(D)$ содержится в подгруппе $t(D)$, а $E\big(t(D)\big)$ и $E(D_0)$ — коммутативные кольца, то из леммы 4.2 следует, что A — E-разрешимая группа класса 2. Если же $D_0 = 0$, то $E(D)$ — коммутативное кольцо и $D \leqslant \mathrm{fi}\ A$. Далее, если $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то по условию $pE_{(p)} = E_{(p)}$ при $D_p, B_p \neq 0$. В силу леммы 1.1 $B' = (E_{(p)})'$, и значит, $(B')_p = 0$, откуда ввиду периодичности B' вытекает, что $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Поэтому по лемме 4.2 A — E-разрешимая группа класса не выше 2. Пусть, наконец, D — группа без кручения. Тогда $\mathrm{r}(D) = 1$, $D \leqslant \mathrm{fi}\ A$, $E(D)$ — коммутативное кольцо и, так как B' — периодическая группа, $\beta(B') = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(B, D)$. Следовательно, по лемме 4.2 вновь A E-разрешима класса не выше 2. Заметим, что если $D \cong \mathbb{Q}$, а B — периодическая группа с коммутативным кольцом эндоморфизмов, то и кольцо $E(A)$ коммутативно, т. е. в теореме возможен случай, когда A — разрешимая группа класса 1. □

Следствие 4.3. *Если $0 \neq D$ — делимая часть группы A, $A = B \oplus D$ и $0 \neq B$ — группа без кручения, то A — E-разрешимая группа класса 2 в том и только в том случае, когда $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4.1, а достаточность из леммы 4.2. Поскольку $\mathrm{Hom}(B, D) \neq 0$, то A — E-разрешимая группа класса 2. □

Отметим, что делимая группа $D = t(D) \oplus D_0$ имеет коммутативное кольцо эндоморфизмов $E(D)$ тогда и только тогда, когда либо $t(D) = 0$, а $D_0 \cong \mathbb{Q}$, либо $D_0 = 0$, а $D_p \cong Z_{p^\infty}$ для каждого p с условием $D_p \neq 0$.

Следствие 4.4. *Пусть $A = t(A) \oplus R$ — расщепляющаяся смешанная группа с ненулевой делимой частью $D = t(D) \oplus D_0$. Запишем A в виде $A = T \oplus B \oplus \oplus t(D) \oplus D_0$, где $t(A) = T \oplus t(D)$. Группа A E-разрешима класса не выше 2 в том и только в том случае, когда выполняются следующие условия*:

1) $t(D) \cong \bigoplus\limits_{p \in \Pi} Z_{p^\infty}$, *а* $\mathrm{r}(D_0) \leqslant 1$;
2) $T = \bigoplus\limits_{p \in \Pi_1} T_p$, *где каждая T_p — некоторая ненулевая циклическая p-группа*;
3) *кольцо $E(B)$ коммутативно и $pB = B$ при $p \in \Pi' = \Pi \cap \Pi_1$*;
4) *если $B, D_0 \neq 0$, то $t(D) = 0$.*

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 4.1.

Докажем достаточность. Имеем $t(A) = T \oplus t(D) \leqslant \text{fi}\ A$. Если $D_0 = 0$, то обозначим через G след группы B в $t(A)$. G можно записать в виде $G = G_1 \oplus G_2$, где $G_1 = \bigoplus\limits_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} G_p \subseteq T$, $G_2 = \bigoplus\limits_{p \in \Pi} G_p \subseteq t(D)$ ($pG = G$ при $p \in \Pi'$, поэтому $G_p \cap T_p = 0$ для таких p). Поскольку $\bigoplus\limits_{p \in \Pi_1 \setminus \Pi} T_p \leqslant \text{fi}\ t(A)$ и кольца $E(T)$, $E\big(t(D)\big)$ коммутативны, то $[\varphi, \psi]G = 0$ для любых $\varphi, \psi \in E\big(t(A)\big)$. Поэтому A — E-разрешимая группа класса не выше 2 по лемме 4.2. Если же $B \neq 0$ и $D_0 \cong \mathbb{Q}$, то $A = B \oplus T \oplus D_0$, где $T \oplus D_0 \leqslant \text{fi}\ A$ и $E(B)$, $E(T \oplus D_0)$ — коммутативные кольца. Вновь по лемме 4.2 группа A E-разрешимая класса 2. Наконец, при $B = 0$ имеем $A = T \oplus D$, где $E(T)$, $E\big(t(D)\big)$ — коммутативные кольца и D — E-разрешимая группа класса не выше 2. Поэтому и в этом случае A — E-разрешимая группа класса не выше 2. □

Теорема 4.2.

1. *Пусть A — вполне разложимая группа без кручения, $A = B \oplus D$, где D — делимая часть группы A. Тогда A — E-разрешимая группа класса не выше 2 в том и только в том случае, когда*
   а) *если $D \neq 0$, то $\mathrm{r}(D) = 1$, а B — прямая сумма групп ранга 1 несравнимых между собой типов*;
   б) *если $D = 0$, то $A = \bigoplus\limits_{i \in I} A_i$, где типы прямых слагаемых ранга 1 групп A_i и A_j несравнимы при различных i и j, причём либо $\mathrm{r}(A_i) = 1$,*

либо $A_i = B_i \oplus C_i$, $\mathrm{r}(B_i) = 1$, C_i — *прямая сумма групп ранга* 1 *несравнимых между собой типов выше* $\mathrm{t}(B_i)$.

2. *Пусть* A — *сепарабельная (векторная) группа без кручения,* $A = B \oplus D$, *где* D — *делимая часть группы* A. *Тогда* A — E*-разрешимая группа класса не выше* 2 *в том и только в том случае, когда*
   а) *если* $D \neq 0$, *то* $\mathrm{r}(D) = 1$, *а* B — *прямая сумма (прямое произведение) групп ранга* 1 *несравнимых между собой типов;*
   б) *если* $D = 0$, *то* $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$ $(A = \prod\limits_{i\in I} A_i)$, *типы прямых слагаемых ранга* 1 *групп* A_i *и* A_j *несравнимы при различных* i *и* j, *причём либо* $\mathrm{r}(A_i) = 1$, *либо* $A_i = B_i \oplus C_i$, $\mathrm{r}(B_i) = 1$, C_i — *сепарабельная (векторная) группа, типы прямых слагаемых ранга* 1 *которой несравнимы между собой и выше* $\mathrm{t}(B_i)$.

Доказательство. Докажем утверждение 1. Необходимость следует из леммы 4.2, поскольку для прямого слагаемого $N_1 \oplus N_2 \oplus N_3$ группы A, где $\mathrm{r}(N_i) = 1$, невозможны следующие соотношения для типов: $\mathrm{t}(N_1) = \mathrm{t}(N_2)$, $\mathrm{t}(N_1) \leqslant \leqslant \mathrm{t}(N_2) \leqslant \mathrm{t}(N_3)$. Достаточность в случае а) вытекает из леммы 4.2, поскольку $D \leqslant$fi A и $E(B)$, $E(D)$ — коммутативные кольца. В случае б) достаточность следует из того, что $A_i \leqslant$fi A, где согласно лемме 4.2 A_i — E-разрешимые группы класса не выше 2.

Докажем утверждение 2. Прямые слагаемые сепарабельных групп являются сепарабельными группами [7, теорема 87.5]. Далее, как в абзаце перед теоремой 2.3, $A = \bigoplus\limits_{i\in I} A_i$, $\Omega(A_i) = \Omega_i$ и $A_i \leqslant$fi A, т. е. типы из $\Omega(A_i)$ и $\Omega(A_j)$ несравнимы при $i \neq j$. Для векторных групп можно использовать лемму: если η — ненулевой гомоморфизм векторной группы $V = \prod\limits_{i\in I} R_i$ в векторную группу $W = \prod\limits_{j\in J} S_j$ (R_i и S_j — группы ранга 1), то $t(R_i) \leqslant t(S_j)$ для некоторых $i \in I$ и $j \in J$ [7, лемма 96.1]. С учётом этих фактов оставшиеся утверждения доказываются аналогично первому утверждению. □

Теорема 4.3. *Пусть* A — *копериодическая группа,* D — *её делимая часть,* $A = B \oplus D$, $D = t(D) \oplus D_0$. *Тогда* A — E*-разрешимая группа класса не выше* 2 *в том и только в том случае, когда* A *алгебраически компактна,* $D = \left(\bigoplus\limits_{p\in\Pi} Z_{p^\infty}\right) \oplus D_0$, *где* Π — *некоторое множество простых чисел,* $\mathrm{r}(D_0) \leqslant 1$ *и, кроме того,*

1) *если* $0 \neq t(D) \neq D$, *то* $B = \bigoplus\limits_{p\in\Pi_1} B_p$, *каждая* B_p — *циклическая* p*-группа и* Π_1 — *некоторое конечное множество простых чисел;*
2) *если* $t(D) = 0$ *или* $D_0 = 0$, *то* $B = G \oplus C$, $G = \prod\limits_{p\in\Pi_1} B_p$, *каждая* B_p *является (при* $\Pi_1 \neq \varnothing$) *ненулевой циклической* p*-группой,* $C \cong \prod\limits_{p\in\Pi_2} \hat{\mathbb{Z}}_p$, Π_1 *и* Π_2 — *такие множества простых чисел, что* $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$, *причём если* $D \neq 0$, *то множество* $\Pi_1 \cap \Pi_2$ *конечно.*

Доказательство. Докажем необходимость. Имеем $A^1 = D \oplus B^1$. Если $B_p \neq 0$, $B = B_p \oplus E_{(p)}$, то $B^1 = E^1_{(p)}$. Отсюда следует, что B^1 — делимая подгруппа без кручения в B, и значит, $B^1 = 0$, $A^1 = D$. Поэтому группа A алгебраически компактна [7, предложение 54.2]. Если $0 \neq t(D) \neq D$, то по теореме 4.1 B — периодическая группа. Всякая периодическая алгебраически компактная группа ограниченная [7, следствие 40.3], это доказывает пункт 1).

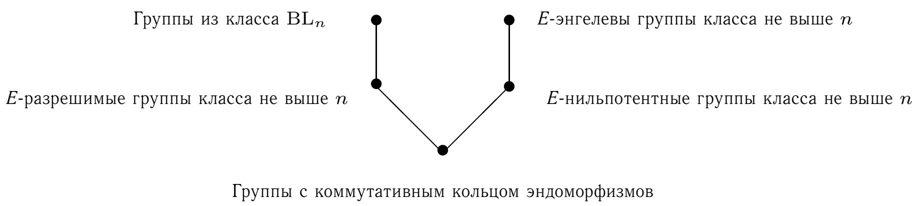
Замыкание $G = \big(t(B)\big)^-$ в Z-адической топологии периодической части $t(B)$ выделяется в B прямым слагаемым, $B = G \oplus C$ ($\Pi_1 = \{p \in P \mid B_p \neq 0\}$). Если $D_p, B_p \neq 0$, то $pC = C$, поэтому $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Если множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ бесконечно, то след группы C в G является смешанной группой, а это при условии $D \neq 0$ ввиду леммы 4.1 противоречит теореме 4.1.

Докажем достаточность. В случае 1) A — E-разрешимая группа класса не выше 2 по теореме 4.1. Если выполнены условия пункта 2), то $G \leqslant \mathrm{fi}\,(G \oplus C)$ и $E(G)$, $E(C)$ — коммутативные кольца. Поэтому по лемме 4.2 $G \oplus C$ — E-разрешимая группа класса не выше 2. Пусть $D \neq 0$. По лемме 1.1 $(G \oplus C)' = \mathrm{Hom}(C, G)C$. Так как множество $\Pi_1 \cap \Pi_2$ конечно, то $(G \oplus C)'$ — периодическая группа и $\beta(G \oplus C)' = 0$ для каждого $\beta \in \mathrm{Hom}(G \oplus C, D)$ в силу условия $\Pi \cap \Pi_1 \cap \Pi_2 = \varnothing$. Следовательно, по лемме 4.2 A — E-разрешимая группа класса не выше 2. □

В теоремах 4.2, 4.3 условие, что A — E-разрешимая группа класса не выше 2, равносильно условию $A \in \mathrm{BL}_2$, это можно вывести из их доказательств или сравнением с соответствующими результатами из раздела 3.

Классы групп, близкие к рассматриваемым, исследовались в [4, 9—21, 32, 33]. E-разрешимые группы изучались также в [29].

В заключение приведём диаграмму, иллюстрирующую связи изучаемых классов групп.



Литература

[1] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. — М.: Мир, 1976.

[2] Гриншпон С. Я. О строении вполне характеристических подгрупп абелевых групп без кручения // Абелевы группы и модули. — Томск, 1981. — С. 56—92.

[3] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[4] Крылов П. А., Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения с большим числом эндоморфизмов // Тр. Ин-та мат. и мех. — 2001. — Т. 7, № 2. — С. 194—207.

[5] Туганбаев А. А. Теория колец (арифметические модули и кольца). — М.: МЦНМО, 2009.

[6] Фейс К. Алгебра: кольца, модули и категории. Т. 2. — М.: Мир, 1979.

[7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. — М.: Мир, 1974; 1977.

[8] Чехлов А. Р. Пересечение прямых слагаемых абелевых p-групп // Абелевы группы и модули. — Томск, 1981. — С. 240—244.

[9] Чехлов А. Р. О некоторых классах абелевых групп // Абелевы группы и модули. — Томск, 1984. — С. 137—152.

[10] Чехлов А. Р. Об абелевых группах без кручения, близких к квазисервантно инъективным // Абелевы группы и модули. — Томск, 1985. — С. 117—127.

[11] Чехлов А. Р. О квазисервантно инъективных абелевых группах без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1988. — № 6. — С. 80—83.

[12] Чехлов А. Р. Связные квазисервантно инъективные абелевы группы // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1989. — № 10. — С. 84—87.

[13] Чехлов А. Р. О прямых произведениях и прямых суммах абелевых $QCPI$-групп без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — — 1990. — № 4. — С. 58—67.

[14] Чехлов А. Р. Об абелевых CS-группах без кручения // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1990. — № 3. – С. 84—87.

[15] Чехлов А. Р. Абелевы группы без кручения конечного p-ранга с дополняемыми замкнутыми сервантными подгруппами // Абелевы группы и модули. — Томск, 1991. — С. 157—178.

[16] Чехлов А. Р. Квазисервантно инъективные группы без кручения с неразложимыми сервантными подгруппами // Мат. заметки. — 2000. — Т. 68, № 4. — С. 587—592.

[17] Чехлов А. Р. Вполне транзитивные группы без кручения конечного p-ранга // Алгебра и логика. — 2001. — Т. 40, № 6. — С. 698—715.

[18] Чехлов А. Р. О разложимых вполне транзитивных группах без кручения // Сиб. мат. журн. — 2001. — Т. 42, № 3. — С. 714—719.

[19] Чехлов А. Р. Об одном классе эндотранзитивных групп // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 6. — С. 944—949.

[20] Чехлов А. Р. О квазиполных смешанных группах // Фундамент. и прикл. мат. — 2002. — Т. 8, вып. 4. — С. 1215—1224.

[21] Чехлов А. Р. О слабо квазисервантно инъективных группах // Мат. заметки. — 2007. — Т. 81, № 3. — С. 434—447.

[22] Чехлов А. Р. О подгруппах абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 6. — С. 211—218.

[23] Чехлов А. Р. Свойства подгрупп абелевых групп, инвариантных относительно проекций // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2008. — Вып. 1 (2). — С. 76—82.

[24] Чехлов А. Р. О проективно инвариантных подгруппах абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — Вып. 1 (5). — С. 31—36.

[25] Чехлов А. Р. О скобке Ли эндоморфизмов абелевых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2009. — Вып. 2 (6). — С. 78—84.

[26] Чехлов А. Р. Об абелевых группах с нормальным кольцом эндоморфизмов // Алгебра и логика. — 2009. — Т. 48, № 4. — С. 520—539.

[27] Чехлов А. Р. Сепарабельные и векторные группы, проективно инвариантные подгруппы которых вполне инвариантны // Сиб. мат. журн. — 2009. — Т. 50, № 4. — С. 942—953.

[28] Чехлов А. Р. E-нильпотентные и E-разрешимые абелевы группы класса 2 // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2010. — Вып. 1 (9). — С. 59—71.

[29] Чехлов А. Р. E-разрешимые модули // Фундамент. и прикл. мат. — 2010. — Т. 16, вып. 7. — С. 221—236.

[30] Чехлов А. Р. Некоторые примеры E-разрешимых групп // Вестн. Томск. ун-та. Математика и механика. — 2010. — Вып. 3 (11). — С. 69—76.

[31] Чехлов А. Р. О коммутаторно инвариантных подгруппах абелевых групп // Сиб. мат. журн. — 2010. — Т. 51, № 5. — С. 1163—1174.

[32] Chekhlov A. R. On mixed cs-groups // Acta Appl. Math. — 2005. — Vol. 85. — P. 75—85.

[33] Chekhlov A. R., Krylov P. A. On L. Fuchs' problems 17 and 43 // J. Math. Sci. — 2007. — Vol. 143, no. 5. — P. 3517—3602.