Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов

Е. А. БОНДАРЬ
Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: bondareug@gmail.com

Ю. В. ЖУЧОК
Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко, Украина
e-mail: zhuchok_y@mail.ru

УДК 512.53

Ключевые слова: представление, моноид, сильный эндоморфизм, n-однородный гиперграф, сплетение, регулярность, определяемость эндоморфизмами.

Аннотация

В работе описываются два точных представления моноида сильных эндоморфизмов произвольного конечного n-однородного гиперграфа. Доказано, что моноид сильных эндоморфизмов n-однородного конечного гиперграфа является регулярным. Найдены все целые неотрицательные числа n, при которых n-однородные гиперграфы определяются сильными эндоморфизмами.

Abstract

E. A. Bondar, Yu. V. Zhuchok, Representations of the strong endomorphism monoid of finite n-uniform hypergraphs, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 21—34.

In this paper, two exact representations of the strong endomorphism monoid of an arbitrary finite n-uniform hypergraph are described. It is proved that the strong endomorphism monoid of a finite n-uniform hypergraph is regular. We find all nonnegative integers n such that n-uniform hypergraphs are determined by their strong endomorphisms.

1. Введение

Одной из важных производных структур любой алгебраической системы является её полугруппа эндоморфизмов. Используя свойства полугруппы эндоморфизмов, можно эффективно изучать строение исходной системы. Изучению полугрупп эндоморфизмов гиперграфов и, в частности, графов посвящено множество работ (см., например, [6, 9, 14]), основное внимание в них уделяется вопросам определяемости гиперграфов их полугруппами эндоморфизмов, описанию абстрактных характеристик полугрупп эндоморфизмов гиперграфов,

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 21—34.

изучению алгебраических и комбинаторных свойств моноидов эндоморфизмов. Малоизученным при этом остаётся вопрос описания полугрупп эндоморфизмов гиперграфов заданного класса с точностью до изоморфизма.

После получения К. Кроном и Дж. Роудзом структурной теоремы для конечных моноидов в теории полугрупп начала активно использоваться конструкция сплетения и её различные модификации. Так, В. Флейшером [8] была введена конструкция сплетения моноида с малой категорией как обобщение сплетения моноидов, а в [12] эта конструкция была использована для описания точного представления моноида эндоморфизмов произвольного действия. В [13] У. Кнауэр и М. Нипорте доказали, что полугруппа сильных эндоморфизмов любого конечного неориентированного графа без кратных рёбер является сплетением группы с малой категорией. В [5] было доказано, что любая полугруппа эндоморфизмов свободного произведения полугрупп максимального w-класса изоморфна сплетению полугруппы преобразований и малой категории. Точные представления для графа отношения эквивалентности, а также для графа 2-нильпотентного бинарного отношения были описаны в [3,4]. В этой работе, используя конструкцию сплетения моноида с малой категорией, а также понятие глобальной надполугруппы, мы описываем представления моноида сильных эндоморфизмов произвольного конечного n-однородного гиперграфа.

Работа построена следующим образом. Во втором разделе приводятся все необходимые сведения и доказывается, что любой гиперграф заданного класса можно точно представить как обобщённое лексикографическое произведение некоторых гиперграфов. В третьем разделе доказывается, что полугруппа сильных эндоморфизмов любого конечного n-однородного гиперграфа может быть точно представлена как сплетение группы подстановок с малой категорией и как определённая подполугруппа некоторой глобальной полугруппы. Показано, что для конечных n-однородных гиперграфов моноид сильных эндоморфизмов является регулярным. В четвёртом разделе изучается вопрос об определяемости гиперграфов их полугруппами сильных эндоморфизмов.

2. Предварительные сведения

Пусть V — произвольное непустое множество, $\mathcal{E}$ — семейство непустых (необязательно различных) подмножеств из V. Пара $(V,\mathcal{E})$ называется гиперграфом с множеством вершин V и множеством рёбер $\mathcal{E}$.

Равные подмножества в $\mathcal{E}$ называются кратными рёбрами. Если вершина $x \in V$ принадлежит ребру $e \in \mathcal{E}$, говорят, что они инцидентны. Число вершин, инцидентных данному ребру $e \in \mathcal{E}$, называется степенью ребра e и обозначается $|e|$. Степенью $\rho(v)$ вершины $v \in V$ называется число рёбер, инцидентных вершине v.

Через H будем обозначать произвольный гиперграф $(V,\mathcal{E})$. Множество вершин и множество рёбер гиперграфа H будем обозначать через $V(H)$ и $\mathcal{E}(H)$

соответственно. Для удобства соотношение $\{x\} \in \mathcal{E}$ будем записывать в виде $x \in \mathcal{E}$.

Пусть n — целое неотрицательное число. Если в гиперграфе H нет кратных рёбер и степень любого ребра e равна n, то гиперграф H называется n-однородным [2].

Обозначим через C_n класс всех n-однородных гиперграфов.

Преобразование $\varphi\colon V \to V$ множества вершин гиперграфа $H \in C_n$ называется эндоморфизмом гиперграфа [7], если для любого $A \subseteq V$ из того, что $A \in \mathcal{E}$, следует, что $A\varphi \in \mathcal{E}$.

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H образует моноид относительно композиции преобразований и обозначается через $\operatorname{End} H$. Везде далее композиция отображений осуществляется слева направо.

Эндоморфизм $\varphi\colon V \to V$ гиперграфа $H \in C_n$ называется сильным эндоморфизмом гиперграфа, если для любого $A \subseteq V$, $|A| = n$, из того, что $A\varphi \in \mathcal{E}$, следует, что $A \in \mathcal{E}$.

Через $\operatorname{SEnd} H$ обозначим множество всех сильных эндоморфизмов гиперграфа H. Понятно, что $\operatorname{SEnd} H$ является подмоноидом моноида $\operatorname{End} H$.

Если ранг гиперграфа H не превышает 2, то определение эндоморфизма (сильного эндоморфизма) n-однородного гиперграфа совпадает с определением эндоморфизма (сильного эндоморфизма [13]) неориентированного графа.

Семейством связности $N(x)$ вершины x гиперграфа $H \in C_n$, $n \geqslant 2$, назовём семейство таких подмножеств $A \subseteq V$, что

$$|A| = n - 1, \quad A \cup \{x\} \in \mathcal{E}.$$

Ключевую роль при описании сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов играет следующая лемма.

Лемма 1. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n и $x, y \in H$. Сильный эндоморфизм f гиперграфа H, такой что $xf = yf$, существует в том и только в том случае, если выполняется одно из следующих условий*:

i) $n = 0$;

ii) $n = 1$, $\rho(x) = \rho(y)$;

iii) $n \geqslant 2$, $N(x) = N(y)$.

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{SEnd} H$ — такой сильный эндоморфизм, что $xf = yf$. Понятно, что n может быть равно 0. Если $n = 1$, то справедливы эквивалентности

$$x \in \mathcal{E} \iff xf = yf \in \mathcal{E} \iff y \in \mathcal{E},$$

откуда следует, что $\rho(x) = \rho(y)$.

Пусть $n \geqslant 2$ и $A \in N(x)$ — произвольный элемент. В этом случае справедливы эквивалентности

$$A \cup \{x\} \in \mathcal{E} \iff Af \cup \{xf\} = Af \cup \{yf\} \in \mathcal{E} \iff \\ \iff (A \cup \{y\})f \in \mathcal{E} \iff A \cup \{y\} \in \mathcal{E}.$$

Следовательно, $A \in N(y)$. Таким образом, $N(x) \subseteq N(y)$. Аналогично доказывается, что $N(y) \subseteq N(x)$.

Определим следующее преобразование гиперграфа H:

$$zf = \begin{cases} x, & \text{если } z = y, \\ z & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для всех $z \in V$. Если $n = 0$, то, очевидно, $f \in \mathrm{SEnd}\, H$.

Пусть выполняется условие ii) и $a \in V$. Равносильность

$$a \in \mathcal{E} \iff af \in \mathcal{E}$$

справедлива для $a = y$, поскольку $\rho(x) = \rho(y)$, и для $a \neq y$, так как в этом случае $af = a$. Следовательно, $f \in \mathrm{SEnd}\, H$.

Пусть теперь имеет место iii) и $e \subseteq V$ — произвольное n-элементное подмножество. Понятно, что если $y \notin e$, то из $e \in \mathcal{E}$ следует, что $ef = e \in \mathcal{E}$.

Если же $y \in e$, то $e = A \cup \{y\}$, и из условия $e \in \mathcal{E}$ получаем, что

$$ef = (A \cup \{y\})f = Af \cup \{yf\} = A \cup \{x\} \in \mathcal{E},$$

так как $A \in N(y) = N(x)$. Таким образом, f — эндоморфизм.

Пусть $ef \in \mathcal{E}$. Предположим, что $x \notin ef$. Тогда для любого $a \in ef$ справедливо равенство $af^{-1} = a$, следовательно, $e = ef \in \mathcal{E}$. Если $x \in ef$, то $ef = M \cup \{x\}$, где $M \in N(x)$, и возможны следующие случаи:

1) $e = M \cup \{x\} = ef \in \mathcal{E}$;
2) $e = M \cup \{y\} \in \mathcal{E}$, поскольку $N(x) = N(y)$;
3) $e = M \cup \{x, y\}$, что противоречит тому факту, что $H \in C_n$.

Следовательно, $f \in \mathrm{SEnd}\, H$. $\square$

Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n. Определим на H бинарное отношение ν, которое естественно возникает по лемме 1, по правилу

$$x \,\nu\, y \Longleftrightarrow N(x) = N(y),$$

если $n \geqslant 2$, и

$$x \,\nu\, y \Longleftrightarrow \rho(x) = \rho(y),$$

если $n \in \{0, 1\}$. Ясно, что ν — отношение эквивалентности. Через x_ν обозначается класс эквивалентности по ν, содержащий элемент x. Если $A \subseteq V$, то положим $A_\nu = \{a_\nu \mid a \in A\}$.

Напомним, что если $D = \{Y_i \mid i \in I\}$ — совокупность некоторых подмножеств данного множества X, то трансверсалью семейства D называется множество всех представителей, взятых в точности по одному из каждого подмножества Y_i, $i \in I$.

Через H/ν будем обозначать гиперграф, вершины которого состоят из классов эквивалентности x_ν, $x \in V$, а множество рёбер $\mathcal{E}(H/\nu)$ содержит A_ν, $A \subseteq V$, тогда и только тогда, когда некоторая трансверсаль семейства A_ν является ребром гиперграфа H. Полученный гиперграф назовём каноническим сильным фактор-гиперграфом гиперграфа H. Понятно, что если $A_\nu \in \mathcal{E}(H/\nu)$, то любая трансверсаль семейства A_ν является ребром гиперграфа H.

Пусть f — биективный эндоморфизм гиперграфа H. Если f^{-1} тоже эндоморфизм, то f называется автоморфизмом гиперграфа H. Группа всех автоморфизмов гиперграфа H обозначается $\operatorname{Aut} H$. Гиперграф H назовём S-неразложимым, если $\operatorname{SEnd} H = \operatorname{Aut} H$.

Для произвольных множеств A, B множество всех отображений из A в B будем обозначать $\operatorname{Map}(A, B)$. Если $f \in \operatorname{Map}(A, B)$ и $T \subseteq A$, то через $f|_T$ обозначается ограничение f на множество T.

Предложение 2. *Для каждого конечного гиперграфа H класса C_n канонический сильный фактор-гиперграф H/ν является S-неразложимым.*

Доказательство. Канонический сильный фактор-гиперграф 0-однородного гиперграфа является одноэлементным 0-однородным гиперграфом, а потому S-неразложимым. Пусть теперь $H \in C_n$, $n \geqslant 1$.

Понятно, что каждый автоморфизм гиперграфа H/ν является сильным эндоморфизмом из $\operatorname{SEnd} H/\nu$. Докажем обратное включение.

Пусть $\pi \in \operatorname{SEnd} H/\nu$ и

$$F_\pi = \{f\colon H \to H \mid f|_{x_\nu} \in \operatorname{Map}(x_\nu, x_\nu\pi) \text{ для всех } x \in H\}.$$

Зафиксируем некоторое $f \in F_\pi$ и возьмём $e = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$. Следует отметить, что если $e \in \mathcal{E}$ и $n \geqslant 2$, то все $x_1, \ldots, x_n$ принадлежат разным классам эквивалентности. Итак, для любого $n \geqslant 1$

$$\begin{aligned} e \in \mathcal{E} \iff \{(x_1)_\nu, \ldots, (x_n)_\nu\} \in \mathcal{E}(H/\nu) \iff \\ \iff \{(x_1)_\nu\pi, \ldots, (x_n)_\nu\pi\} \in \mathcal{E}(H/\nu) \iff \\ \iff \{x_1 f|_{(x_1)_\nu}, \ldots, x_n f|_{(x_n)_\nu}\} = ef \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, $F_\pi \subseteq \operatorname{SEnd} H$.

Предположим теперь, что для некоторых различных $x_\nu, y_\nu \in H/\nu$ выполняется $x_\nu\pi = y_\nu\pi = c_\nu$. Согласно определению множества F_π найдётся сильный эндоморфизм $f \in F_\pi$, для которого

$$\operatorname{im}(f|_{x_\nu}) = \operatorname{im}(f|_{y_\nu}) = \{c'\}, \quad c' \in c_\nu.$$

Тогда $f \in \operatorname{SEnd} H$ и $xf = yf$, откуда по лемме 1 получаем, что $x \;\nu\; y$, что противоречит предположению $x_\nu \neq y_\nu$. Следовательно, π инъективно. □

Обобщённым лексикографическим произведением $U[(Y_u)_{u \in U}]$ гиперграфа U и гиперграфов $(Y_u)_{u \in U}$ назовём гиперграф, у которого

$$V(U[(Y_u)_{u \in U}]) = \{(u, y_u) \mid u \in U,\ y_u \in Y_u\},$$

а подмножество $A \subseteq V(U[(Y_u)_{u \in U}])$ будет ребром тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:

1) $\operatorname{dom}(A) \in \mathcal{E}(U)$;
2) $\operatorname{dom}(A) = \{a\} \notin \mathcal{E}(U)$ и $\operatorname{im}(A) \in \mathcal{E}(Y_a)$.

Предложение 3. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n, $U = H/\nu$ — его канонический сильный фактор-гиперграф и Y_u, $u \in U$, — такие* 0*-однородные гиперграфы, что $|Y_u| = |u|$ для всех $u \in U$. Тогда*

$$H \cong U[(Y_u)_{u\in U}].$$

Доказательство. Для каждого $u \in U$ зафиксируем произвольную биекцию

$$\tau_u \colon u \to Y_u, \quad x \mapsto x\tau_u$$

и рассмотрим отображение

$$\psi \colon H \to U[(Y_u)_{u\in U}], \quad x \mapsto (x_\nu, x\tau_{x_\nu}).$$

Пусть $x, y \in H$ такие, что $x \neq y$. Если $(x, y) \notin \nu$, то $x_\nu \neq y_\nu$, и следовательно, $x\psi \neq y\psi$. Если $(x, y) \in \nu$, то в силу биективности τ_u, $u \in U$, справедливо соотношение $x\tau_{x_\nu} \neq y\tau_{x_\nu}$, и тогда $x\psi \neq y\psi$. Кроме того, для всякой пары $(u, y_u) \in U[(Y_u)_{u\in U}]$ ввиду сюръективности τ_u существует $t \in u$, такой что $t\tau_u = y_u$, т. е. $t\psi = (u, y_u)$.

Возьмём $A \subseteq V$. Принимая во внимание то, что Y_u, $u \in U$, — 0-однородные гиперграфы, имеем

$$A \in \mathcal{E} \iff A_\nu \in \mathcal{E}(U) \iff \{(x_\nu, x\tau_{x_\nu}) \mid x \in A\} = A\psi \in \mathcal{E}(U[(Y_u)_{u\in U}]). \quad \square$$

Далее будем отождествлять элементы гиперграфа H и соответствующие им пары из обобщённого лексикографического произведения $U[(Y_u)_{u\in U}]$.

3. Представления моноида сильных эндоморфизмов

Рассмотрим вначале, как устроены сильные эндоморфизмы конечных n-однородных гиперграфов.

Лемма 4. *Пусть $H = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n. Преобразование φ гиперграфа H будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$\varphi^* \colon U \to U, \quad x_\nu \mapsto (x\varphi)_\nu$$

является автоморфизмом гиперграфа U.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{SEnd}\, H$. Лемма, очевидно, справедлива при $n = 0$. Для $n \geqslant 1$ возьмём такие $x, y \in H$, что $x_\nu \neq y_\nu$. Если $n = 1$, то $\rho(x\varphi) = \rho(x) \neq \rho(y) = \rho(y\varphi)$, следовательно, $(x\varphi)_\nu \neq (y\varphi)_\nu$. Если $n > 1$, то семейства $N(x)$ и $N(y)$ различны. Следовательно, не теряя общности, мы можем считать, что в $N(x)$ найдётся элемент A, которого нет в $N(y)$. Тогда

$$(\{x\} \cup A)\varphi = \{x\varphi\} \cup A\varphi \in \mathcal{E},$$
$$(\{y\} \cup A)\varphi = \{y\varphi\} \cup A\varphi \notin \mathcal{E}.$$

Следовательно, $(x\varphi)_\nu \neq (y\varphi)_\nu$. Таким образом, φ при любом $n \geqslant 1$ отображает элементы из разных классов эквивалентности в элементы разных классов.

Значит, ввиду конечности гиперграфа H для любого класса $x_\nu \in U$ существует такой класс $y_\nu \in U$, что $x_\nu\varphi \subseteq y_\nu$. Следовательно, преобразование φ^* является корректно определённым и задаёт биекцию.

Пусть $A \subseteq H$. Справедливы следующие равносильности:

$$A_\nu \in \mathcal{E}(U) \iff A \in \mathcal{E}(H) \iff A\varphi \in \mathcal{E}(H) \iff (A\varphi)_\nu = A_\nu\varphi^* \in \mathcal{E}(U).$$

Таким образом, φ^* — автоморфизм гиперграфа U.

Пусть теперь преобразование φ гиперграфа H таково, что $\varphi^* \in \operatorname{Aut} U$. Тогда для любого $A \subseteq H$

$$A \in \mathcal{E}(H) \iff A_\nu \in \mathcal{E}(U) \iff (A_\nu)\varphi^* = (A\varphi)_\nu \in \mathcal{E}(U) \iff A\varphi \in \mathcal{E}(H). \quad \square$$

Пусть $\mathcal{C}$ — малая категория, R — моноид, который действует справа на множестве $X = \operatorname{Ob}\mathcal{C}$ объектов этой категории, и $M = \bigcup\limits_{x,y\in X} \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x,y)$ — множество всех морфизмов категории $\mathcal{C}$.

Положим

$$W = \{(r,f) \mid r \in R,\ f \in \operatorname{Map}(X,M),\ xf \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x,xr) \text{ для всех } x \in X\}$$

и для всех (r,f), $(p,g) \in W$ определим умножение

$$(r,f)(p,g) = (rp, fg_r),$$

где $x(fg_r) = xf(xr)g$ для всех $x \in X$ и $xf(xr)g$ — это композиция морфизмов xf и $(xr)g$ в категории $\mathcal{C}$. Заданная таким образом операция ассоциативна. Кроме того, в полугруппе W есть единица $(1,e)$, где элемент $e \in \operatorname{Map}(X,M)$ такой, что $xe \in \operatorname{Mor}_{\mathcal{C}}(x,x)$ — тождественный морфизм для любого объекта x из $\mathcal{C}$.

Моноид W с таким умножением называется сплетением моноида R с категорией $\mathcal{C}$ и обозначается $R \operatorname{wr} \mathcal{C}$. Данная конструкция является двойственной к конструкции, применяемой в [13], где умножение определялось по правилу

$$(r,f)(p,g) = (rp, f_pg),$$

а композиция отображений осуществлялась справа налево.

Пусть $H = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n. Определим малую категорию $\mathcal{K}$, полагая $\operatorname{Ob}\mathcal{K} = \{Y_u \mid u \in U\}$ и принимая для любых двух объектов $Y_u, Y_v \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}$ в качестве морфизмов $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(Y_u,Y_v)$ множество всех отображений из Y_u в Y_v. Тогда

$$\operatorname{Mor}\mathcal{K} = \bigcup_{u,v\in U} \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(Y_u,Y_v)$$

и группа $\operatorname{Aut} U$ действует справа на множестве объектов этой категории по правилу

$$Y_u\alpha = Y_{u\alpha}.$$

Таким образом, получаем сплетение

$$\operatorname{Aut} U \operatorname{wr} \mathcal{K} = \{(\alpha,f) \mid \alpha \in \operatorname{Aut} U,\ f \in \operatorname{Map}(\operatorname{Ob}\mathcal{K}, \operatorname{Mor}\mathcal{K}),\ Y_uf \in \operatorname{Map}(Y_u, Y_{u\alpha})\}.$$

Через f_u будем обозначать $Y_u f$, где $y_u f_u \in Y_{u\alpha}$ для всех $y_u \in Y_u$.

Одно из представлений моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов описывает следующая теорема.

Теорема 5. *Пусть $H = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n, $\mathcal{K}$ — малая категория, определённая выше. Тогда*

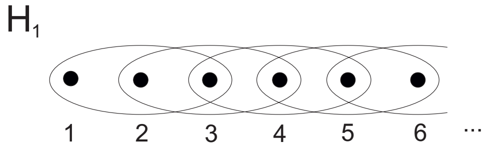
$$\mathrm{SEnd}\, H \cong \mathrm{Aut}\, U \,\mathrm{wr}\, \mathcal{K}. \tag{1}$$

Доказательство. Определим отображение ξ из моноида $\mathrm{SEnd}\, H$ в сплетение $\mathrm{Aut}\, U \,\mathrm{wr}\, \mathcal{K}$ по следующему правилу:

$$\xi\colon \varphi \mapsto (\varphi^*, f), \quad \text{где} \quad f\colon Y_u \mapsto \varphi|_{Y_u} \quad (u \in U).$$

Дальнейшее доказательство изоморфности отображения ξ аналогично соответствующему фрагменту доказательства теоремы 3.4 в [13]. □

Заметим, что для бесконечных гиперграфов лемма 4, на которой базируется теорема 5, неверна. Рассмотрим, например, бесконечный 3-однородный гиперграф, изображённый ниже.

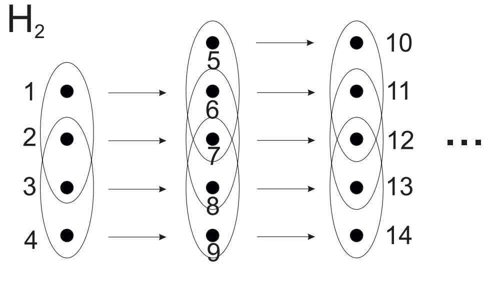


Пусть $\mathbb{N}$ — множество всех натуральных чисел. Для любого фиксированного $k \in \mathbb{N}$ преобразование

$$\alpha_k\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}, \quad n \mapsto n + k$$

является сильным эндоморфизмом гиперграфа H_1. При этом канонический сильный фактор-гиперграф H_1/ν изоморфен исходному гиперграфу H_1. Однако $\alpha_k^* \notin \mathrm{Aut}\, H_1/\nu$, так как $\{1, 2, \ldots, k\} \cap \mathrm{im}\, \alpha_k = \varnothing$.

Рассмотрим другой бесконечный 3-однородный гиперграф H_2.



Преобразование, действующее так, как показано на рисунке, является сильным эндоморфизмом этого гиперграфа. Понятно, что в точности две вершины имеют одинаковые семейства связности; это вершины 1 и 4, следовательно, они будут находиться в одном классе отношения эквивалентности ν. Таким образом, одному классу $\{1,4\}$ гиперграфа H_2/ν φ^* ставит в соответствие два различных класса: $\{6\}$ и $\{9\}$, т. е. φ^* не является преобразованием.

Рассмотрим другую конструкцию для описания точного представления полугруппы сильных эндоморфизмов $\operatorname{SEnd} H$.

Пусть $H = (V, E)$ — конечный гиперграф класса C_n, $U = H/\nu$ и $\mathcal{K}$ — малая категория, определённая выше. Положим $\operatorname{Mor}^0 \mathcal{K} = \operatorname{Mor} \mathcal{K} \cup \{0\}$, где $0 \notin \operatorname{Mor} \mathcal{K}$, и определим на этом множестве операцию

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi \circ \psi, & \varphi \neq 0 \neq \psi \text{ и композиция } \varphi \circ \psi \text{ определена}, \\ 0 & \text{в остальных случаях}, \end{cases}$$

где $\varphi \circ \psi$ — обычная композиция морфизмов.

Понятно, что множество $\operatorname{Mor}^0 \mathcal{K}$ — полугруппа относительно только что определённой операции, при этом с точностью до изоморфизма она содержится в полугруппе B_V всех бинарных отношений на множестве V.

Пусть T — произвольная полугруппа, $\operatorname{Gl}(T)$ — множество всех её подмножеств. Полагая

$$XY = \{xy \mid x \in X,\ y \in Y\}$$

для всех $X, Y \subseteq T$, получаем полугруппу на множестве $\operatorname{Gl}(T)$, которая называется глобальной надполугруппой полугруппы T.

Возьмём $A \in U$, $\xi \in \operatorname{Aut} U$ и положим

$$M^\xi = \bigcup_{A \in U} \operatorname{Map}(A, A\xi), \quad M = \bigcup_{\xi \in \operatorname{Aut} U} M^\xi, \quad M^0 = M \cup \{0\}.$$

Понятно, что M^0 — подполугруппа полугруппы $\operatorname{Mor}^0 \mathcal{K}$. Для разбиения

$$\{\operatorname{Map}(A, A\xi) \mid A \in H/\nu\} \cup \big\{\{0\}\big\}$$

множества $M^\xi \cup \{0\}$ обозначим через $T(M^\xi)$ множество всех его трансверсалей, а через $T(M^0)$ — объединение всех множеств $T(M^\xi)$, $\xi \in \operatorname{Aut} U$.

Лемма 6. *Множество $T(M^0)$ является подполугруппой глобальной надполугруппы $\operatorname{Gl}(M^0)$ полугруппы M^0.*

Доказательство. Пусть $A, B \in T(M^0)$. Поскольку

$$\{\operatorname{dom}(\eta) \mid \eta \in B,\ \eta \neq 0\} = H/\nu,$$

то для любого $\varphi \in A$, $\varphi \neq 0$, найдётся единственный элемент $\psi \in B$, $\psi \neq 0$, для которого $\operatorname{im}(\varphi) \subseteq \operatorname{dom}(\psi)$. Отсюда следует, что $\varphi\psi \neq 0$. При этом в тех случаях, когда φ то же самое, а $f \in B$ такое, что $f \neq \psi$, будем иметь $\varphi f = 0$.

Таким образом, учитывая, что $0 \in AB$ и

$$\{\operatorname{dom}(\eta) \mid \eta \in A,\ \eta \neq 0\} = H/\nu,$$
$$\operatorname{dom}(\varphi) = \operatorname{dom}(\varphi\psi), \quad \text{когда} \quad \varphi\psi \neq 0,$$

получаем, что $AB \in T(M^0)$. Следовательно, $T(M^0)$ — подполугруппа $\operatorname{Gl}(M^0)$. □

Представление моноида $\mathrm{SEnd}\, H$ унарными отношениями даёт следующая теорема.

Теорема 7. *Пусть $H = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n. Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{SEnd}\, H \cong T(M^0).$$

Доказательство. Согласно лемме 4 всякий сильный эндоморфизм φ принадлежит множеству

$$F_{\varphi^*} = \{f\colon H \to H \mid f|_{x_\nu} \in \mathrm{Map}(x_\nu, x_\nu\varphi^*) \text{ для всех } x \in H\}.$$

С другой стороны, для любого $\pi \in \mathrm{Aut}\, U$ имеем $F_\pi \subseteq \mathrm{SEnd}\, H$ (см. предложение 2). Таким образом,

$$\mathrm{SEnd}\, H = \bigcup_{\varphi^*\in \mathrm{Aut}\, U} F_{\varphi^*}.$$

Теперь можно установить изоморфное отображение ξ между полугруппами $\mathrm{SEnd}\, H$ и $T(M^0)$ по правилу

$$f\xi = \bigl\{f|_{x_\nu} : x \in H\bigr\} \cup \{0\}$$

для всех $f \in \mathrm{SEnd}\, H$. □

Напомним, что моноид T называется регулярным, если для любого $a \in T$ существует $b \in T$, такой что $a = aba$.

Хорошо известно, что полугруппа всех преобразований произвольного множества является регулярной. Однако не каждая подполугруппа полугруппы преобразований регулярна, поэтому естественным является вопрос о регулярности различных её подполугрупп (см., например, [10, 15]). Регулярность моноида сильных эндоморфизмов конечных неориентированных графов без кратных рёбер была показана в [13] и позднее в [11]. Используя теорему 7, можно установить регулярность моноида $\mathrm{SEnd}\, H$.

Теорема 8. *Для любого конечного гиперграфа $H = U[(Y_u)_{u\in U}]$ класса C_n моноид $\mathrm{SEnd}\, H$ является регулярным.*

Доказательство. Согласно теореме 7 имеет место изоморфизм $\mathrm{SEnd}\, H \cong$ $\cong T(M^0)$. Покажем, что полугруппа $T(M^0)$ регулярна. Если $A \in T(M^0)$ — произвольный элемент, то $A \in T(M^\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{Aut}\, U$. Понятно, что $T\bigl(M^{\alpha^{-1}}\bigr) \subseteq T(M^0)$. Пусть $B \in T\bigl(M^{\alpha^{-1}}\bigr)$ состоит из всех таких отображений $\mu\colon K \to K\alpha^{-1}$, $K \in U$, что

$$x\mu \in \begin{cases} x\eta^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}(\eta) \text{ для некоторого } \eta \in A,\\ K\alpha^{-1} & \text{в остальных случаях.}\end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $ABA = A$. □

Приведённые в примерах выше бесконечные гиперграфы H_1 и H_2 класса C_3 имеют нерегулярные моноиды сильных эндоморфизмов.

Действительно, рассмотрим, например, гиперграф H_1. Предположим, что для сильного эндоморфизма

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1+k & 2+k & 3+k & 4+k & \dots \end{pmatrix}$$

гиперграфа H_1 найдётся $f \in \mathrm{SEnd}\, H_1$, такой что $\alpha_k = \alpha_k f \alpha_k$. Тогда $n\alpha_k = n\alpha_k f \alpha_k$ для любого $n \in \mathbb{N}$, следовательно, $n + k = (n + k)f + k$, откуда получаем, что $n = (n + k)f$.

Для ребра $\{k, k+1, k+2\} \in \mathcal{E}$, с одной стороны, выполняется условие

$$\{k, k+1, k+2\}f = \{kf, 1, 2\} \in \mathcal{E},$$

поскольку f — эндоморфизм, откуда следует, что $kf = 3$. С другой стороны, так как f сильный и $\{k, k+4, k+5\}f = \{3, 4, 5\} \in \mathcal{E}$, имеем также соотношение $\{k, k+4, k+5\} \in \mathcal{E}$, что невозможно для любого натурального k.

4. Определяемость гиперграфов сильными эндоморфизмами

Напомним, что алгебраическая система S из некоторого класса Ω определяется её полугруппой эндоморфизмов в классе Ω, если для любой алгебраической системы $S' \in \Omega$ из того, что $\mathrm{End}\, S \cong \mathrm{End}\, S'$, следует, что $S \cong S'$. Будем говорить, что гиперграфы определяются их сильными эндоморфизмами в классе Θ, если для любых $X, Y \in \Theta$ из условия $\mathrm{SEnd}\, X \cong \mathrm{SEnd}\, Y$ следует, что $X \cong Y$.

Через $\mathrm{S}(X)$ будем обозначать симметрическую группу на множестве X.

Лемма 9. *Гиперграфы классов C_0 и C_1 определяются их сильными эндоморфизмами.*

Доказательство. Справедливость утверждения для гиперграфов класса C_0 очевидна. Пусть $X, Y \in C_1$ такие, что $|X| = n$, $|Y| = m$, и φ — изоморфизм полугрупп $\mathrm{SEnd}\, X$ и $\mathrm{SEnd}\, Y$. Если X — полный 1-однородный гиперграф (т. е. $|\mathcal{E}(X)| = n$), то, очевидно, $n = m$ и $X \cong Y$. Пусть $|\mathcal{E}(X)| = k < n$, $|\mathcal{E}(Y)| = l < m$. Тогда $|\,\mathrm{SEnd}\, X| = k!\,(n-k)^{n-k}$, $|\,\mathrm{SEnd}\, Y| = l!\,(m-l)^{m-l}$ и, следовательно,

$$k!\,(n-k)^{n-k} = l!\,(m-l)^{m-l}. \tag{2}$$

Пусть $X_l = \{x \mid x \in \mathcal{E}(X)\}$ и t — произвольный фиксированный элемент из $X \setminus X_l$, $\mu \in \mathrm{S}(X_l)$. Положим

$$x\alpha_\mu^t = \begin{cases} t, & \text{если } x \in X \setminus X_l, \\ x\mu, & \text{если } x \in X_l. \end{cases}$$

Очевидно, $\alpha_\mu^t \in \mathrm{SEnd}\, X$. Множества $I^t = \{\alpha_\mu^t \mid \mu \in \mathrm{S}(X_l)\}$, $t \in X \setminus \mathcal{E}(X)$, и только они образуют минимальные левые идеалы моноида $\mathrm{SEnd}\, X$. При этом такие идеалы попарно не пересекаются. Определим аналогично $Y_l = \{y \mid y \in \mathcal{E}(Y)\}$ и обозначим через J^s, $s \in Y \setminus Y_l$, минимальные левые идеалы моноида $\mathrm{SEnd}\,Y$. Поскольку $(\gamma I^t)\varphi = (\gamma\varphi)(I^t\varphi) = I^t\varphi$, каждый из идеалов I^t, $t \in X \setminus X_l$, под действием φ взаимно-однозначно отображается на некоторый идеал J^s, $s \in Y \setminus Y_l$. Построим биекцию $\psi\colon X \setminus X_l \to Y \setminus Y_l$ следующим образом: $t\psi = s$, если $I^t\varphi = J^s$. Тогда $n - k = m - l$, следовательно, из (2) вытекает, что $k = l$. Итак, $|X| = |Y|$, $|\mathcal{E}(X)| = |\mathcal{E}(Y)|$, а это и означает, что $X \cong Y$. В случае когда X и Y — бесконечные гиперграфы, изоморфизм $\mathrm{SEnd}\,X \cong \mathrm{SEnd}\,Y$ также влечёт $X \cong Y$. □

Естественно возникает вопрос: справедлива ли последняя лемма для произвольных n-однородных гиперграфов при $n \geqslant 2$? Имеет место следующая лемма.

Лемма 10. *Гиперграфы класса C_n, $n \geqslant 2$, не определяются их сильными эндоморфизмами.*

Доказательство. Пусть $n \geqslant 2$ и $\mathcal{P}_n$ — класс n-однородных гиперграфов $(V, \mathcal{E})$, у которых

$$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \quad \mathcal{E} = \bigl\{\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\} \mid 1 \leqslant i \leqslant k-n+1\bigr\}, \quad k \geqslant n+2.$$

Понятно, что никакие два гиперграфа класса $\mathcal{P}_n$ не изоморфны. Возьмём $H \in \mathcal{P}_n$ и предположим, что существуют такие $x_i, x_j \in H$, где $i < j$, и $(n-1)$-элементное подмножество $A \subseteq H$, что $\{x_i\} \cup A$, $A \cup \{x_j\} \in \mathcal{E}$. В этом случае A имеет вид $\{x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}\}$, $j = i + n$. Поскольку $k \geqslant 2$ и $|\{x_i, x_j\} \cup A\}| = n + 1$, то в H существует по крайней мере ещё один элемент: x_{i-1} или x_{j+1}. В первом случае $B = \{x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-2}\} \in N(x_i)$, но $B \notin N(x_j)$, а во втором $B = \{x_{i+2}, x_{i+3}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n+1}\} \in N(x_j)$, но $B \notin N(x_i)$. Таким образом, все классы в каноническом сильном фактор-гиперграфе H/ν одноэлементны и $H \cong H/\nu$. По предложению 2 гиперграф H является S-неразложимым и, кроме того, имеет в точности два автоморфизма:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_k & x_{k-1} & \ldots & x_1 \end{pmatrix}.$$

Итак, любые два гиперграфа класса $\mathcal{P}_n$ обладают изоморфными моноидами сильных эндоморфизмов и, как следствие, гиперграфы класса C_n не определяются сильными эндоморфизмами. □

Из лемм 9 и 10 непосредственно вытекает следующая теорема.

Теорема 11. *Пусть n — целое неотрицательное число. Гиперграфы класса C_n определяются сильными эндоморфизмами тогда и только тогда, когда $n = 0$ или $n = 1$.*

Следующий результат посвящён гиперграфам, которые определяются их сильными эндоморфизмами.

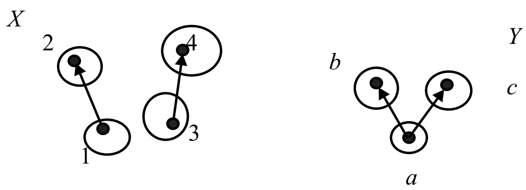
Предложение 12. *Пусть C — класс всех простых циклов. Любой простой цикл определяется его полугруппой сильных эндоморфизмов в классе C.*

Доказательство. Пусть A_n, $n \geqslant 3$, — произвольный простой цикл с n вершинами. Для цикла A_3 имеем $\mathrm{SEnd}\, A_3 = \mathrm{S}(A_3)$. Полугруппа $\mathrm{SEnd}\, A_n$, $n > 4$, изоморфна циклической подгруппе группы $\mathrm{S}(A_n)$, порождённой подстановкой

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & 1 & \dots & n-1 \end{pmatrix}.$$

При $n = 4$ получаем единственный граф из C, сильный фактор-граф которого содержит неоднoэлементные классы эквивалентности. В этом случае граф A_4 не является S-неразложимым. Полугруппа сильных эндоморфизмов такого графа не является циклической и не равна $\mathrm{S}(A_3)$. Таким образом, из условия $\mathrm{SEnd}\, A_n \cong \mathrm{SEnd}\, A_m$ следует, что $n = m$. □

Заметим, что для ориентированных графов сильные эндоморфизмы определяются так же, как и для неориентированных. Известно [1], что графы отношений квазипорядка определяются их полугруппами эндоморфизмов. Естественно возникает вопрос: будут ли определяться графы квазипорядков их полугруппами сильных эндоморфизмов? Как показывает следующий пример, не только графы квазипорядков, но даже графы порядков не определяются их полугруппой сильных эндоморфизмов.



Нетрудно заметить, что имеет место изоморфизм

$$\mathrm{SEnd}\, X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong$$

$$\cong \mathrm{SEnd}\, Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \right\},$$

в то время как сами графы X и Y не изоморфны.

Вместе с тем существуют подклассы класса графов всех отношений квазипорядка, которые определяются их сильными эндоморфизмами: класс всех тождественных отношений (т. е. отношений вида $i_X = \{(a; a) \mid a \in X\}$), класс всех универсальных отношений (прямых произведений $\omega_X = X \times X$), а также класс всех отношений неравенства (т. е. отношений вида $\omega_X \setminus i_X$).

Заметим, что граф любого отношения эквивалентности на произвольном множестве X можно рассматривать как объединение полного 1-однородного гиперграфа и некоторого 2-однородного гиперграфа, определённых на X. Для графа любой эквивалентности ρ на множестве X канонический сильный фактор-граф $(X, \rho)/\nu$ совпадает с полным 1-однородным гиперграфом на фактор-множестве

X/ρ, а моноид сильных эндоморфизмов графа $(X,\rho)/\nu$, очевидно, совпадает с моноидом $\mathrm{S}_{\mathrm{in}}(X/\rho)$ всех инъективных преобразований фактор-множества X/ρ. Более того, для эквивалентностей выполняется аналог теоремы 5: полугруппа $\mathrm{SEnd}(X,\rho)$, где ρ — эквивалентность на X, изоморфна сплетению $\mathrm{S}_{\mathrm{in}}(X/\rho)\ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}$ моноида $\mathrm{S}_{\mathrm{in}}(X/\rho)$ с подходящей малой категорией $\mathcal{K}$ (см. раздел 3). В конечном случае $\mathrm{S}_{\mathrm{in}}(X/\rho)$ и $\mathrm{S}(X/\rho)$ совпадают.

Литература

[1] Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований // Успехи мат. наук. — 1961. — Т. 16, № 5 (101). — С. 157—162.

[2] Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И. Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990.

[3] Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2007. — Вип. 3. — С. 22—26.

[4] Жучок Ю. В. Полугруппы эндоморфизмов 2-нильпотентных бинарных отношений // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 6. — С. 75—83.

[5] Жучок Ю. В. Полугруппы эндоморфизмов некоторых свободных произведений // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 3. — С. 51—60.

[6] Зыков А. А. Гиперграфы // Успехи мат. наук. — 1974. — Т. 29, № 6 (180). — С. 89—153.

[7] Решетников А. В. Об определениях гомоморфизма гиперграфов // Материалы X междунар. сем. «Дискретная математика и её приложения». — 2010. — С. 325—328.

[8] Флейшер В. О сплетении моноидов с категориями // Тр. Акад. наук ЭССР. — 1986. — Т. 35. — С. 237—243.

[9] Хворостухина Е. В. О гомоморфизмах полугрупп эндоморфизмов гиперграфов // Изв. Саратовск. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. — 2009. — Т. 9, вып. 3. — С. 71—75.

[10] Fan S. On End-regular graphs // Discrete Math. — 1996. — Vol. 159. — P. 95—102.

[11] Fan S. Graphs whose strong endomorphism monoids are regular // Arch. Math. — 1999. — Vol. 73. — P. 419—421.

[12] Fleischer V., Knauer U. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories // Semigroups, Theory and Applications. Proc. Conf. Oberwolfach/FRG 1986. — Berlin: Springer, 1988. — (Lect. Notes Math.; Vol. 1320). — P. 84—96.

[13] Knauer U., Nieporte M. Endomorphisms of graphs. I. The monoid of strong endomorphisms // Arch. Math. — 1989. — Vol. 52. — P. 607—614.

[14] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199.

[15] Wilkeit E. Graphs with a regular endomorphism monoid // Arch. Math. — 1996. — Vol. 66. — P. 344—352.