Нормализатор группы Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой

Е. И. БУНИНА, П. А. ВЕРЁВКИН
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: HelenBunina@yandex.ru

УДК 512.54

Ключевые слова: группа Шевалле, автоморфизм, нормализатор, локальное кольцо.

Аннотация

В данной работе мы доказываем, что каждый элемент линейной группы $\mathrm{GL}_{14}(R)$, нормализующий группу Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом R с необратимой двойкой, с точностью до коэффициента принадлежит самой группе Шевалле. Это позволяет уточнить классификацию автоморфизмов этой группы Шевалле, данную нами ранее, так как автоморфизм-сопряжение можно заменить на внутренний автоморфизм. Таким образом, доказано, что любой автоморфизм группы Шевалле типа G_2 над локальным кольцом с необратимой двойкой является композицией внутреннего и кольцевого автоморфизмов.

Abstract

E. I. Bunina, P. A. Veryovkin, Normalizers of Chevalley groups of type G_2 over local rings without $1/2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 57—62.

In this paper, we prove that every element of the linear group $\mathrm{GL}_{14}(R)$ normalizing the Chevalley group of type G_2 over a commutative local ring R without $1/2$ belongs to this group up to some multiplier. This allows us to improve our classification of automorphisms of these Chevalley groups showing that an automorphism-conjugation can be replaced by an inner automorphism. Therefore, it is proved that every automorphism of a Chevalley group of type G_2 over a local ring without $1/2$ is a composition of a ring and an inner automorphisms.

Введение

Данная работа является продолжением работы [3], доводящим результат упомянутой работы до окончательного вида.

Цель работы — доказать, что каждый автоморфизм групп Шевалле типа G_2 над коммутативным локальным кольцом с необратимой двойкой есть композиция кольцевого и внутреннего автоморфизмов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 57—62.

В работе мы следуем статьям Е. И. Буниной (в первую очередь статье [1]), в которых доказан такой же результат для групп Шевалле других типов.

Подобные результаты для групп Шевалле над полями были доказаны Р. Стейнбергом [17] для конечного случая и Дж. Хамфри [15] для бесконечного. Описанию автоморфизмов групп Шевалле над различными коммутативными кольцами были посвящены работы многих авторов, среди которых стоит отметить работы А. Бореля и Дж. Титса [6], Р. Картера и Ю Чена [9], Ю Чена [10—14], Э. Абе [5], А. Клячко [16].

Аналог предложения 1 и теоремы 2 для систем корней типов A_l, D_l и E_l был получен Е. И. Буниной в работе [2], где были полностью описаны автоморфизмы групп Шевалле данных типов над локальными кольцами с $1/2$. Подобный результат для локальных колец без $1/2$ был получен в [1]. В [7] Е. И. Буниной были доказаны аналогичные утверждения для системы корней F_4, а в [8] все предыдущие результаты с помощью метода локализации обобщены для случая присоединённых групп Шевалле на произвольные коммутативные кольца.

Суммируем все предыдущие результаты: автоморфизмы групп Шевалле над локальными кольцами были описаны для систем корней A_l ($l \geqslant 3$), D_l ($l \geqslant 4$), E_l ($l = 6, 7, 8$) без каких-либо дополнительных ограничений на кольцо, для систем F_4, B_l, C_l ($l \geqslant 2$), A_2 над кольцами с обратимой двойкой и для системы G_2 над кольцами с обратимыми двойкой и тройкой.

Благодаря результатам данной работы к списку групп Шевалле над локальными кольцами, автоморфизмы над которыми полностью описаны (и являются стандартными), присоединяются также группы Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой.

1. Определения и формулировка основной теоремы

Мы полностью следуем обозначениям и определениям работы [3].

Напомним, что R обозначает коммутативное локальное кольцо с единицей. В данной работе двойка в кольце необратимая (т. е. принадлежит радикалу кольца R).

Также напомним, что Φ — это система корней G_2, а $G(R) = G(\Phi, R)$ — группа Шевалле типа G_2 над кольцом R. Данная группа является присоединённой (у системы G_2 есть всего лишь одна решётка весов), над локальным кольцом она совпадает со своей элементарной подгруппой, порождённой всеми элементарными корневыми унипотентами $x_\alpha(t)$, $\alpha \in \Phi$, $t \in R$.

Присоединённое представление группы $G(R)$ 14-мерно, матрицы, представляющие элементы $x_\alpha(t)$, $w_\alpha(t)$, $h_\alpha(t)$ для простых корней, можно найти в приложении к работе [3].

Пусть V — пространство представления группы $G(R)$, $C \in \mathrm{GL}(V)$ — матрица, оставляющая группу Шевалле на месте:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Тогда отображение $x \mapsto CxC^{-1}$ из $G(R)$ в себя является автоморфизмом группы Шевалле. Этот автоморфизм обозначается i_C и называется *автоморфизмом-сопряжением* группы $G(R)$, *индуцированным элементом* C группы $\mathrm{GL}(V)$.

Основная теорема работы [3] заключалась в следующем.

Теорема 1. *Пусть $G(R) = G(\Phi, R)$ — группа Шевалле с системой корней типа G_2, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы $G(R)$ является композицией кольцевого автоморфизма и автоморфизма-сопряжения.*

Сформулируем основное предложение данной работы.

Предложение 1. *Пусть $G(R) = G(\Phi, R) \subset \mathrm{GL}_{14}(R)$ — группа Шевалле с системой корней типа G_2 в своём 14-мерном присоединённом представлении, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда нормализатор $G(R)$ в $\mathrm{GL}_{14}(R)$ — это $\lambda \cdot G(R)$.*

Из теоремы 1 и предложения 1 очевидно выводится теорема о строении автоморфизмов группы Шевалле $G(R)$.

Теорема 2. *Пусть $G(R) = G(\Phi, R)$ — группа Шевалле с системой корней типа G_2, R — коммутативное локальное кольцо с необратимой двойкой. Тогда любой автоморфизм группы $G(R)$ является композицией кольцевого и внутреннего автоморфизмов.*

2. Доказательство основного предложения

Пусть $C \in \mathrm{GL}_{14}(R)$ — матрица из нормализатора группы $G(R)$:

$$CG(R)C^{-1} = G(R).$$

Пусть J — максимальный идеал (радикал) кольца R. Тогда матрицы из $\mathrm{M}_{14}(J)$ образуют радикал в кольце матриц $\mathrm{M}_{14}(R)$, поэтому

$$C \cdot \mathrm{M}_{14}(J) \cdot C^{-1} = \mathrm{M}_{14}(J).$$

Следовательно,

$$C \cdot \big(E + \mathrm{M}_{14}(J)\big) \cdot C^{-1} = E + \mathrm{M}_{14}(J),$$

т. е.

$$C \cdot G(R, J) \cdot C^{-1} = G(R, J),$$

так как $G(R, J) = G(R) \cap \big(E + \mathrm{M}_{14}(J)\big)$. Значит, образ $\bar{C}$ матрицы C при факторизации кольца R по радикалу J даёт автоморфизм-сопряжение группы Шевалле $G(k)$, где $k = R/J$ — поле вычетов кольца R. Однако над полем характеристики, не равной 3, любой автоморфизм-сопряжение группы Шевалле типа G_2 является внутренним (см. [18]), поэтому сопряжение матрицей $\bar{C}$ (обозначим его через $i_{\bar{C}}$) есть i_g, $g \in G(k)$.

Так как над полем любой элемент группы Шевалле — произведение унипотентов $x_\alpha(t)$, то матрицу g можно разложить в произведение $x_{\alpha_{i_1}}(y_1)\ldots x_{i_N}(y_N)$, где $y_1,\ldots,y_N \in k$.

Поднимем элементы $y_1,\ldots,y_N \in k$ в кольцо R до элементов $Y_1,\ldots,Y_N \in k$ (любым способом). Тогда матрица

$$g' = x_{\alpha_{i_1}}(Y_1)\ldots x_{i_N}(Y_N)$$

будет удовлетворять условиям $g' \in G(R)$ и $\bar{g}' = g$.

Рассмотрим матрицу $C' = {g'}^{-1} \cdot C$. Эта матрица также нормализует группу Шевалле $G(R)$, при этом $\bar{C}' = E$. Таким образом, описание матриц из нормализатора группы $G(R)$ сведено к описанию матриц из нормализатора этой группы, сравнимых с единичной по модулю радикала J.

Далее будем считать, что матрица C сравнима с единичной по модулю радикала.

Для каждого корня $\alpha \in \Phi$ имеет место равенство

$$Cx_\alpha(1)C^{-1} = x_\alpha(1)\cdot g_\alpha, \quad g_\alpha \in G(R,J). \tag{1}$$

Любой элемент $g_\alpha \in G(R,J)$ можно разложить в произведение

$$t_{\alpha_1}(1+a_1)t_{\alpha_2}(1+a_2)x_{\alpha_1}(b_1)\ldots x_{\alpha_6}(b_6)x_{-\alpha_1}(c_1)\ldots x_{-\alpha_6}(c_6), \tag{2}$$

где $a_1,a_2,b_1,\ldots,b_6,c_1,\ldots,c_6 \in J$ (см., например, [4]).

Пусть $C = E + Z = E + (z_{i,j})$, где Z — матрица с элементами в радикале. Тогда для каждого корня $\alpha \in \Phi$ имеет место соотношение 1 с неизвестными $z_{i,j},a_1,a_2,b_1,\ldots,b_6,c_1,\ldots,c_6$, лежащими в радикале.

Нужно доказать, что $Z = rE$, $r \in J$. Однако это не обязательно так, потому что на этапе поднятия матрицы над полем вычетов до матрицы над локальным кольцом можно произвольно выбирать представителей классов вычетов. Устраним этот произвол дополнительным условием на матрицу Z. Именно, пусть

$$D = E + z_{1,1}E = (1+z_{1,1})E.$$

Положим $C_1 = D^{-1}C$. Тогда сопряжение матрицей C_1 даёт тот же автоморфизм, что и сопряжение матрицей C, при этом C_1 по-прежнему сравнима с C по модулю радикала, но для её радикальной части Z' выполнено равенство $Z'_{1,1} = 0$. Докажем теперь, что $Z' = 0$.

Для удобства обозначений будем считать, что матрица Z уже удовлетворяет условию $z_{1,1} = 0$.

Запишем соотношение 1 для корней, положительно порождающих всю систему, а именно α_1, α_2, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$. Каждое из таких соотношений будет иметь вид

$$\begin{aligned}(E+Z)x_\alpha(1) = x_\alpha(1)(E+a_1T_1+\ldots)(E+a_2T_2+\ldots)\times\\ \times(E+b_1X_{\alpha_1}+\ldots)\ldots(E+c_6X_{-\alpha_6}+\ldots)(E+Z),\end{aligned}$$

где X_α — соответствующий элемент алгебры Ли в присоединённом представлении,

$$T_1 = \mathrm{diag}[1, 0, 1, 2, 3, 3, -1, 0, -1, -2, -3, 0, 0],$$
$$T_2 = \mathrm{diag}[0, 1, 1, 1, 1, 2, 0, -1, -1, -1, -1, 2, 0, 0].$$

Тогда линеаризованное соотношение будет иметь вид

$$Zx_\alpha(1) - x_\alpha(1)(Z + a_1T_1 + a_2T_2 + b_1X_{\alpha_1} + \ldots + c_6X_{\alpha_6}) = 0.$$

Четыре соотношения такого вида для корней α_1, α_2, $-\alpha_1$, $-\alpha_2$ дадут систему полиномиальных уравнений с 251 радикальным неизвестным (мы имеем 195 неизвестных для элементов матрицы Z, а также по 14 неизвестных элементов $a_1, a_2, b_1, \ldots, b_6, c_1, \ldots, c_6$ на каждое из четырёх рассматриваемых уравнений). Эта система попадает под условие метода линеаризации для локальных колец, описанного в [3]. Решая её этим методом, получим $Z = 0$, $a_{i,j} = b_{i,j} = c_{i,j} = 0$ для всех допустимых комбинаций индексов, т. е. $C = E$, что и требовалось.

Таким образом, доказаны и предложение 1, и основная теорема 2.

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 47—80.

[2] Бунина Е. И. Автоморфизмы и нормализаторы групп Шевалле типов A_l, D_l, E_l над локальными кольцами с 1/2 // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 2. — С. 35—59. — arXiv:0907.5595.

[3] Бунина Е. И., Верёвкин П. А. Автоморфизмы групп Шевалле типа G_2 над локальными кольцами с необратимой двойкой // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 49—66.

[4] Abe E. Chevalley groups over local rings // Tôhoku Math. J. — 1969. — Vol. 21, no. 3. — P. 474—494.

[5] Abe E. Automorphisms of Chevalley groups over commutative rings // Algebra Anal. — 1993. — Vol. 5, no. 2. — P. 74—90.

[6] Borel A., Tits J. Homomorphismes «abstraits» de groupes algébriques simples // Ann. Math. — 1973. — Vol. 73. — P. 499—571.

[7] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of type F_4 over local rings with 1/2 // J. Algebra. — 2010. — Vol. 323. — P. 2270—2289. — arXiv:0907.5592.

[8] Bunina E. I. Automorphisms of Chevalley groups of different types over commutative rings // J. Algebra. — 2012. — Vol. 355, no. 1. — P. 154—170.

[9] Carter R. W., Chen Yu. Automorphisms of affine Kac—Moody groups and related Chevalley groups over rings // J. Algebra. — 1993. — Vol. 155. — P. 44—94.

[10] Chen Yu. Isomorphic Chevalley groups over integral domains // Rend. Sem. Mat. Univ. Padova. — 1994. — Vol. 92. — P. 231—237.

[11] Chen Yu. Automorphisms of simple Chevalley groups over $\mathbb{Q}$-algebras // Tôhoku Math. J. — 1995. — Vol. 348. — P. 81—97.

[12] Chen Yu. On representations of elementary subgroups of Chevalley groups over algebras // Proc. Amer. Math. Soc. — 1995. — Vol. 123, no. 8. — P. 2357—2361.

[13] Chen Yu. Isomorphisms of adjoint Chevalley groups over integral domains // Trans. Amer. Math. Soc. — 1996. — Vol. 348, no. 2. — P. 1—19.

[14] Chen Yu. Isomorphisms of Chevalley groups over algebras // J. Algebra. — 2000. — Vol. 226. — P. 719—741.

[15] Humphreys J. F. On the automorphisms of infinite Chevalley groups // Can. J. Math. — 1969. — Vol. 21. — P. 908—911.

[16] Klyachko A. A. Automorphisms and isomorphisms of Chevalley groups and algebras. — 2007. — arXiv:math/0708.2256v3.

[17] Steinberg R. Automorphisms of finite linear groups // Can. J. Math. — 1960. — Vol. 121. — P. 606—615.

[18] Steinberg R. Lectures on Chevalley Groups. — Yale Univ., 1967.