Почти примитивные элементы свободных алгебр Ли малых рангов

А. В. КЛИМАКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: andrey.klimakov@gmail.com

УДК 512.554

Ключевые слова: свободные алгебры Ли, примитивные элементы, почти примитивные элементы.

Аннотация

Пусть K — поле, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, $L(X)$ — свободная алгебра Ли над полем K с множеством X свободных образующих. А. Г. Курош доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны, А. И. Ширшов доказал, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны.

Подмножество M ненулевых элементов свободной алгебры $L(X)$ называется примитивным, если существует такое множество Y свободных образующих алгебры $L(X)$, $L(X) = L(Y)$, что $M \subseteq Y$ (при этом имеем $|Y| = |X| = n$). Были построены матричные критерии примитивности систем элементов свободных алгебр Ли, а также алгоритмы дополнения примитивных систем элементов до свободных порождающих множеств.

Ненулевой элемент u алгебры $L(X)$ называется почти примитивным элементом, если u не является примитивным элементом алгебры $L(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры H алгебры $L(X)$, содержащей элемент u. Были построены серии примеров почти примитивных элементов свободных алгебр Ли.

В данной работе получены критерии почти примитивности однородных элементов и построен алгоритм проверки почти примитивности однородных элементов в свободных алгебрах Ли ранга 2.

Abstract

A. V. Klimakov, Almost primitive elements of free Lie algebras of small ranks, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 63—74.

Let K be a field, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, and let $L(X)$ be the free Lie algebra over K with the set X of free generators. A. G. Kurosh proved that subalgebras of free nonassociative algebras are free, A. I. Shirshov proved that subalgebras of free Lie algebras are free.

A subset M of nonzero elements of the free Lie algebra $L(X)$ is said to be primitive if there is a set Y of free generators of $L(X)$, $L(X) = L(Y)$, such that $M \subseteq Y$ (in this case we have $|Y| = |X| = n$). Matrix criteria for a subset of elements of free Lie algebras to be primitive and algorithms to construct complements of primitive subsets of elements with respect to sets of free generators have been constructed.

A nonzero element u of the free Lie algebra $L(X)$ is said to be almost primitive if u is not a primitive element of the algebra $L(X)$, but u is a primitive element of any proper subalgebra of $L(X)$ that contains it. A series of almost primitive elements of free Lie algebras has been constructed.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 63—74.

In this paper, for free Lie algebras of rank 2 criteria for homogeneous elements to be almost primitive are obtained and algorithms to recognize homogeneous almost primitive elements are constructed.

1. Введение

Пусть K — поле, X — непустое конечное множество, $\Gamma(X)$ — свободный группоид неассоциативных одночленов без единичного элемента в алфавите X, $F(X)$ — свободная неассоциативная алгебра над полем K с множеством X свободных образующих. А. Г. Курош [4] доказал, что подалгебры свободных неассоциативных алгебр свободны.

Пусть I — двусторонний идеал алгебры $F(X)$, порождённый элементами $\{a^2,\ (ab)c + (bc)a + (ca)b \mid a, b, c \in F(X)\}$. Тогда фактор-алгебра $L(X) = F(X)/I$ — свободная алгебра Ли с множеством свободных порождающих X. Умножение в этой алгебре будем обозначать лиевым коммутантом $[\,,\,]$ и использовать запись в левонормированной форме: $[x, y, z] = \big[[x, y], z\big]$. А. И. Ширшов [6] доказал, что подалгебры свободных алгебр Ли свободны.

Предположим, что множество $\Gamma(X)$ упорядочено таким образом, что для $a, b \in \Gamma(X)$ если $\ell(a) > \ell(b)$, то $a > b$, где $\ell(a)$ — степень элемента a. Построим индуктивно множество W всех регулярных одночленов для алгебры $L(X)$: $X \subset W$; $w \in W$, если $w = [u, v]$, u и v — регулярные одночлены и $u > v$, если $u = [u_1, u_2]$, то $u_2 \leqslant v$. Тогда W — базис $L(X)$ как линейного пространства. Обозначим через W_X множество регулярных одночленов вида $[A, x]$, где $x \in X$ — одна из свободных порождающих, A — регулярный одночлен веса $\ell(A) > 1 = \ell(x)$, $W^m = \{w \in W \mid \ell(w) = m\}$, $W_X^m = W_X \cap W^m$, $\bar{W}_X = W \setminus W_X$, $\bar{W}_X^m = W^m \setminus W_X^m$. Единственное выражение элемента алгебры $a \in L(X)$ в виде линейной комбинации регулярных одночленов из W будем называть регулярным (каноническим) разложением и обозначать a_{can}. Степенью (весом, длиной) элемента a будем называть $\ell_X(a)$ — наибольшую степень одночленов из W, входящих в регулярное представление элемента a. Старшей частью элемента a будем называть a° — совокупность членов регулярного представления элемента a степени $\ell_X(a)$.

Подмножество M алгебры $L(X)$ называется независимым, если M — множество свободных образующих подалгебры $\operatorname{alg}\{M\} \subset L(X)$, порождённой подмножеством M. Подмножество $M = \{a_i\}$ ненулевых элементов алгебры $L(X)$ называется редуцированным, если для любого i старшая часть a_i° элемента a_i не принадлежит подалгебре алгебры $L(X)$, порождённой множеством $\{a_j^\circ \mid j \neq i\}$.

Пусть $S = \{s_\alpha \mid \alpha \in I\} \subseteq L(X)$. Отображение $\theta\colon S \to S' \subseteq L(X)$ называется элементарным преобразованием подмножества S, если либо θ — невырожденное линейное преобразование подмножества S, либо найдётся такое $\beta \in I$, что $\theta(s_\alpha) = s_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, $\alpha \neq \beta$, и

$$\theta(s_\beta) = s_\beta + f(\{s_\alpha \mid \alpha \neq \beta\}),$$

где f — элемент свободной алгебры $L(X)$ с множеством свободных образующих $Y = \{y_i \mid i \in I\}$, в котором сделана подстановка $y_i = s_i$ для всех $i \in I$.

Любое конечное множество элементов алгебры $L(X)$ может быть приведено к редуцированному множеству конечным числом элементарных преобразований и, возможно, исключением нулевых элементов, и всякое редуцированное подмножество алгебры $L(X)$ является независимым подмножеством. Кроме того, используя метод А. Г. Куроша, можно построить редуцированное множество образующих для всякой подалгебры алгебры $L(X)$. Следовательно, всякая подалгебра свободной алгебры Ли $L(X)$ является свободной (см. [6]). Кроме того, старшая часть многочлена от редуцированного множества является многочленом от старших частей элементов этого множества, группа автоморфизмов алгебры $L(X)$ конечного ранга ($|X| < \infty$) порождается элементарными автоморфизмами (см. также [7, 11]).

Элемент u алгебры $L(X)$ называется примитивным, если он является элементом некоторого множества свободных образующих алгебры $L(X)$. Подмножество M различных ненулевых элементов алгебры $L(X)$ называется примитивным, если существует такое множество Y свободных образующих алгебры $L(X)$, что $M \subseteq Y$. Если $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$, Y — множество свободных образующих алгебры F, то $|Y| = |X| = n$. Алгоритмы распознавания примитивных элементов были построены и реализованы в [1, 10] (см. также [11]).

Ненулевой элемент u алгебры $L(X)$ называется почти примитивным элементом, если u не является примитивным элементом алгебры $L(X)$, но является примитивным элементом любой собственной подалгебры H алгебры $L(X)$, содержащей элемент u ($u \in H$, $H \subseteq L(X)$, $0 \neq H \neq L(X)$). Изучение почти примитивных элементов свободных неассоциативных алгебр было начато в [9], новые серии почти примитивных элементов свободной алгебры Ли были построены в [8]. В [2, 3] были получены критерии и алгоритмы распознавания почти примитивных однородных элементов свободной неассоциативной, свободной неассоциативной (анти)коммутативной алгебр ранга 1 и 2.

В данной работе рассматриваются почти примитивные элементы малых весов в свободных алгебрах Ли $L(X)$ ранга 1 и 2. Получены критерии почти примитивности однородного элемента веса 3 и более (теорема 1), а также построены алгоритмы проверки почти примитивности однородных элементов произвольного веса в алгебрах Ли ранга 2.

2. Алгебры $L(x)$, $L(x, y)$

Отметим свойства примитивных элементов, которые нам понадобятся в дальнейшем.

Предложение 1. *Пусть $L(X)$ — свободная алгебра Ли с конечным множеством X свободных образующих, $\{h_1, \ldots, h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих собственной подалгебры H алгебры $L(X)$. Если элемент является примитивным в подалгебре H, то существует свободная образующая h_i*

подалгебры H, входящая линейно в его представление (см. [7, 11]). *Если существует свободная образующая h_i подалгебры H, входящая только линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H. Если существует свободная образующая h_i подалгебры H такого же веса, что и сам элемент, входящая линейно в представление элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H. Если существует свободная образующая h_i подалгебры H, старшая часть которой входит только линейно в представление старшей части элемента, то этот элемент является примитивным в подалгебре H.*

Предложение 2. *Пусть K — поле, $L(x)$ — свободная алгебра Ли над полем K с одной свободной образующей x. Тогда никакой элемент $u \in L(x)$ не является почти примитивным.*

Доказательство. Так как в алгебре $L(x)$ выполнено $[x,x] = 0$, то $L(x) = \{\lambda x \mid \lambda \in K\}$. Поскольку каждый ненулевой элемент алгебры $L(x)$ является примитивным, то он не может быть почти примитивным. □

Предложение 3. *Пусть $L(x,y)$ — свободная алгебра Ли над полем K со свободными образующими x, y. Тогда*

а) *любой элемент $u \in L(x,y)$ веса 2 является почти примитивным*;

б) *никакой однородный элемент $u \in L(x,y)$ веса 3 не является почти примитивным*;

в) *однородный элемент $u \in L(x,y)$ веса $\ell(u) = m > 3$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда не имеет места представление*

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha[C, z],$$

где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов веса $\ell(A_j) \geqslant 2$, $\ell(B_j) \geqslant 2$, $\ell(A_j) + \ell(B_j) = m$, C — однородный элемент веса $\ell(C) = m-1$, z — элемент веса $\ell(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля;

г) *всякий однородный элемент $u \in L(x,y)$ веса $\ell(u) = m \geqslant 3$ имеет регулярное разложение*

$$\begin{aligned}
u = u_{\mathrm{can}} &= \sum_{v_j \in \bar{W}^m_{\{x,y\}}} \gamma_j v_j + \sum_{m_i \in W^m_{\{x,y\}}} \beta_i m_i = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \sum_{m_i \in W^m_{\{x,y\}}} \beta_i m_i = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \left(\sum_{\gamma_{(x,t)} \neq 0} \gamma_{(x,t)} [\Lambda^t_x, x] + \sum_{\gamma_{(y,s)} \neq 0} \gamma_{(y,s)} [\Lambda^s_y, y] \right) = \\
&= \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] \right) + \left[\sum_{\gamma_{(x,t)} \neq 0} \gamma_{(x,t)} \Lambda^t_x, x \right] + \left[\sum_{\gamma_{(y,s)} \neq 0} \gamma_{(y,s)} \Lambda^s_y, y \right] =
\end{aligned}$$

$$= \left(\sum_{\gamma_j\neq 0}\gamma_j[\Phi_j,\Psi_j]\right) + \gamma_x[\Lambda_x,x] + \gamma_y[\Lambda_y,y] = u_{\Phi\Psi} + \tilde{u}, \tag{1}$$

где

$$\gamma_x\Lambda_x = \sum_{\gamma_{(x,t)}\neq 0}\gamma_{(x,t)}\Lambda_x^t, \quad \gamma_y\Lambda_y = \sum_{\gamma_{(y,s)}\neq 0}\gamma_{(y,s)}\Lambda_y^s,$$

$$u_{\Phi\Psi} = \sum_{\gamma_j\neq 0}\gamma_j[\Phi_j,\Psi_j], \quad \tilde{u} = \gamma_x[\Lambda_x,x] + \gamma_y[\Lambda_y,y]$$

(в случае $\ell(u) = 3$ предполагаем, что $u_{\Phi\Psi} = 0$, $u = \tilde{u}$); $[\Phi_j(x,y),\Psi_j(x,y)] \in \in W$ — регулярные одночлены с весами $\ell(\Phi_j) \geqslant 2$, $\ell(\Psi_j) \geqslant 2$, $\ell([\Phi_j(x,y),\Psi_j(x,y)]) = \ell(\Phi_j) + \ell(\Psi_j) = m$; $[\Lambda_x^t,x],[\Lambda_y^s,y] \in W_{\{x,y\}}$ — регулярные одночлены веса $\ell(\Lambda_x^t) = \ell(\Lambda_y^s) = m-1$; $\gamma_j,\gamma_{(x,t)},\gamma_{(y,s)},\gamma_x,\gamma_y \in K$ и хотя бы один из γ_j, $\gamma_{(x,t)}$, $\gamma_{(y,s)}$ отличен от нуля (эквивалентно, хотя бы один из γ_j, γ_x, γ_y отличен от нуля). В случае отсутствия второго или третьего слагаемого считаем, что $\gamma_x = 0$, $\Lambda_x = 0$ или $\gamma_y = 0$, $\Lambda_y = 0$ соответственно (в частности, если отсутствуют оба слагаемых, то $\tilde{u} = 0$). Тогда почти примитивность элемента u в алгебре $L(x,y)$ эквивалентна почти примитивности элемента $\tilde{u}$ в алгебре $L(x,y)$.

Доказательство. Пусть элемент u из пунктов а)—г) принадлежит конечно порождённой подалгебре $H \subseteq L(x,y)$, $x > y$, $\{h_1,\ldots,h_k\}$ — редуцированное множество свободных образующих подалгебры H.

Докажем утверждение а). Старшая часть u° любого элемента $u \in L(x,y)$ веса 2 имеет вид $u^\circ = \alpha[x,y]$, поэтому либо старшая часть некоторой свободной образующей h_i° подалгебры H входит линейно в представление u° и по предложению 1 элемент u является почти примитивным, либо $u^\circ = [h_i^\circ,h_j^\circ]$, следовательно, $h_i = x$, $h_j = y$, что противоречит тому, что подалгебра H собственная.

Докажем утверждение б). Любой однородный элемент $u \in L(x,y)$ веса 3 имеет каноническое представление

$$u = \alpha\big[[x,y],x\big] + \beta\big[[x,y],y\big] = \big[[x,y],\alpha x + \beta y\big],$$

где $\alpha,\beta \in K$ и хотя бы один из них отличен от нуля. Тогда u не является примитивным в собственной подалгебре $H = \mathrm{alg}\{\alpha x + \beta y,[x,y]\}$.

Докажем утверждение в). Пусть однородный элемент u не является примитивным в H. Тогда никакая старшая часть h_i° не входит линейно в представление u°. Так как $\ell(u^\circ) = \ell(u) = m > 3$, $\ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(u^\circ) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(u) > 1$ и среди $h_1\ldots,h_k$ не более одного элемента единичного веса, то элемент u имеет вид

$$u = u^\circ = \sum_{\lambda_j\neq 0}\lambda_j[A_j^\star(h_1,\ldots,h_k),B_j^\star(h_1,\ldots,h_k)] + \eta_t[C^\star(h_1,\ldots,h_k),h_t] =$$

$$= \sum_{\lambda_j\neq 0}\lambda_j[A_j^\star,B_j^\star] + \eta_t[C^\star,h_t],$$

где h_t — единственная свободная образующая подалгебры H единичного веса ($\ell_X(h_t) = 1$) или $\eta_t = 0$, $(A_j^\star, B_j^\star)$ — различные пары одночленов подалгебры H веса $\ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(A_j^\star) \geqslant 2$, $\ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(B_j^\star) \geqslant 2$, $\ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(A_j^\star) + \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(B_j^\star) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(u)$, $C^\star$ — однородный элемент алгебры H веса $\ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(C^\star) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(u) - 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \eta_t \in K$ отличен от нуля. Тогда в алгебре $\mathrm{alg}\{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\}$ существуют такие одночлены $\tilde{A}_j^\star = \tilde{A}_j^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$, $\tilde{B}_j^\star = \tilde{B}_j^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$ и однородный элемент $\tilde{C}^\star = \tilde{C}^\star(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$ с такими же весами $\ell_{\{h_1^\circ,\ldots,h_k^\circ\}}(\tilde{A}_j^\star) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(A_j^\star)$, $\ell_{\{h_1^\circ,\ldots,h_k^\circ\}}(\tilde{B}_j^\star) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(B_j^\star)$ и $\ell_{\{h_1^\circ,\ldots,h_k^\circ\}}(\tilde{C}^\star) = \ell_{\{h_1,\ldots,h_k\}}(C^\star)$, что

$$u = u^\circ = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [\tilde{A}_j^\star, \tilde{B}_j^\star] + \eta_t [\tilde{C}^\star, h_t].$$

Рассматривая новые элементы как элементы алгебры $L(x, y)$, получаем, что $\ell_X(\tilde{A}_j^\star) \geqslant 2$, $\ell_X(\tilde{B}_j^\star) \geqslant 2$, $\ell_X(\tilde{C}^\star) = m - 1$, $\ell_X(\tilde{A}_j^\star) + \ell_X(\tilde{B}_j^\star) = m$. Беря регулярные представления одночленов $\tilde{A}_j^\star$, $\tilde{B}_j^\star$, получаем искомое представление элемента u.

С другой стороны, элемент

$$u = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha [C, z],$$

где (A_j, B_j) — различные пары регулярных одночленов веса $\ell(A_j) \geqslant 2$, $\ell(B_j) \geqslant 2$, $\ell(A_j) + \ell(B_j) = m$, C — однородный элементы веса $\ell(C) = m - 1$, z — элемент веса $\ell(z) = 1$ и хотя бы один из коэффициентов $\lambda_j, \alpha \in K$ отличен от нуля, не является примитивным в подалгебре

$$H = \mathrm{alg}\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z\right\} \subsetneq L(x, y).$$

Действительно, приводя множество

$$\left\{\bigcup_j \{A_j, B_j\}, C, z\right\}$$

к редуцированному множеству M, получаем, что $\ell(h) < \ell(u)$ для всех $h \in M$. Следовательно, старшая часть свободной образующей подалгебры H не может входить линейно в представление однородного элемента u. По предложению 1 u не является примитивным элементом подалгебры H.

Докажем утверждение г). Если $\ell(u) = 3$, то $\tilde{u} = u$, поэтому свойство почти примитивности сохраняется. В случае когда $\tilde{u} = 0$, элемент u не является примитивным по пункту в). Пусть ненулевой элемент $\tilde{u}$ не является почти примитивным. Тогда по пункту в) имеет место представление

$$\tilde{u} = \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] + \alpha [C, z],$$

поэтому

$$u = u_{\Phi\Psi} + \tilde{u} = \left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j] + \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j]\right) + \alpha [C, z].$$

Следовательно, по пункту в) элемент u тоже не является почти примитивным.

Обратно, если элемент u не является почти примитивным, то по пункту в)

$$\left(\sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j]\right) + \tilde{u} = u = \left(\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j]\right) + \alpha [C, z].$$

Поэтому

$$\tilde{u} = \left(\sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j] - \sum_{\gamma_j \neq 0} \gamma_j [\Phi_j, \Psi_j]\right) + \alpha [C, z].$$

Значит, $\tilde{u}$ также не является почти примитивным. □

Теорема 1 (критерий почти примитивности однородного элемента в свободной алгебре Ли $L(x, y)$). *Однородный элемент $u \in L(x, y)$ веса $\ell(u) = m \geqslant 3$, имеющий вид* (1), *является почти примитивным тогда и только тогда, когда не существует решения уравнения*

$$u|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = \tilde{u} = \gamma_x [\Lambda_x, x] + \gamma_y [\Lambda_y, y] = [f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \tag{2}$$

относительно однородных переменных $f, l \in L(x, y)$ веса $\ell(f) = m - 1$, $\ell(l) = 1$ соответственно, где $a|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$ — проекция элемента a на линейное пространство с базисом $W_{\{x,y\}}$, т. е. линейная комбинация регулярных одночленов из $W_{\{x,y\}}$, входящих в регулярное представление a_{can} элемента a.

Доказательство. Так как для однородных элементов $f, l \in L(x, y)$ веса $\ell(f) = m - 1$, $\ell(l) = 1$ соответственно справедливо, что

$$[f, l] = [f, l]|_{\langle W^m\rangle} = [f, l]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle} + [f, l]|_{\langle \bar{W}^m_{\{x,y\}}\rangle},$$

где всякий регулярный одночлен $b \in \bar{W}^m_{\{x,y\}}$ имеет вид $b = [A, B]$, где A, B — регулярные одночлены веса больше 2 и $\ell(A) + \ell(B) = \ell(b) = m$, то уравнение

$$\tilde{u} = [f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle}$$

равносильно уравнению

$$\tilde{u} = [f, l] - [f, l]|_{\langle \bar{W}_{\{x,y\}}\rangle} = [f, l] + \sum_{\lambda_j \neq 0} \lambda_j [A_j, B_j].$$

Утверждение пункта в) предложения 3 завершает доказательство. □

Отметим, что в случае свободной неассоциативной, свободной неассоциативной (анти)коммутативной алгебр [2, 3] уравнение

$$\Lambda_x x + \Lambda_y y = fl|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = fl$$

имеет решение тогда и только тогда, когда существует такой коэффициент пропорциональности $\theta \in K$, что $\Lambda_x \overset{\theta}{\sim} \Lambda_y$ (т. е. $\Lambda_x = \theta\Lambda_y$ или $\theta\Lambda_x = \Lambda_y$). В лиевом случае за счёт тождества Якоби

$$[f,l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = [f,l]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$$

не обязательно совпадает с $[f,l]$, поэтому область значений параметров, при которых разрешимо уравнение (2) значительно шире. В качестве примеров рассмотрим элементы $u_{3,3}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^3(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^3$ и $u_{4,4}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^4(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^4$. В [8] было доказано, что элемент $u_{k,l}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^k(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^l$ является почти примитивным в алгебре $L(x,y)$ при $k,l \geqslant 2$, $k \neq l$.

Предложение 4. *Пусть $L(x,y)$ — свободная алгебра Ли над полем K. Тогда элемент*

$$u_{3,3}(x,y) = (\operatorname{ad} x)^3(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^3 = ([x,y])(\operatorname{Ad} x)^2 + ([x,y])(\operatorname{Ad} y)^2$$

является почти примитивным элементом в $L(x,y)$, если и только если в поле K не имеет решений уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$.

Доказательство. Пусть в левонормированной форме

$$\begin{aligned} f &= a[x,y,y] + b[x,y,x], \quad (a,b) \neq (0,0),\\ l &= \delta x + \alpha y, \quad (\delta,\alpha) \neq (0,0). \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} [f,l] = \delta a[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y] + \alpha b[x,y,y,x] = \\ = (\delta a + \alpha b)[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y]. \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} u_{3,3}(x,y) = [f,l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \iff [x,y,x,x] + [x,y,y,y] = \\ = (\delta a + \alpha b)[x,y,y,x] + \delta b[x,y,x,x] + \alpha a[x,y,y,y], \end{aligned}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\delta a + \alpha b = 0,\ \delta b = 1,\ \alpha a = 1 \iff \alpha^2 + \delta^2 = 0,\ b = \frac{1}{\delta},\ a = \frac{1}{\alpha}, \quad (\delta,\alpha) \neq (0,0).$$

Данная система имеет решение тогда и только тогда, когда в поле K разрешимо уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$. Поэтому элемент $u_{3,3}(x,y)$ является почти примитивным тогда и только тогда, когда для всех $\alpha \in K$ выполнено $\alpha^2 \neq -1$.

Если же уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$ разрешимо и i является его корнем, то при $\delta = 1$, $\alpha = -i$ получаем, что $a = i$, $b = 1$, поэтому для элемента $u_{3,3}(x,y)$, не являющегося почти примитивным, справедливо разложение

$$u_{3,3}(x,y) = [i[x,y,y] + [x,y,x], x - iy] = \Big[\big[[x,y], x + iy\big], x - iy\Big]. \qquad \square$$

Предложение 5. *Пусть $L(x, y)$ — свободная алгебра Ли над полем K. Тогда элемент*

$$u_{4,4}(x, y) = (\operatorname{ad} x)^4(y) + (x)(\operatorname{Ad} y)^4 = -([x, y])(\operatorname{Ad} x)^3 + ([x, y])(\operatorname{Ad} y)^3$$

не является почти примитивным в $L(x, y)$.

Доказательство. Пусть в левонормированной форме

$$f = a[x, y, x, x] + b[x, y, y, x] + c[x, y, y, y], \quad (a, b, c) \neq (0, 0, 0),$$
$$l = \delta x + \alpha y, \quad (\delta, \alpha) \neq (0, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned}[f, l] &= \delta a[x, y, x, x, x] + \delta b[x, y, y, x, x] + \delta c[x, y, y, y, x] + \\ &+ \alpha a[x, y, x, x, y] + \alpha b[x, y, y, x, y] + \alpha c[x, y, y, y, y] = \\ &= \delta a[x, y, x, x, x] + \delta b[x, y, y, x, x] + \delta c[x, y, y, y, x] + \\ &+ \alpha a\big(\big[[x, y, x], [x, y]\big] + [x, y, y, x, x]\big) + \alpha b\big(\big[[x, y, y], [x, y]\big] + [x, y, y, y, x]\big) + \\ &+ \alpha c[x, y, y, y, y].\end{aligned}$$

поэтому

$$\begin{aligned}[f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = \delta a[x, y, x, x, x] &+ (\delta b + \alpha a)[x, y, y, x, x] + \\ &+ (\delta c + \alpha b)[x, y, y, y, x] + \alpha c[x, y, y, y, y].\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}&u_{4,4}(x, y) = [f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} \iff \\ &\iff -[x, y, x, x, x] + [x, y, y, y, y] = \delta a[x, y, x, x, x] + (\delta b + \alpha a)[x, y, y, x, x] + \\ &+ (\delta c + \alpha b)[x, y, y, y, x] + \alpha c[x, y, y, y, y],\end{aligned}$$

что эквивалентно системе уравнений

$$\delta a = -1, \quad \alpha c = 1, \quad \delta b + \alpha a = 0, \quad \delta c + \alpha b = 0,$$

имеющей решение, например,

$$\delta = -1, \quad \alpha = 1, \quad a = b = c = 1.$$

Тогда представление для $u_{4,4}(x, y)$, не являющегося почти примитивным, выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned}u_{4,4}(x, y) &= [f, l]|_{\langle W_{\{x,y\}}\rangle} = [f, l] - \big(\alpha a\big[[x, y, x], [x, y]\big] + \alpha b\big[[x, y, y], [x, y]\big]\big) = \\ &= [f, l] - \big[[x, y, x] + [x, y, y], [x, y]\big] = [f, l] - \Big[\big[[x, y], x + y\big], [x, y]\Big] = [f, l] - [p, q],\end{aligned}$$

где

$$f = [x, y, x, x] + [x, y, y, x] + [x, y, y, y], \quad l = y - x, \quad p = [x, y, x] + [x, y, y], \quad q = [x, y].$$

Отметим, что множество $\{f, p, q, l\}$ является редуцированным множеством. □

Следствие. *Существует алгоритм, распознающий почти примитивные однородные элементы алгебры $L(x,y)$ над алгебраически замкнутым полем.*

Доказательство. Пусть элемент $u \in L(x,y)$ имеет вес $\ell(u) = m \geqslant 4$ (остальные случаи были разобраны в предложении 3). Пусть для каждого элемента $w \in W^{m-1}$ известны проекции $[w,x]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, $[w,y]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, т. е. найдены матрицы линейных операторов $\mathcal{A},\mathcal{B}\colon \langle W^{m-1}\rangle \to \langle W^m_{\{x,y\}}\rangle$, $\mathcal{A}(w) = (w)(\mathrm{Ad}\,x)|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$, $\mathcal{B}(w) = (w)(\mathrm{Ad}\,y)|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle}$ в базисе W_{m-1}. Тогда для

$$f = \sum_{w_j \in W^{m-1}} \lambda_j w_j, \quad l = \delta x + \alpha y,$$

где хотя бы одно из λ_j отлично от нуля и $(\delta,\alpha) \neq (0,0)$, выполнено

$$\begin{aligned}
&[f,l]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle} = [f, \delta x + \alpha y]|_{\langle W^m_{\{x,y\}}\rangle} = \\
&\quad = \delta\mathcal{A}(f) + \alpha\mathcal{B}(f) = \sum_{w_j \in W^{m-1}} \bigl(\delta\lambda_j\mathcal{A}(w_j) + \alpha\lambda_j\mathcal{B}(w_j)\bigr) = \\
&\quad = \sum_j \sum_{m_i \in W^m_{\{x,y\}}} \lambda_j(\delta a_{ij} m_i + \alpha b_{ij} m_i) = \sum_i \biggl(\sum_j \lambda_j(\delta a_{ij} + \alpha b_{ij})\biggr) m_i.
\end{aligned}$$

Таким образом, с учётом (1) уравнение (2) превращается в систему из $\mathfrak{L} = |W^m_{\{x,y\}}|$ уравнений

$$\Bigl\{\beta_i = \sum_j \lambda_j(\delta a_{ij} + \alpha b_{ij})\Bigr\}_i \iff \Bigl\{0 = \sum_j (a_{ij}\delta\lambda_j + b_{ij}\alpha\lambda_j) - \beta_i = g_i\Bigr\}_i \tag{3}$$

с неизвестными δ, α, λ_j. По теореме 3 элемент u будет почти примитивным тогда и только тогда, когда данная система не имеет решения. Если поле K алгебраически замкнутое, то система (3) не имеет решения тогда и только тогда, когда редуцированный базис Грёбнера идеала $I = \langle g_1, \ldots, g_{\mathfrak{L}}\rangle$, порождённого элементами g_i в кольце многочленов от $2 + |W^{m-1}_{\{x,y\}}|$ переменных, содержит единицу ($1 \in RG(I)$), что алгоритмически проверяется его вычислением. $\square$

Если $1 \in RG(I)$, то элемент u будет почти примитивным независимо от алгебраической замкнутости поля K.

Теорема 2. *Пусть $n > 2$, $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$.*

1. *Пусть элемент $u \in L(X)$ не является примитивным элементом в $L(X)$, но старшая часть u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре $u^\circ \in H^\circ \subsetneq L(X)$, порождённой однородными образующими. Тогда элемент u является почти примитивным элементом в $L(X)$.*
2. *В обратную сторону утверждение 1 верно для однородных элементов.*
3. *В $L(x,y)$ над полем K, в котором уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$ не имеет решения, существует неоднородный элемент, для которого в обратную сторону утверждение 1 неверно.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Пусть элемент u не является почти примитивным. Тогда существует собственная подалгебра $H = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\}$ с редуцированным множеством свободных образующих, в которой элемент u не является примитивным. Рассмотрим подалгебру $H^\circ = \operatorname{alg}\{h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ\} \subset L(X)$ с редуцированным множеством свободных образующих и покажем, что в ней элемент u° не является примитивным. Во-первых, подалгебра H° является собственной, так как существует такой элемент v единичного веса, что $v \notin H$, следовательно, $v \notin H^\circ$. Во-вторых, так как $u \in H$, то $u = f(h_1, \ldots, h_k)$, но тогда существует такой элемент g, что $u^\circ = g(h_1^\circ, \ldots, h_k^\circ)$, значит, $u^\circ \in H^\circ$. Наконец, u° не является примитивным в H°, так как в противном случае существует старшая часть h_j°, входящая линейно в представление элемента u°, но тогда образующая h_j входит только линейно в представление элемента u в подалгебре H, а значит, u является примитивным элементом подалгебры H по предложению 1. Но по условию теоремы элемент u° является примитивным элементом в любой собственной подалгебре, порождённой однородными образующими, а значит, примитивен в подалгебре H°. Противоречие.

Утверждение 2 очевидно.

Докажем утверждение 3. Рассмотрим элемент $u = \big[[x, y], y\big] + x$. Элемент $u^\circ = \big[[x, y], y\big]$ не является примитивным в $\operatorname{alg}\{[x, y], y\}$. Пусть u принадлежит алгебре $H = \operatorname{alg}\{h_1, \ldots, h_k\} \subsetneq L(X)$ с редуцированным множеством свободных образующих $\{h_1, \ldots, h_k\}$. Тогда если никакая старшая часть h_i° не входит линейно в u, то без ограничения общности возможны два случая. В первом случае, когда $h_1^\circ = [x, y]$, $h_2^\circ = y$, имеем $h_1 = [x, y] + \alpha x + \beta y$, $h_2 = y$. Тогда $H \ni u' = [h_1 - \beta h_2, h_2] - u - \alpha(h_1 - \beta h_2) = -(\alpha^2 + 1)x$. Так как в поле K уравнение $\alpha^2 + 1 = 0$ не имеет решения, то $u' \neq 0$. Значит, $\{x, y\} \subset H$, поэтому $H = L(x, y)$. Во втором случае, когда $\big[[h_1^\circ, h_2^\circ], h_3^\circ\big] = \big[[x, y], y\big]$, имеем $h_1 = x$, $h_2 = y$, поэтому $H = L(x, y)$. Противоречие. Следовательно, u является примитивным элементом в H, а значит, почти примитивным элементом в $L(x, y)$. □

Литература

[1] Золотых А. А., Михалёв А. А. Ранг элемента свободной (p-)суперало Ли // Докл. РАН. — 1994. — Т. 334, № 6. — С. 690—693.

[2] Климаков А. В. Почти примитивные элементы свободных неассоциативных (анти)коммутативных алгебр малых рангов // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2012. — № 5. — С. 19—24.

[3] Климаков А. В., Михалёв А. А. Почти примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр малых рангов // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 127—141.

[4] Курош А. Г. Неассоциативные свободные алгебры и свободные произведения алгебр // Мат. сб. — 1947. — Т. 20. — С. 239—262.

[5] Михалёв А. А., Михалёв А. В., Чеповский А. А., Шампаньер К. Примитивные элементы свободных неассоциативных алгебр // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 171—192.

[6] Ширшов А. И. Подалгебры свободных лиевых алгебр // Мат. сб. — 1953. — Т. 33, № 2. — С. 441—452.

[7] Mikhalev A. A., Shpilrain V., Yu J.-T. Combinatorial Methods. Free Groups, Polynomials, and Free Algebras. — Berlin: Springer, 2004.

[8] Mikhalev A. A., Umirbaev U. U., Yu J.-T. Generic, almost primitive and test elements of free Lie algebras // Proc. Am. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130, no. 5. — P. 1303—1310.

[9] Mikhalev A. A., Yu J.-T. Primitive, almost primitive, test, and Δ-primitive elements of free algebras with the Nielsen—Schreier property // J. Algebra. — 2000. — Vol. 228. — P. 603—623.

[10] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Rank and primitivity of elements of free color Lie (p-)superalgebras // Int. J. Algebra Comput. — 1994. — Vol. 4. — P. 617—656.

[11] Mikhalev A. A., Zolotykh A. A. Combinatorial Aspects of Lie Superalgebras. — Boca Raton: CRC Press, 1995.