Стабильные группы над ассоциативными кольцами с 1/2. Описание изоморфизмов стабильных линейных групп

А. С. АТКАРСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com

УДК 512.643

Ключевые слова: стабильная линейная группа, ассоциативное кольцо, изоморфизм.

Аннотация

В работе рассматриваются стабильные линейные группы над ассоциативными кольцами с 1/2 и изоморфизмы между ними. Описывается действие изоморфизмов на стабильной элементарной подгруппе.

Abstract

A. S. Atkarskaya, Stable groups over associative rings with 1/2*. A description of isomorphisms of the stable linear groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 3—20.

In this paper, we consider the stable linear groups over associative ring with 1/2 and isomorphisms between them. We describe an action of the isomorphisms on the stable elementary subgroup.

Описание автоморфизмов линейных групп началось с работы О. Шрайера и Б. Л. ван дер Вардена [9], где были описаны автоморфизмы группы PSL_n, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем Ж. Дьёдонне и Ч. Риккартом в [5, 8] были описаны автоморфизмы группы GL_n, $n \geqslant 3$, над телом. В этих работах был введён метод инволюций, использованный в дальнейшем многими авторами для описания изоморфизмов классических групп. С помощью метода инволюций Янь Шицзянь в [10] описал автоморфизмы группы $\mathrm{E}_n(R)$, $n \geqslant 3$, где R — область целостности характеристики, отличной от 2.

В 1983 г. А. В. Михалёвым и И. З. Голубчиком [2] (также с использованием метода инволюций) было дано описание изоморфизмов полных линейных групп $\mathrm{GL}_n(R)$ в случае, когда ассоциативное кольцо R содержит обратимый элемент 2. Другим способом этот результат был доказан Е. И. Зельмановым [3]. Затем

И. З. Голубчиком [1] данное описание было продолжено на случай линейных групп над ассоциативными кольцами без $1/2$.

Представляет интерес описание изоморфизмов не только классических линейных групп, но и групп автоморфизмов свободных модулей бесконечного ранга. В [6] Ли Фуанем был описан вид автоморфизмов стабильных линейных групп над произвольными коммутативными локальными кольцами. В представленной работе описаны изоморфизмы стабильных линейных групп над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $1/2$.

1. Основные определения

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Основные определения взяты из [7].

Определение 1. Обозначим через $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ множество матриц со счётным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер n, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы r_{ii} равны a, $a \in R$.

Ясно, что $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ — это кольцо.

Обозначим через $\mathrm{FMat}(R)$ подкольцо кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, состоящее из матриц, имеющих конечное число ненулевых элементов.

Пусть $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Мы отождествим A с элементом из $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ по следующему правилу: матрицу A запишем в левый верхний угол, начиная с позиции (n, n) на диагонали запишем 1, а на всех остальных местах запишем 0.

Сохраним обозначение $\mathrm{GL}_n(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Ясно, что $\mathrm{GL}_n(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, а также что для $m \geqslant n$ мы имеем $\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{GL}_m(R)$.

Определение 2. Положим $\mathrm{GL}(R) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{GL}_n(R)$ $(\mathrm{GL}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовём её *стабильной линейной группой*.

Подгруппу $\mathrm{GL}_n(R)$, порождённую матрицами $1 + re_{ij}$, $i \neq j$, $r \in R$, будем обозначать $\mathrm{E}_n(R)$ и называть *подгруппой элементарных матриц*.

Аналогично группам $\mathrm{GL}_n(R)$ в $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ можно вложить подгруппы элементарных матриц $\mathrm{E}_n(R)$.

Определение 3. Положим $\mathrm{E}(R) = \bigcup\limits_{n\geqslant 1} \mathrm{E}_n(R)$ $(\mathrm{E}_n(R) \subseteq \mathrm{Mat}_\infty(R))$. Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$. Назовём её *стабильной элементарной группой*.

Обозначим через $\mathrm{Mat}(R)$ матрицы со счётным числом строк и столбцов, такие что в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов (кольцо эндоморфизмов свободного модуля счётного ранга при фиксации базиса).

Подмножество $\{e_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, кольца $\mathrm{Mat}(R)$ называется *системой матричных единиц*, если $e_{ij}e_{st} = \delta_{js}e_{it}$ (δ_{js} — символ Кронекера). Матрицы

$$1 - e_{ii} - e_{jj} + e_{ij} + e_{ji}$$

будем называть *матрицами перестановок* и обозначать s_{ij}.

Пусть I — идеал кольца R; $E(R, I)$ — подгруппа группы $\mathrm{GL}(R)$, порождённая матрицами $1 + \lambda e_{ij}$, где $\lambda \in I$, $i \neq j \in \mathbb{N}$, $\mathrm{GL}(R, I)$ — ядро канонического гомоморфизма $\varphi_I \colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(R/I)$. Пусть, кроме того, $[A, B] \equiv A^{-1}B^{-1}AB$.

Основным результатом этой работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $1/2$, $\varphi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S)$ — изоморфизм групп. Тогда существуют центральные идемпотенты h и e колец $\mathrm{Mat}(R)$ и $\mathrm{Mat}(S)$ соответственно, кольцевой изоморфизм*

$$\theta_1 \colon h\langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}(S)\rangle$$

и кольцевой антиизоморфизм

$$\theta_2 \colon (1-h)\langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}(S)\rangle,$$

такие что

$$\varphi(A) = \theta_1(hA) + \theta_2\big((1-h)A^{-1}\big)$$

для всех $A \in \mathrm{E}(R)$ (под $\langle\,\rangle$ подразумевается сложение и умножение элементов, а также взятие обратных элементов в случае их существования).

2. Некоторые вспомогательные утверждения

Лемма 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с $1/2$, M и N — нормальные подгруппы в $\mathrm{GL}(R)$, такие что $M \cap N = \{1\}$ и $MN = \mathrm{GL}(R)$. Тогда найдутся $I, J \lhd R$, такие что $R = I \oplus J$ и $M = \mathrm{GL}(R, I)$, $N = \mathrm{GL}(R, J)$.*

Доказательство. Воспользуемся следующей теоремой о структуре нормальных подгрупп стабильной группы.

Теорема 2 [7]. *Пусть H — подгруппа $\mathrm{GL}(R)$, нормализуемая $\mathrm{E}(R)$. Тогда существует однозначно определённый $I \lhd R$, такой что*

$$\mathrm{E}(R, I) \subseteq H \subseteq \mathrm{GL}(R, I).$$

Более того, всякая подгруппа, удовлетворяющая данному условию, является нормальной в $\mathrm{GL}(R)$.

Подгруппы M и N являются нормальными в $\mathrm{GL}(R)$, следовательно, удовлетворяют условию теоремы. Значит, существуют такие $I, J \lhd R$, что $\mathrm{E}(R, I) \subseteq \subseteq M \subseteq \mathrm{GL}(R, I)$ и $\mathrm{E}(R, J) \subseteq N \subseteq \mathrm{GL}(R, J)$. Так как $M \cap N = \{1\}$, то $\mathrm{E}(R, I) \cap \mathrm{E}(R, J) = \{1\}$, откуда следует, что $I \cap J = \{0\}$. Также $\mathrm{GL}(R) = MN$, поэтому $\mathrm{GL}(R) = \mathrm{GL}(R, I)\mathrm{GL}(R, J)$, а это означает, что $R = I \oplus J$. Так как $I \cap J = \{0\}$, то $\mathrm{GL}(R, I) \cap \mathrm{GL}(R, J) = \{1\}$. Из этого равенства с учётом того, что $M \subseteq \mathrm{GL}(R, I)$, $N \subseteq \mathrm{GL}(R, J)$, получаем, что $M = \mathrm{GL}(R, I)$, $N = \mathrm{GL}(R, J)$. Лемма доказана. $\square$

Предложение 1. *Пусть R, S — ассоциативные кольца с $1/2$,*

$$\varphi\colon \mathrm{GL}(R) \to \mathrm{GL}(S) -$$

изоморфизм групп, $\{e_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ — стандартная система матричных единиц. Тогда существует такая полная система матричных единиц $\{f_{ij} \mid i, j \geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}(S)$, что

$$\varphi(1 - 2e_{ii}) = 1 - 2f_{ii}. \tag{1}$$

Доказательство. Положим

$$\varphi(1 - 2e_{ii}) = 1 - 2f_{ii}. \tag{2}$$

Тогда $f_{ii}^2 = f_{ii}$. Положим $1-2e = \varphi^{-1}(1-2f_{11}f_{22})$. Тогда $e^2 = e$. Так как $1-2f_{ii}$ коммутирует с $1-2f_{11}f_{22}$, то $1-2e$ коммутирует с $1-2e_{ii}$. Следовательно, $1-2e$ является диагональной матрицей. Если $[a, 1-2e_{ii}] = 1$, то $[\varphi(a), 1-2f_{ii}] = 1$, $i = 1, 2$, т. е. a коммутирует с $1 - 2e$. Таким образом,

$$[1 - 2e, s_{ij}] = 1, \quad i, j \geqslant 3, \tag{3}$$

и

$$1 - 2e \text{ коммутирует со всеми обратимыми диагональными матрицами из } \mathrm{GL}(R). \tag{4}$$

Теперь пусть a обладает свойством

$$a(1 - 2e_{11})a^{-1} = 1 - 2e_{22}, \quad a(1 - 2e_{22})a^{-1} = 1 - 2e_{11}.$$

Тогда

$$a(1 - 2e)a^{-1} = \varphi^{-1}(\varphi(a)(1 - 2f_{11}f_{22})\varphi(a)^{-1}) = \varphi^{-1}(1 - 2f_{11}f_{22}) = 1 - 2e.$$

Следовательно,

$$[1 - 2e, s_{12}] = 1. \tag{5}$$

Значит, по (3), (5) и по определению группы $\mathrm{GL}(R)$ мы получаем, что

$$1 - 2e = \mathrm{diag}[\varepsilon, \varepsilon, 1, 1, \ldots], \quad \varepsilon^2 = 1. \tag{6}$$

Положим $\varepsilon = 1 - 2e_1$. Тогда $e_1^2 = e_1$ и по (4) элемент e_1 коммутирует со всеми обратимыми элементами кольца R. Значит, e_1 — центральный идемпотент.

Положим $M = \varphi\big(\mathrm{GL}(R, e_1R)\big)$, $N = \varphi\big(\mathrm{GL}(R, (1 - e_1)R)\big)$. Так как $\mathrm{GL}(R) = \mathrm{GL}(R, e_1R)\mathrm{GL}(R, (1 - e_1)R)$, то по лемме 1 найдутся такие $I, J \lhd S$, что $S = I \oplus J$, $M = \mathrm{GL}(S, I)$, $N = \mathrm{GL}(S, J)$. Тогда мы можем положить $\mathrm{Mat}(I) = (1 - q)\mathrm{Mat}(S)$, $\mathrm{Mat}(J) = q\mathrm{Mat}(S)$, где q — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}(S)$.

По (6) получаем, что $1 - 2e$ коммутирует с $\mathrm{GL}(R, (1 - e_1)R)$. Следовательно, $1-2f_{11}f_{22}$ коммутирует с $\mathrm{Mat}(J)$. Также $(1-2e)(1-2e_{11})(1-2e_{22})$ коммутирует с $\mathrm{GL}(R, e_1 R)$. Значит, $(1-2f_{11}f_{22})(1-2f_{11})(1-2f_{22})$ коммутирует с $\mathrm{Mat}(I)$. Положим $1-2f_{11}f_{22} = a+b$, где $a \in \mathrm{Mat}(I)$, $b \in \mathrm{Mat}(J)$. Тогда в силу предыдущего замечания получаем, что $a(1-2f_{11})(1-2f_{22})$ — центральный элемент $\mathrm{Mat}(I)$, а b — центральный элемент $\mathrm{Mat}(J)$. Также $(1-2f_{11}f_{22})^2 = 1$, следовательно, $a^2 = b^2 = 1$, т. е. $a(1-2f_{11})(1-2f_{22})$ и b являются инволюциями колец $\mathrm{Mat}(I)$ и $\mathrm{Mat}(J)$ соответственно. Это в свою очередь означает, что

$$b = q - 2q_1, \quad a(1-2f_{11})(1-2f_{22}) = 1 - q - 2q_2, \tag{7}$$

где q_1 и q_2 — центральные идемпотенты в соответствующих кольцах.

Покажем, что $q_1 = 0$, $q_2 = 1-q$. Имеем

$$1-2f_{11}f_{22} = a+b = (1-q-2q_2)(1-2f_{11})(1-2f_{22}) + (q-2q_1). \tag{8}$$

Умножим равенство (8) слева на q_1. Получим, что $q_1(1-2f_{11}f_{22}) = -q_1$, т. е.

$$q_1 f_{11} f_{22} = q_1.$$

Умножим последнее равенство справа на f_{11}. Получим, что $q_1 f_{11} f_{22} = q_1 f_{11}$, значит,

$$q_1 = q_1 f_{11}.$$

Аналогично выводим, что

$$q_1 = q_1 f_{22}.$$

Отсюда следует, что $q_1(1-2f_{11})(1-2f_{22}) = q_1$, значит,

$$q_1 \varphi(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_1. \tag{9}$$

Нормальная подгруппа группы $\mathrm{GL}(R)$, порождённая матрицей $1-2e_{11}-2e_{22}$, содержит подгруппу $\mathrm{E}(R)$. Учитывая равенство (9), получаем, что

$$\varphi\bigl(\mathrm{E}(R)\bigr) \subseteq \mathrm{GL}\bigl(S, (1-q_1)S\bigr). \tag{10}$$

Так как q_1 — центральный идемпотент кольца $q\mathrm{Mat}(S)$, то q_1 также центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}(S)$. Тогда по лемме 1

$$\varphi^{-1}\bigl(\mathrm{GL}(S, q_1 S)\bigr) = \mathrm{GL}(R, I_1), \quad I_1 \lhd R. \tag{11}$$

Но, пользуясь (10), мы получаем, что $\varphi^{-1}\bigl(\mathrm{GL}(S, q_1 S)\bigr) \cap \mathrm{E}(R) = \{1\}$. Следовательно, $I_1 = 0$ и $q_1 S = 0$, откуда вытекает, что $q_1 = 0$.

Умножив равенство (8) на $q_3 = 1 - q_1 - q_2$, получим

$$(1-2f_{11}f_{22})q_3 = (1-2f_{11})(1-2f_{22})q_3. \tag{12}$$

Отсюда вытекает, что $(1-f_{11})f_{22}q_3 = 0$ и $f_{22}q_3 = f_{11}f_{22}q_3$. Аналогично получаем, что $f_{11}q_3 = f_{11}f_{22}q_3$. Тогда из (12) следует, что $f_{11}q_3 = f_{22}q_3 = f_{11}f_{22}q_3 = 0$. Значит, $q_3(1-2f_{11})(1-2f_{22}) = q_3$, следовательно,

$$q_3 \varphi^{-1}(1-2e_{11}-2e_{22}) = q_3. \tag{13}$$

Это в свою очередь означает (аналогично предыдущему), что $q_3 = 0$, т. е. $q_2 = 1-q$.

Итак, мы получили, учитывая (8), что

$$1-2f_{11}f_{22}=a+b=-(1-q)(1-2f_{22})(1-2f_{22})+q.$$

Матрицы $1-2f_{11}f_{22}$ и $(1-2f_{22})(1-2f_{22})$ являются элементами стабильной группы $\mathrm{GL}(S)$, значит, $2q-1=1$, откуда следует, что $q=1$. Таким образом, $f_{11}f_{22}=0$. Сопрягая последнее равенство образами соответствующих матриц s_{ij}, получаем

$$f_{ii}f_{jj}=0 \text{ для } i\neq j. \tag{14}$$

Следовательно, $\{f_{ii}\mid i\geqslant 1\}$ — система сопряжённых между собой ортогональных идемпотентов. Тогда её можно дополнить до системы матричных единиц $\{f_{ij}\mid i,j\geqslant 1\}$ кольца $\mathrm{Mat}(S)$. Предложение доказано. □

Отметим два свойства построенной системы матричных единиц.

Свойство 1. *Для любого $A\in\mathrm{GL}(S)$ найдётся n (зависящее от A), такое что A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}f_{ii}$ и $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}e_{ii}$ при всех $k\geqslant n$.*

Доказательство. Обозначим матрицу $\mathrm{diag}[-1,-1,\ldots,-1,1,\ldots]$, где -1 встречается на диагонали ровно k раз, через $-1_{1\ldots k}$. Найдётся такое n, что для всех $k\geqslant n$ элемент A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}e_{ii}$. Следовательно, A коммутирует с $\varphi(-1_{1\ldots k})$ при всех $k\geqslant n$. Имеем

$$\varphi(-1_{1\ldots k})=\varphi\biggl(\prod_{i=1}^{k}(1-2e_{ii})\biggr)=\prod_{i=1}^{k}(1-2f_{ii})=1-2\biggl(\sum_{i=1}^{k}f_{ii}\biggr),$$

следовательно, A коммутирует с $f_{11}+\ldots+f_{kk}$ при всех $k\geqslant n$. □

Свойство 2. *Для любого $A\in\mathrm{GL}(S)$ найдётся n (зависящее от A), такое что A коммутирует со всеми f_{ii} и $\varphi^{-1}(A)e_{ii}=e_{ii}\varphi^{-1}(A)=e_{ii}$ при $i\geqslant n$.*

Доказательство легко следует из свойства 1.

Лемма 2. *Пусть $\{f_{ij}\mid i,j\geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения 3. Тогда если $A\in\mathrm{GL}(S)$ коммутирует со всеми f_{ij}, то $A=1$.*

Доказательство. Так как A коммутирует с $1-2f_{ii}$, $i\geqslant 1$, то $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $1-2e_{ii}$. Следовательно, $\varphi^{-1}(A)=\mathrm{diag}[a_1,a_2,\ldots]$.

Рассмотрим элементы $s'_{ij}=1-f_{ii}-f_{jj}+f_{ij}+f_{ji}$. Из определения f_{ij} вытекает, что $f_{ij}\in\mathrm{FMat}(S)$. Следовательно, $s'_{ij}\in\mathrm{GL}(S)$. Опишем $\varphi^{-1}(s'_{12})$. Так как s'_{12} коммутирует с f_{ii} при $i\geqslant 3$, то

$$\varphi^{-1}(s'_{12})=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 & \ldots\\ b_{21} & b_{22} & 0 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & b_3 & 0 & \ldots\\ 0 & 0 & 0 & b_4 & \ldots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Также $s'_{12}(1-2f_{11}) = (1-2f_{22})s'_{12}$. Значит,

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что $b_{11} = b_{22} = 0$. А так как ${s'_{12}}^2 = 1$, то $b_i^2 = 1$, $b_{12} = b_{21}^{-1}$. Проводя аналогичные рассуждения, получаем, что

$$\varphi^{-1}(s_{ij}) = \mathrm{diag}[b_1^{i,j}, b_2^{i,j}, \ldots] - b_i^{i,j} e_{ii} - b_j^{i,j} e_{jj} + b_{ij} e_{ij} + b_{ij}^{-1} e_{ji}.$$

Легко убедиться, что если диагональная матрица коммутирует со всеми матрицами $\varphi^{-1}(s'_{i,i+1})$, то элементы на её диагонали сопряжены. Следовательно, элементы a_i, $i \geqslant 1$, на диагонали $\varphi^{-1}(A)$ сопряжены. Но так как $\varphi^{-1}(A) \in \mathrm{GL}(R)$, то существует такое n, что $a_i = 1$ при $i \geqslant n$. Значит, A — единичная матрица. Лемма доказана. □

Лемма 3. *Пусть $\{f_{ij} \mid i,j \geqslant 1\}$ — система матричных единиц из предложения 3. Пусть*

$$S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}_\infty(S)f_{11} = f_{11}\mathrm{Mat}(S)f_{11}.$$

Если a — центральный элемент кольца S, то можно определить отображение $\alpha\colon \langle \mathrm{E}(S), a\cdot 1\rangle \to \mathrm{Mat}(S_1)$ со следующими свойствами:

1) *α — инъективный кольцевой гомоморфизм;*
2) *$\alpha(\langle \mathrm{E}(S)\rangle) = \langle \mathrm{E}(S_1)\rangle$, $\alpha\big(\mathrm{GL}(S)\big) = \mathrm{GL}(S_1)$, $\alpha\big(\mathrm{FMat}(S)\big) = \mathrm{FMat}(S_1)$;*
3) *если e_1 — центральный идемпотент кольца S_1, то найдётся e — центральный идемпотент кольца S, — такой что $\alpha(e\langle \mathrm{E}(S)\rangle) = e_1\langle \mathrm{E}(S_1)\rangle$ (элемент e выступает в качестве центрального элемента a при определении отображения α)*

(под $\langle\,\rangle$ подразумевается сложение и умножение элементов, а также взятие обратных элементов в случае их существования).

Доказательство. Так как $a \in Z(S)$, то $a\cdot 1$ коммутирует со всеми f_{ii}, $i \geqslant 1$. Следовательно, по свойству 2 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}(S), a\cdot 1\rangle$ существует такое n_1, что A коммутирует со всеми f_{ii} при $i \geqslant n_1$. В силу свойства 1 системы $\{f_{ij}\}$ для любого $A \in \langle \mathrm{E}(S), a\cdot 1\rangle$ существует такое n_2, что A коммутирует со всеми $\sum\limits_{i=1}^{k} f_{ii}$ при $k \geqslant n_2$.

Пусть $A = (a_{ij})$ — произвольный элемент из $\langle \mathrm{E}(S), a\cdot 1\rangle$. Определим отображение α по правилу $\alpha(A) = (f_{1i}Af_{j1})$. По доказанным выше свойствам получаем, что $(f_{1i}Af_{j1}) \in \mathrm{Mat}(S_1)$ и что построенное отображение α является гомоморфизмом колец. Покажем инъективность α. Пусть $\alpha(A) = 0$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii} A \sum_{i=1}^{n} f_{ii} = 0$$

для любого n. Значит, в силу доказанного выше для любых $p, l \geqslant 1$ найдётся такое k, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii} e_{1p} A e_{l2} \sum_{i=1}^{n} f_{ii} = 0$$

для всех $n \geqslant k$. Следовательно,

$$\sum_{i=1}^{n} f_{ii}(1 + a_{pl} e_{12}) \sum_{i=1}^{n} f_{ii} = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}, \quad n \geqslant k.$$

Тогда по свойству 1 системы $\{f_{ij}\}$ найдётся такое $k' \geqslant k$, что

$$1 + a_{pl} e_{12} = \sum_{i=1}^{n} f_{ii}(1 + a_{pl} e_{12}) \sum_{i=1}^{n} f_{ii} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right)(1 + a_{pl} e_{12})\left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right) = \\ = \sum_{i=1}^{n} f_{ii} + \left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right)(1 + a_{pl} e_{12})\left(1 - \sum_{i=1}^{n} f_{ii}\right)$$

при всех $n \geqslant k'$. Значит, $1 + a_{pl} e_{12}$ коммутирует со всеми f_{ij}, $i, j \geqslant 1$. Тогда по лемме 2 получаем, что $1 + a_{pl} e_{12} = 1$ и $a_{pl} = 0$. Значит, α — инъективное отображение.

Пусть $B \in \mathrm{GL}(S)$. Покажем, что $\alpha(B) \in \mathrm{GL}(S_1)$. Так как $\varphi^{-1}(B) \in \mathrm{GL}(R)$, то

$$\varphi^{-1}(B) = \begin{pmatrix} B_1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B_1 \in \mathrm{Mat}_{k-1}(R). \tag{15}$$

Значит, B коммутирует с f_{jj} при $j \geqslant k$. Следовательно,

$$\alpha(B) = \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B' \in \mathrm{Mat}_{k-1}(S_1).$$

Аналогично тому, как это сделано при доказательстве леммы 2, можно показать, что B коммутирует со всеми $1 - f_{ll} - f_{pp} + f_{lp} + f_{pl}$ при $l, p \geqslant k$. Следовательно,

$$\alpha(B) = \begin{pmatrix} B' & 0 & 0 & \dots \\ 0 & b & 0 & \dots \\ 0 & 0 & b & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad B' \in \mathrm{Mat}_{k-1}(S_1).$$

Покажем, что b — центральный элемент кольца S_1. Рассмотрим матрицу $C = 1 + f_{i1} c f_{1,i+1}$, $c \in f_{11} \mathrm{Mat}_\infty(S) f_{11}$, $i \geqslant k$. Легко убедиться, что C коммутирует с $1 - 2f_{jj}$, $1 - f_{j-1,j-1} - f_{j,j} + f_{j-1,j} + f_{j,j-1}$ при $1 \leqslant j < i$ и $j > i+1$, а также с $1 - f_{i-1,i-1} - f_{i+2,i+2} + f_{i-1,i+2} + f_{i+2,i-1}$. Следовательно, аналогично лемме 2 получаем, что

$$\varphi^{-1}(C) = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & \ddots & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ & & & x & y & & \\ & & & z & w & & \\ & & & & & 1 & \\ & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

(элемент x находится на месте (i,i), на пустых местах в матрице предполагаются нулевые элементы).

Учитывая (15), получаем, что $\varphi^{-1}(C)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(B)$. Значит, C коммутирует с B, следовательно, b коммутирует с c, т. е. $b \in Z(f_{11}\mathrm{Mat}_\infty(S)f_{11})$. Это в свою очередь означает, что $\mathrm{diag}[b,b,\ldots]$ — центральный элемент $\mathrm{Mat}(S_1)$.

Имеем

$$\mathrm{diag}[b,b,\ldots] = \begin{pmatrix} B'' & 0 & \ldots \\ 0 & b & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[b,\ldots,b] - B'' & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix},$$

причём

$$\begin{pmatrix} B'' & 0 & \ldots \\ 0 & b & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(S_1), \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[b,\ldots,b] - B'' & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \in \mathrm{FMat}(S_1).$$

Следовательно, $\mathrm{diag}[b,b,\ldots] \in \mathrm{GL}(S_1)$. Но так как $\mathrm{diag}[b,b,\ldots] \in Z\big(\mathrm{Mat}(S_1)\big)$, а $Z\big(\mathrm{GL}(S_1)\big)$ тривиален, то $\mathrm{diag}[b,b,\ldots] = 1$. Значит, $b = 1$ и $\alpha(B) \in \mathrm{GL}(S_1)$.

Очевидно, что $\mathrm{FMat}(S_1) \subseteq \alpha\big(\mathrm{FMat}(S)\big)$. Так как $\alpha\big(\mathrm{GL}(S)\big) \subseteq \mathrm{GL}(S_1)$, то $\alpha\big(\mathrm{FMat}(S)\big) \subseteq \mathrm{FMat}(S_1)$. Следовательно, $\mathrm{FMat}(S_1) = \alpha\big(\mathrm{FMat}(S)\big)$. Пусть $D \in \mathrm{GL}(S_1)$. Тогда $D - 1 \in \mathrm{FMat}(S_1)$. Имеем

$$D = D - 1 + 1 = \alpha(D') + \alpha(1) = \alpha(D' + 1),$$

где $D' \in \mathrm{FMat}(S)$. Также имеем

$$D^{-1} = D^{-1} - 1 + 1 = \alpha(D'') + \alpha(1) = \alpha(D'' + 1).$$

Значит,

$$1 = DD^{-1} = D^{-1}D = \alpha\big((D'+1)(D''+1)\big) = \alpha\big((D''+1)(D'+1)\big).$$

Учитывая инъективность α, получаем, что $D' + 1$ — обратимый элемент, следовательно, $D' + 1 \in \mathrm{GL}(S)$. Учитывая включение $\alpha\big(\mathrm{GL}(S)\big) \subseteq \mathrm{GL}(S_1)$, получаем, что $\alpha\big(\mathrm{GL}(S)\big) = \mathrm{GL}(S_1)$.

Пусть e_1 — центральный идемпотент S_1. Тогда

$$\mathrm{GL}(S_1) = \mathrm{GL}(S_1, e_1S_1) \times \mathrm{GL}(S_1, (1-e_1)S_1).$$

Следовательно,
$$\alpha^{-1}\big(\mathrm{GL}(S_1)\big) = \alpha^{-1}\big(\mathrm{GL}(S_1, e_1S_1)\big) \times \alpha^{-1}\big(\mathrm{GL}(S_1, (1-e_1)S_1)\big).$$
Значит, по лемме 1 существует e — центральный идемпотент кольца S, такой что
$$\begin{aligned}&\alpha^{-1}\big(\mathrm{GL}(S_1, e_1S_1)\big) = \mathrm{GL}(S, eS),\\ &\alpha^{-1}\big(\mathrm{GL}(S_1, (1-e_1)S_1)\big) = \mathrm{GL}(S, (1-e)S),\\ &S = eS \oplus (1-e)S.\end{aligned}$$
Получаем, что $\alpha\colon \langle e\cdot 1, \mathrm{E}(S)\rangle \to \mathrm{Mat}(S_1)$ — кольцевой мономорфизм, $\alpha(e\cdot 1)$ — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}(S_1)$. Легко убедиться, что $\alpha\big(\mathrm{FMat}(eS)\big) = \mathrm{FMat}(e_1S)$, $\alpha\Big(\mathrm{FMat}\big((1-e)S\big)\Big) = \mathrm{FMat}\big((1-e_1)S\big)$. Так как $eA_1 = A_1$, $eA_2 = 0$ для всех $A_1 \in \mathrm{FMat}(eS)$, $A_2 \in \mathrm{FMat}\big((1-e)S\big)$, то $\alpha(e\cdot 1)B_1 = B_1$, $\alpha(e\cdot 1)B_2 = 0$ для всех $B_1 \in \mathrm{FMat}(e_1S_1)$, $B_2 \in \mathrm{FMat}\big((1-e_1)S_1\big)$. Следовательно, $\alpha(e\cdot 1) = e_1\cdot 1$. Значит, $\alpha(e\langle \mathrm{E}(S)\rangle) = e_1\langle \mathrm{E}(S_1)\rangle$. Лемма доказана. □

Далее под матричной записью элементов из $\langle \mathrm{E}(S)\rangle$ мы будем подразумевать запись их образов при отображении α. Ясно, что
$$\alpha(f_{ii}af_{jj}) = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots\\ 0 & a_{ij} & 0 & \dots\\ 0 & \dots & 0 & \dots\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots\end{pmatrix},$$
где $a_{ij} = f_{1i}af_{j1}$. Для наглядности элементы $f_{ii}af_{jj}$ будем записывать как $a_{ij}f_{ij}$.

3. Доказательство основной теоремы

Шаг 1. Пусть $\{f_{ij}\}$ — система матричных единиц из предложения 1. Пусть $\{e'_{ii}\}$ — такая система матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ кольца $\mathrm{Mat}(R)$, что $e_{ii} = e'_{ii}$ для $i \geqslant 3$. Покажем, что
$$\varphi(1-2e'_{ii}) = 1 + x, \quad x \in (f_{11}+f_{22})\mathrm{Mat}(S)(f_{11}+f_{22}), \quad i = 1,2. \tag{16}$$

Доказательство. Несложно проверить, что для системы матричных единиц $\{e'_{ij}\}$ выполнено предложение 1 и мы имеем
$$\varphi(1-2e'_{ii}) = 1 - 2f'_{ii}, \tag{17}$$
причём $f'_{ii} = f_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Элементы $\varphi(1-2e'_{ii})$, $i = 1,2$, коммутируют с f_{jj}, $j \geqslant 3$. Тогда $\alpha\big(\varphi(1-2e'_{ii})\big)$, $i = 1,2$, коммутируют с $\alpha(f_{ii})$, $i \geqslant 3$. Следовательно, $\alpha\big(\varphi(1-2e'_{ii})\big)$, $i = 1,2$, коммутируют с $\alpha(f_{11}+f_{22})$. Но тогда $\varphi(1-2e'_{ii})$, $i = 1,2$, также коммутируют с $f_{11}+f_{22}$. Значит,
$$\begin{aligned}\varphi(1-2e'_{ii}) = 1 + e_i + d_i, \quad &e_i \in (f_{11}+f_{22})\mathrm{Mat}(S)(f_{11}+f_{22}),\\ &d_i \in \big(1-(f_{11}+f_{22})\big)\mathrm{Mat}(S)\big(1-(f_{11}+f_{22})\big).\end{aligned} \tag{18}$$

По (17) и (18) получаем, что

$$(\varphi(1-2e'_{ii})-1)(\varphi(1-2e_{jj})-1)=(e_i+d_i)2f_{jj}=2d_if_{jj}, \tag{19}$$

$$(\varphi(1-2e_{jj})-1)(\varphi(1-2e'_{ii})-1)=2f_{jj}(e_i+d_i)=2f_{jj}d_i, \quad j\geqslant 3. \tag{20}$$

Следовательно,

$$d_i=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \alpha_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_2 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{21}$$

С другой стороны,

$$(\varphi(1-2e'_{ii})-1)(\varphi(1-2e_{jj})-1)=2f'_{ii}2f'_{jj}=0. \tag{22}$$

Значит, $d_if_{jj}=f_{jj}d_i=0$ для всех $j\geqslant 3$, $i=1,2$. Но тогда по (21) получаем, что $d_i=0$. Утверждение шага 1 доказано. □

Шаг 2. Покажем, что в предложении 1 матричные единицы f_{ij} можно выбрать так, что

$$\varphi(s_{ij})=1-f_{ii}-f_{jj}+f_{ij}+f_{ji}. \tag{23}$$

Доказательство. Рассмотрим систему матричных единиц

$$\begin{aligned} e'_{11}&=\frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}-e_{12}-e_{21}),\\ e'_{22}&=\frac{1}{2}(e_{11}+e_{22}+e_{12}+e_{21}),\\ e'_{ii}&=e_{ii}, \quad i\geqslant 3. \end{aligned}$$

Тогда по шагу 1

$$\varphi(1-2e'_{11})=\varphi(s_{12})=1+x, \quad x\in(f_{11}+f_{22})\mathrm{Mat}(S)(f_{11}+f_{22}), \tag{24}$$

значит,

$$\varphi(s_{12})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как $s_{12}(1-2e_{11})=(1-2e_{22})s_{12}$, то

$$\varphi(s_{12})(1-2f_{11})=(1-2f_{22})\varphi(s_{12}). \tag{25}$$

Следовательно,

$$a_{11}=a_{22}=0. \tag{26}$$

Так как $s_{12}^2=1$, то

$$a_{21}=a_{12}^{-1}. \tag{27}$$

Значит,

$$\varphi(s_{12}) = 1 - f_{11} - f_{22} + a_1 f_{12} + a_1^{-1} f_{21}.$$

Сопрягая равенство (24) образами матриц s_{1i} и s_{2j} и проводя аналогичные рассуждения, мы получим, что

$$\varphi(s_{ij}) = 1 - f_{ii} - f_{jj} + a_{ij} f_{ij} + a_{ij}^{-1} f_{ji}. \tag{28}$$

В частности, при $j = i + 1$ получаем, что

$$\varphi(s_{i,i+1}) = 1 - f_{ii} - f_{i+1,i+1} + a_i f_{i,i+1} + a_i^{-1} f_{i+1,i}.$$

Положим $C = \mathrm{diag}[c_1, c_2, \ldots]$, где $c_1 = 1$, $c_{i+1} = a_1^{-1} \ldots a_i^{-1}$, $f'_{ij} = \alpha^{-1}(C\alpha(f_{ij})C^{-1})$. Тогда легко убедиться, что

$$f'_{i,i+1} = a_i f_{i,i+1}, f'_{ii} = f_{ii}. \tag{29}$$

Следовательно,

$$\varphi(s_{i,i+1}) = 1 - f'_{ii} - f'_{i+1,i+1} + f'_{i,i+1} + f'_{i+1,i}.$$

Тогда

$$\varphi(s_{ij}) = 1 - f'_{ii} - f'_{jj} + f'_{ij} + f'_{ji}, \tag{30}$$

так как любую транспозицию можно представить в виде произведения транспозиций вида $(i, i+1)$. Утверждение шага 2 доказано. □

Далее всюду в качестве матричных единиц $\{f_{ij}\}$ мы будем рассматривать матричные единицы, полученные на шаге 2.

Шаг 3. Докажем, что

$$\varphi(1 + re_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & \ldots \\ c_r & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Доказательство. Положим

$$e'_{ij} = \left(1 + \frac{1}{2} re_{12}\right) e_{ij} \left(1 - \frac{1}{2} re_{12}\right).$$

Тогда $\{e'_{ij}\}$ — система матричных единиц, такая что $e_{ii} = e'_{ii}$ при $i \geqslant 3$. Значит, по шагу 1 мы получаем, что

$$\varphi(1 - 2e'_{11}) = \varphi(1 - 2e_{11} + re_{12}) = 1 + x, \quad x \in (f_{11} + f_{22})\mathrm{Mat}(S)(f_{11} + f_{22}).$$

Следовательно,

$$\varphi(1 + re_{12}) = \varphi\big((1 - 2e'_{11})(1 - 2e_{11})\big) = (1 + x)(1 - 2f_{11}) = \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \ldots \\ c_r & d_r & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Так как $s_{23}(1+re_{12})s_{23}=1+re_{13}$, то

$$\varphi(1+re_{13})=$$
$$=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&0&1&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_r&b_r&0&0&\dots\\c_r&d_r&0&0&\dots\\0&0&1&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&0&1&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}a_r&0&b_r&0&\dots\\0&1&0&0&\dots\\c_r&0&d_r&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}. \tag{32}$$

Аналогично так как $s_{12}(1+re_{13})s_{12}=1+re_{23}$, то

$$\varphi(1+re_{23})=\begin{pmatrix}1&0&0&0&\dots\\0&a_r&b_r&0&\dots\\0&c_r&d_r&0&\dots\\0&0&0&1&\dots\\\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\ddots\end{pmatrix}. \tag{33}$$

Далее, имеем
$$(1+re_{12})(1+se_{13})=(1+se_{13})(1+re_{12}).$$

Следовательно,
$$\begin{pmatrix}a_r&b_r&0\\c_r&d_r&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_s&0&b_s\\0&1&0\\c_s&0&d_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_s&0&b_s\\0&1&0\\c_s&0&d_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_r&b_r&0\\c_r&d_r&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Приравнивая элементы на соответствующих местах, мы видим, что
$$b_r=a_sb_r,\quad c_r=c_ra_s,\quad c_rb_s=0 \text{ для всех } r,s\in R. \tag{34}$$

Аналогично из
$$(1+re_{13})(1+se_{23})=(1+se_{23})(1+re_{13})$$
получаем, что
$$\begin{pmatrix}a_r&0&b_r\\0&1&0\\c_r&0&d_r\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_s&b_s\\0&c_s&d_s\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&a_s&b_s\\0&c_s&d_s\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_r&0&b_r\\0&1&0\\c_r&0&d_r\end{pmatrix}.$$

Тогда
$$b_r=b_rd_s,\quad c_r=d_sc_r,\quad b_sc_r=0 \text{ для всех } r,s\in R. \tag{35}$$

Имеем
$$(1+re_{12})^{-1}=1-re_{12}=(1-2e_{11})(1+re_{12})(1-2e_{11}).$$

Значит,

$$\varphi(1-re_{12}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 & \dots \\ c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_r & -b_r & 0 & \dots \\ -c_r & d_r & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}. \tag{36}$$

Из $(1+re_{12})(1-re_{12}) = 1$ получаем, что

$$\begin{pmatrix} a_r & b_r \\ c_r & d_r \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & -b_r \\ -c_r & d_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Значит, из (34) и (35) следует, что

$$a_r^2 = d_r^2 = 1. \tag{37}$$

Выполнено равенство

$$1 + rse_{ij} = [1 + re_{ik}, 1 + se_{kj}] \quad \text{для попарно не равных} \quad i, j, k. \tag{38}$$

В частности, $1+re_{13} = [1+re_{12}, 1+se_{23}]$ и $\varphi(1+e_{13}) = [\varphi(1+e_{12}), \varphi(1+se_{23})]$. Запишем последнее равенство подробнее, пользуясь соотношениями (34), (35) и (37). Итак,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} a_r & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & d_r \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_r & -b_r & 0 \\ -c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r & 0 \\ c_r & d_r & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} a_r & -b_r a_1 & b_r b_1 \\ -c_r & d_r a_1 & d_r b_1 \\ 0 & -c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_r & b_r a_1 & b_r b_1 \\ c_r & d_r a_1 & d_r b_1 \\ 0 & c_1 & d_1 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - b_r a_1 c_r & b_r a_1 - b_r a_1 d_r a_1 & b_r b_1 - b_r a_1 d_r b_1 + b_r b_1 d_1 \\ -c_r + d_r a_1 c_r & d_r a_1 d_r a_1 & d_r a_1 d_r b_1 - d_r b_1 \\ -c_1 c_r & -c_1 d_r a_1 + d_1 c_1 & -c_1 d_r b_1 + 1 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{39}$$

Приравнивая элементы матриц на соответствующих местах, видим, что $a_r = 1 - b_r a_1 c_r$, $d_r = 1 - c_1 d_r b_1$. Значит, учитывая соотношения (34), (35), (37), получаем, что $1 = a_r^2 = a_r - b_r a_1 c_r a_r = a_r - b_r a_1 c_r$, откуда следует, что $a_r = 1 + b_r a_1 c_r$. Сравнивая с предыдущим равенством, видим, что $a_r = 1$. Аналогично $d_r = 1$. Утверждение шага 3 доказано. □

Шаг 4. Покажем, что $b_1^2 = b_1$ и $b_r = b_1 b_r = b_r b_1$.

Доказательство. Выполнено равенство

$$1 + e_{13} = [1 + e_{12}, 1 + e_{23}].$$

Следовательно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ c_1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & 0 \\ -c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & 0 \\ c_1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b_1 \\ 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 & -b_1 & b_1^2 \\ -c_1 & 1 & -b_1 \\ 0 & -c_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_1 & b_1^2 \\ c_1 & 1 & b_1 \\ 0 & c_1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_1^2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Приравнивая соответствующие элементы, получаем, что $b_1^2 = b_1$, $c_1^2 = -c_1$. Подставим в равенство (39) $a_r = a_1 = 1$, $d_r = d_1 = 1$. Тогда

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r \\ 0 & 1 & 0 \\ c_r & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r b_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_1 c_r & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{40}$$

значит, $b_r = b_r b_1$.

Аналогично из равенства $1 + re_{13} = [1 + e_{12}, 1 + re_{23}]$ выводим, что $b_r = b_1 b_r$. Утверждение шага 4 доказано. □

Рассмотрим элемент $e' = \mathrm{diag}[b_1, b_1, \ldots]$ и элементы $e_k = \mathrm{diag}[b_1, \ldots, b_1, 0 \ldots]$, где b_1 повторяется на диагонали k раз. Тогда элемент $1 - 2e_k$ содержится в $\mathrm{GL}(S)$ и коммутирует с $1 - 2f_{ii}$, $1 - f_{tt} - f_{jj} + f_{tj} + f_{jt}$ при $i \geqslant 1$, $1 \leqslant t, j \leqslant k$ и $t, j > k$. Тогда $\varphi^{-1}(1 - 2e_k)$ коммутирует с $1 - 2e_{ii}$ и с s_{tj} при $i \geqslant 1$, $1 \leqslant t, j \leqslant k$ и $t, j > k$. Следовательно, $\varphi^{-1}(1 - 2e_k)$ имеет вид $\mathrm{diag}[\alpha_k, \ldots, \alpha_k, 1 \ldots]$, где α_k повторяется на диагонали k раз. Выполнено равенство

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} \alpha_k & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & \alpha_k & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & r & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}\right) =$$
$$= \begin{pmatrix} 1 - 2b_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 - 2b_1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & 0 & \ldots \\ c_r & 1 & 0 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-2b_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1-2b_1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Это означает, что $1 - 2e_k = \mathrm{diag}[\alpha_k, \dots, \alpha_k, 1 \dots]$ коммутирует с $1 + re_{12}$ для любого $r \in R$ при $k \geqslant 2$. Следовательно, α_k — центральный элемент кольца R.

Покажем, что e' является центральным идемпотентом кольца $\mathrm{Mat}(S_1)$, $S_1 = f_{11}\mathrm{Mat}(S)f_{11}$. Пусть $A \in \mathrm{GL}(S)$. Тогда

$$\alpha(A) = \begin{pmatrix} A' & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A' \in \mathrm{GL}_{k_1}(f_{11}\mathrm{Mat}(S)f_{11}).$$

По определению группы $\mathrm{GL}(R)$

$$\varphi^{-1}(A) = \begin{pmatrix} A'' & 0 & \dots \\ 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}, \quad A'' \in \mathrm{GL}_{k_2}(R).$$

Положим $k_0 = \max\{k_1, k_2\}$. Тогда $\varphi^{-1}(1 - 2e_{k_0})$ коммутирует с $\varphi^{-1}(A)$, и следовательно, $1 - 2e_{k_0}$ коммутирует с A. Но последнее означает, что $1 - 2e'$ коммутирует с $\alpha(A)$, т. е. e' — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}(S_1)$.

Имеем $\mathrm{Mat}(S_1) = e'\mathrm{Mat}(S_1) \oplus (1 - e')\mathrm{Mat}(S_1)$. Мы знаем, что

$$\varphi(1 + re_{12}) = \begin{pmatrix} 1 & b_r & 0 & \dots \\ c_r & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}.$$

Определим отображения

$$\theta_3\colon R \to b_1 f_{11}\mathrm{Mat}(S)f_{11}b_1, \quad \theta_4\colon R \to (1 - b_1)f_{11}\mathrm{Mat}(S)f_{11}(1 - b_1)$$

по правилам

$$\theta_3(r) = b_r, \quad \theta_4(r) = -c_r.$$

Из равенства $1 + (r + s)e_{12} = (1 + re_{12})(1 + se_{12})$ ясно, что θ_3 и θ_4 сохраняют сложение. С помощью равенства $1 + rse_{13} = [1 + re_{12}, 1 + se_{23}]$ получаем (как раньше), что

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{rs} \\ 0 & 1 & 0 \\ c_{rs} & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_r b_s \\ 0 & 1 & 0 \\ -c_s c_r & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Следовательно, θ_3 — гомоморфизм колец, а θ_4 — антигомоморфизм колец, причём в силу равенства (30)

$$\varphi(1 + re_{ij}) = 1 + \theta_3(r)f_{ij} - \theta_4(r)f_{ij}. \tag{41}$$

Определим отображения

$$\theta_1\colon \langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to e'\langle \mathrm{GL}(S_1)\rangle, \quad \theta_2\colon \langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to (1-e')\langle \mathrm{GL}(S_1)\rangle$$

по правилам

$$\big(\theta_1(A)\big)_{ij} = \theta_3(a_{ij}), \quad \big(\theta_2(A)\big)_{ij} = \theta_4(a_{ji}).$$

Тогда θ_1 — гомоморфизм колец, θ_2 — антигомоморфизм колец. В силу (41) имеем $\alpha\big(\varphi(A)\big) = \theta_1(A) + \theta_2(A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}(R)$.

По лемме 3 найдётся e — центральный идемпотент кольца $\mathrm{Mat}(S)$, такой что $\alpha(e\langle \mathrm{GL}(S)\rangle) = e'\langle \mathrm{GL}(S_1)\rangle$. Ясно, что $\alpha\big((1-e)\langle \mathrm{GL}(S)\rangle\big) = (1-e')\langle \mathrm{GL}(S_1)\rangle$. Тогда отображения $\alpha^{-1}\circ\theta_1\colon \langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to e\langle \mathrm{GL}(S)\rangle$, $\alpha^{-1}\circ\theta_2\colon \langle \mathrm{GL}(R)\rangle \to (1-e)\langle \mathrm{GL}(S)\rangle$ также будут кольцевыми гомоморфизмом и антигомоморфизмом соответственно. В дальнейшем именно эти отображения мы будем называть θ_1 и θ_2 соответственно. Тогда будет выполнено равенство $\varphi(A) = \theta_1(A)+\theta_2(A^{-1})$ для всех $A \in \mathrm{E}(R)$.

Пусть $I, J \lhd S$ такие, что $\mathrm{Mat}(I) = e\mathrm{Mat}(S)$, $\mathrm{Mat}(J) = (1-e)\mathrm{Mat}(S)$. Тогда $I \oplus J = S$. Положим $M_1 = \varphi^{-1}\big(\mathrm{GL}(S, I)\big)$, $N_1 = \varphi^{-1}\big(\mathrm{GL}(S, J)\big)$. По лемме 1 получаем, что $M_1 = \mathrm{GL}(R, hR)$, $N_1 = \mathrm{GL}(R, (1-h)R)$, где h — центральный идемпотент кольца R. Пусть $B \in \mathrm{E}(R, hR)$. Тогда $\varphi(B) - 1 \in \mathrm{Mat}(I)$. Имеем $\varphi(A)-1 = \theta_1(A-1)+\theta_2(A^{-1}-1)$. Следовательно, $\theta_2(A^{-1}-1) = 0$. Это означает, что $hr \in \ker\theta_4$, откуда получается, что

$$\mathrm{Mat}(hR) \subseteq \ker\theta_2. \tag{42}$$

Аналогично

$$\mathrm{Mat}\big((1-h)R\big) \subseteq \ker\theta_1. \tag{43}$$

Покажем, что

$$\ker\theta_1 \cap \ker\theta_2 = \{0\}. \tag{44}$$

Действительно, пусть $A \in \ker\theta_1 \cap \ker\theta_2$ и a_{ij} — элемент, стоящий в A на месте (i, j). Тогда по (41)

$$\varphi(1 + a_{ij}e_{12}) = 1 + \theta_3(a_{ij})f_{12} - \theta_4(a_{ij})f_{21} = 1.$$

Следовательно, $a_{ij} = 0$. Таким образом, $A = 0$.

Из соотношений (42)—(44) следует, что $\ker\theta_1 = \mathrm{Mat}\big((1-h)R\big)$, $\ker\theta_2 = \mathrm{Mat}(hR)$, т. е. $\theta_1\colon \mathrm{Mat}(hR) \to \mathrm{Mat}(eS)$, $\theta_2\colon \mathrm{Mat}\big((1-h)R\big) \to \mathrm{Mat}\big((1-e)S\big)$ — инъективные отображения. Проводя аналогичные рассуждения для отображения φ^{-1}, получаем, что θ_1, θ_2 сюръективны, т. е. являются изоморфизмом и антиизоморфизмом колец соответственно. Теорема доказана.

Полученные при описании изоморфизма стабильных групп кольцевые изоморфизм и антиизоморфизм могут быть сами описаны при помощи основного результата работы [4].

Литература

[1] Голубчик И. З. Линейные группы над ассоциативными кольцами: Дис.... докт. физ.-мат. наук. — Уфа, 1997.

[2] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизмы полной линейной группы над ассоциативным кольцом // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1983. — № 3. — С. 61—72.

[3] Зельманов Е. И. Изоморфизмы линейных групп над ассоциативным кольцом // Сиб. мат. журн. — 1985. — Т. 26, № 4. — С. 49—67.

[4] Abrams G. Infinite matrix types which determine Morita equivalence // Arch. Math. — 1986. — Vol. 46, no. 1. — P. 33—37.

[5] Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups // Mem. Am. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 1—95.

[6] Li Fuan. Infinite Steinberg groups // Acta Math. Sinica. — 1994. — Vol. 10, no. 2. — P. 149—157.

[7] Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. — Berlin: Springer, 1989.

[8] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. I // Am. J. Math. — 1950. — Vol. 72. — P. 451—464.

[9] Schreier O., van der Waerden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — B. 6. — S. 303—322.

[10] Shi-Jian Yan. Linear groups over a ring // Chinese Math. — 1965. — Vol. 7, no. 2. — P. 163—179.