Подгруппы групп Шевалле и кольца Ли, определяемые набором аддитивных подгрупп основного кольца

В. А. КОЙБАЕВ
Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова,
Южный математический институт ВНЦ РАН
e-mail: koibaev-K1@yandex.ru

Я. Н. НУЖИН
Сибирский федеральный университет
e-mail: nuzhin2008@rambler.ru

УДК 512.5

Ключевые слова: группа и алгебра Шевалле, элементарная сеть, ковёр аддитивных подгрупп, кольцо Ли.

Аннотация

Авторы статьи предлагают обзор своих результатов, касающихся элементарных сетей, ковров, элементарных сетевых подгрупп, ковровых подгрупп и ковровых колец Ли, и ставят ряд вопросов.

Abstract

V. A. Koibaev, Ya. N. Nuzhin, Subgroups of the Chevalley groups and Lie rings definable by a collection of additive subgroups of the initial ring, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 75—84.

The paper provides an overview of the authors' results on nets, carpets, elementary net subgroups, carpet subgroups, and carpet Lie rings. Some open questions are also formulated.

1. Введение

Наборы подмножеств (идеалов, аддитивных подгрупп и др.)

$$\mathfrak{S} = \{\mathfrak{S}_{ij} \colon 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$

определённого ассоциативного кольца с условиями

$$\mathfrak{S}_{ir}\mathfrak{S}_{rj} \subseteq \mathfrak{S}_{ij}, \quad 1 \leqslant i, r, j \leqslant n,$$

возникали при решении различных задач. Такие наборы назывались коврами или сетями, а связанные с ними кольца и группы — ковровыми, сетевыми, обобщёнными конгруэнц-подгруппами. Авторы настоящей статьи принадлежат различным алгебраическим школам, использующим разные термины. Работая в одном направлении, авторы попытались объединить свои усилия в решении задач, а потому в работе используются оба термина (при этом в случае специальной линейной группы чаще используется термины «элементарная сеть» и «элементарная сетевая группа»). Понятия ковра и ковровой подгруппы были перенесены на группы Шевалле с различными модификациями и названиями (см., например, [8]).

В статье даётся обзор результатов авторов [2—4, 8, 9], касающихся собственно элементарных сетей, ковров, элементарных сетевых групп, ковровых подгрупп и ковровых колец Ли, которые инспирированы вопросами В. М. Левчука о допустимости элементарного ковра, и ставится ряд новых вопросов.

2. Обозначения и определения

Далее Φ — приведённая неразложимая система корней ранга l, $E(\Phi, K)$ — элементарная группа Шевалле типа Φ над коммутативным кольцом K с единицей. Группа $E(\Phi, K)$ порождается своими корневыми подгруппами

$$x_r(K) = \{x_r(t)\colon t \in K\}, \quad r \in \Phi.$$

Подгруппы $x_r(K)$ абелевы, и для каждого $r \in \Phi$ и любых $t, u \in K$ справедливы соотношения

$$x_r(t)\, x_r(u) = x_r(t+u). \tag{2.1}$$

Назовём (*элементарным*) *ковром типа* Φ *ранга* l *над* K всякий набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \colon r \in \Phi\}$$

кольца K с условием

$$C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i \mathfrak{A}_s^j \subseteq \mathfrak{A}_{ir+js}, \quad r, s, ir+js \in \Phi, \quad i, j > 0, \tag{2.2}$$

где

$$\mathfrak{A}_r^i = \{a^i \colon a \in \mathfrak{A}_r\},$$

а константы $C_{ij,rs} = \pm 1, \pm 2, \pm 3$ определяются коммутаторной формулой Шевалле

$$[x_s(u), x_r(t)] = \prod_{i,j>0} x_{ir+js}(C_{ij,rs}(-t)^i u^j), \quad r, s, ir+js \in \Phi. \tag{2.3}$$

Здесь и далее $[x, y] = x^{-1}y^{-1}xy$.

Всякий ковёр $\mathfrak{A}$ типа Φ над K определяет *ковровую* подгруппу

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r) \colon r \in \Phi \rangle$$

группы Шевалле $E(\Phi, K)$, где $\langle M \rangle$ — подгруппа, порождённая множеством M.

Ковёр $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K называется *допустимым*, если его ковровая подгруппа $E(\Phi,\mathfrak{A})$ не имеет новых корневых элементов, т. е.

$$E(\Phi,\mathfrak{A}) \cap x_r(K) = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi.$$

Данные определения ковра и ковровой подгруппы для групп Шевалле и допустимого ковра принадлежат В. М. Левчуку (другие определения и их связи можно найти, например, в [8]).

В случае специальной линейной группы $\mathrm{SL}(n,K)$ (при $\Phi = A_{n-1}$) *элементарная сеть степени* n (элементарный ковёр ранга $n-1$) — это набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \colon 1 \leqslant i \neq j \leqslant n\}$$

кольца K с условием

$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad i \neq r \neq j.$$

Элементарная сетевая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ — это подгруппа группы $\mathrm{SL}(n,K)$, порождённая трансвекциями $t_{ij}(u)$, $u \in \mathfrak{A}_{ij}$, $1 \leqslant i \neq j \leqslant n$. Элементарная сеть называется *допустимой*, если

$$\mathfrak{A}_{ij} = \{u \in K \colon t_{ij}(u) \in E(\mathfrak{A})\}.$$

В. М. Левчук с перерывом в 20 лет записал в Коуровской тетради два следующих вопроса.

Вопрос 2.1 (см. [5, вопрос 7.28, 1982 г.]). Какие условия на ковёр $\mathfrak{A}$ (в терминах $\mathfrak{A}_r$) над коммутативным кольцом K необходимы и достаточны для того, чтобы ковёр $\mathfrak{A}$ был допустимым?

Вопрос 2.2 (см. [5, вопрос 15.46, 2002 г.]). Верно ли, что для допустимости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ над полем K необходима и достаточна допустимость его подковров $\{\mathfrak{A}_r, \mathfrak{A}_{-r}\}$, $r \in \Phi$, ранга 1?

В пользу положительного ответа на вопрос 2.2 свидетельствует тот факт, что соотношения (2.1), коммутаторная формула Шевалле (2.3), из которой происходит условие ковровости (2.2), и соотношения в группах $\langle X_r, X_{-r}\rangle$, $r \in \Phi$, составляют полную систему определяющих соотношений универсальной группы Шевалле над полем [10, § 6, теорема 8]. Отметим также, что в случае локально конечного поля K в [7] получен положительный ответ на вопрос 2.2.

3. Замкнутые элементарные сети

В [3] предлагается следующий подход к понятию допустимости. По элементарной сети

$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \colon 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\}$$

определим новую сеть

$$\bar{\mathfrak{A}} = \{\bar{\mathfrak{A}}_{ij} \colon 1 \leqslant i,j \leqslant n,\ i \neq j\},$$

где
$$\bar{\mathfrak{A}}_{ij} = \{u \in K \colon t_{ij}(u) \in E(\mathfrak{A})\},$$
и назовём её *замыканием* сети $\mathfrak{A}$.

Теорема 3.1 [3]. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{T}$ — элементарные сети. Операция замыкания обладает следующими свойствами (замыкания в топологическом пространстве):*

1) $\mathfrak{A} \subseteq \bar{\mathfrak{A}}$; $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T} \Longrightarrow \bar{\mathfrak{A}} \subseteq \bar{\mathfrak{T}}$; $\bar{\mathfrak{A}} = \bar{\bar{\mathfrak{A}}}$; $\overline{\mathfrak{A} \cap \mathfrak{T}} \subseteq \bar{\mathfrak{A}} \cap \bar{\mathfrak{T}}$;
2) *пересечение замкнутых сетей является замкнутой сетью;*
3) *если $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{T}$ и $\mathfrak{T}$ — замкнутая сеть, то $\mathfrak{A} \subseteq \bar{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{T}$, в частности, $\bar{\mathfrak{A}}$ — наименьшая замкнутая сеть, содержащая $\mathfrak{A}$;*
4) *множество замкнутых сетей является структурой (подструктурой всех элементарных сетей), содержащей структуру всех дополняемых сетей.*

Мы называем элементарную сеть
$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \colon 1 \leqslant i, j \leqslant n,\ i \neq j\}$$
дополняемой до полной сети
$$\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_{ij} \colon 1 \leqslant i, j \leqslant n\}$$
или, кратко, *дополняемой*, если можно доопределить диагональные множества $\mathfrak{A}_{ii}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, так, чтобы
$$\mathfrak{A}_{ir}\mathfrak{A}_{rj} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leqslant i, r, j \leqslant n.$$
Хорошо известно, что элементарная сеть дополняется до полной сети тогда и только тогда, когда
$$\mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}\mathfrak{A}_{ij} \subseteq \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i \neq j$$
(см., например, [1, с. 25] или [6, лемма 6]). Это дополнение можно получить, положив
$$\mathfrak{A}_{ii} = \sum_{\substack{j=1,\\ j\neq i}}^{n} \mathfrak{A}_{ij}\mathfrak{A}_{ji}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n,$$
и в этом случае множество матриц вида
$$e + \sum_{i,j=1}^{n} \mathfrak{A}_{ij} e_{ij}$$
является полугруппой относительно матричного умножения, где e — единичная матрица, e_{ij} — матрица, у которой на позиции (i, j) стоит 1, а на остальных местах 0. Элементарная сетевая подгруппа $E(\mathfrak{A})$ порождается трансвекциями
$$t_{ij}(u) = e + ue_{ij}, \quad u \in \mathfrak{A}_{ij}, \quad 1 \leqslant i, j \leqslant n, \quad i \neq j.$$
Поэтому дополняемая сеть является замкнутой сетью, и следовательно, для подмножеств элементарных сетей справедлива следующая цепочка включений:
$$\{\text{дополняемые сети}\} \subseteq \{\text{замкнутые сети}\} \subseteq \{\text{все сети}\}. \qquad (3.1)$$

Очевидно, любая пара аддитивных подгрупп основного кольца определяет элементарную сеть степени 2. С помощью примеров сетей степени 2 легко установить, что оба включения (3.1) являются строгими (см., например, [9]). Однако примеры сетей степени $n \geqslant 3$ со всеми ненулевыми аддитивными подгруппами $\mathfrak{A}_{ij}$, разделяющие три множества из цепочки (3.1), построить не так просто. Такие примеры приведены в [3]. Здесь мы лишь укажем такой пример замкнутой, но не дополняемой элементарной сети.

Пример 3.2 [3]. Пусть F — поле из двух элементов и

$$F(x) = \left\{ \frac{f}{g} : f, g \in F[x] \right\} -$$

поле рациональных функций с коэффициентами из F. Рассмотрим подкольцо

$$R = \left\{ \frac{f}{g} \in F(x) : \deg g - \deg f \geqslant 4 \right\},$$

где $\deg f$ — степень многочлена f, и аддитивную подгруппу

$$B = \frac{F}{x} + R.$$

Определим элементарную сеть $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A}_{ij})$ степени n над полем $F(x)$. Положим $\mathfrak{A}_{12} = \mathfrak{A}_{21} = B$ и $\mathfrak{A}_{ij} = R$ для остальных пар (i,j). Сеть $\mathfrak{A}$ наглядно можно представить следующей таблицей:

$$\begin{pmatrix} * & B & R & \dots & R \\ B & * & R & \dots & R \\ R & R & * & \dots & R \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ R & R & R & \dots & * \end{pmatrix}.$$

Так как $RB \subseteq R$ и $R^2 \subset R \subset B$, то $\mathfrak{A}$ — элементарная сеть. В [3] доказано, что $\mathfrak{A}$ является замкнутой, но не дополняемой элементарной сетью.

Отметим, что мы не знаем ответа на следующий вопрос.

Вопрос 3.3. Существует ли замкнутая, но недополняемая сеть степени $n \geqslant 3$ над кольцом характеристики, не равной 2, все аддитивные подгруппы которой ненулевые?

Так же как и в SL-случае, по произвольному ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ вводим новый набор аддитивных подгрупп

$$\bar{\mathfrak{A}} = \{\bar{\mathfrak{A}}_r : r \in \Phi\},$$

где

$$\bar{\mathfrak{A}}_r = \{t \in K : x_r(t) \in E(\Phi, \mathfrak{A})\},$$

и называем его *замыканием* ковра $\mathfrak{A}$. Ковёр $\mathfrak{A}$ назовём *замкнутым*, если $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}$.

Очевидно, определения допустимости и замкнутости эквивалентны, но, на наш взгляд, термин «замкнутый ковёр» лучше отражает суть определения.

Для ковров типа $\Phi = B_l$ $(l \geqslant 2)$, C_l $(l \geqslant 2)$, F_4, G_2 остаётся открытым следующий вопрос.

Вопрос 3.4. Всегда ли замыкание $\bar{\mathfrak{A}}$ ковра $\mathfrak{A}$ является ковром?

Для ковров типа $\Phi = A_l, D_l, E_l$ ответ на вопрос 3.4 положителен, так как в этих случаях для любой пары линейно независимых корней r, s и любых $t, u \in K$

$$[x_r(t), x_s(u)] = \begin{cases} x_{r+s}(\pm tu), & \text{если } r+s \in \Phi, \\ 1, & \text{если } r+s \notin \Phi, \end{cases}$$

и следовательно, любая подгруппа M, порождённая своими пересечениями

$$M \cap X_r = x_r(\mathfrak{A}_r), \quad r \in \Phi,$$

является ковровой и определяется ковром $\mathfrak{A} = \{\mathfrak{A}_r \colon r \in \Phi\}$. Для групп Шевалле типа B_l $(l \geqslant 2)$, C_l $(l \geqslant 2)$, F_4, G_2 это не так, как показывают примеры 1 и 2 из [8].

4. Производные ковры

В [2] строится сеть $\mathfrak{B}$, производная от исходной элементарной сети аддитивных подгрупп $\mathfrak{A}$ степени $n \geqslant 3$, где по определению

$$\mathfrak{B}_{ij} = \sum_{\substack{k=1,\\ k\neq i,j}}^{n} \mathfrak{A}_{ik}\mathfrak{A}_{kj}, \quad 1 \leqslant i,j \leqslant n, \quad i \neq j.$$

При $n = 3$ сеть $\mathfrak{B}$ можно наглядно представить таблицей

$$\begin{pmatrix} * & \mathfrak{A}_{13}\mathfrak{A}_{32} & \mathfrak{A}_{12}\mathfrak{A}_{23} \\ \mathfrak{A}_{23}\mathfrak{A}_{31} & * & \mathfrak{A}_{21}\mathfrak{A}_{13} \\ \mathfrak{A}_{32}\mathfrak{A}_{21} & \mathfrak{A}_{31}\mathfrak{A}_{12} & * \end{pmatrix}.$$

В [8] производный ковёр определяется для всех групп Шевалле над коммутативным кольцом с единицей следующим образом. По элементарному ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ ранга $l \geqslant 2$ определим набор аддитивных подгрупп

$$\mathfrak{B}_p = \sum_{\substack{i,j>0,\\ ir+js=p}} C_{ij,rs}\mathfrak{A}_r^i\mathfrak{A}_s^j, \quad p \in \Phi,$$

где суммирование ведётся по всем натуральным числам i, j и корням $r, s \in \Phi$, для которых $ir + js = p$.

Пример 4.1. Пусть $\{a, b\}$ — база системы корней $\Phi = B_2$. В этом случае коммутаторная формула имеет вид

$$[x_a(t), x_b(u)] = x_{a+b}(\pm tu)x_{2a+b}(\pm t^2u),$$
$$[x_a(t), x_{a+b}(u)] = x_{2a+b}(\pm 2tu).$$

Поэтому

$$\mathfrak{B}_{a+b} = \mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_b + \mathfrak{A}_{-a}\mathfrak{A}_{2a+b},$$
$$\mathfrak{B}_{2a+b} = 2\mathfrak{A}_a\mathfrak{A}_{a+b} + \mathfrak{A}_a^2\mathfrak{A}_b + \mathfrak{A}_{a+b}^2\mathfrak{A}_{-b}.$$

Остальные шесть подгрупп $\mathfrak{B}_p$ определяются аналогично.

В [8] показано, что набор $\mathfrak{B} = \{\mathfrak{B}_p\colon p \in \Phi\}$ является ковром, он называется *производным* от $\mathfrak{A}$.

Для каждой системы корней Φ определим число

$$m = m(\Phi) = \max_{r,s\in\Phi} \frac{(r,r)}{(s,s)}.$$

В действительности

$$m = \begin{cases} 1, & \text{если } \Phi = A_l, D_l, E_l,\\ 2, & \text{если } \Phi = B_l, C_l, F_4,\\ 3, & \text{если } \Phi = G_2.\end{cases}$$

Теорема 4.2 [8]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — ковёр, производный от ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ ранга $l \geqslant 2$. Тогда*

$$m!\,\mathfrak{B}_p\mathfrak{B}_{-p}\mathfrak{B}_p \subseteq \mathfrak{B}_p, \quad p \in \Phi. \tag{4.1}$$

Для $\Phi = A_l$ включения (4.1) установлены ранее в [2].

Для любого $r \in \Phi$ положим

$$E_r(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle x_r(\mathfrak{A}_r),\, x_{-r}(\mathfrak{A}_{-r})\rangle.$$

Зафиксируем какой-либо линейный порядок на множестве положительных корней Φ^+ системы корней Φ. Пусть

$$\Phi^+ = \{r_1, r_2, \dots, r_k\}.$$

В группе $E(\Phi, \mathfrak{A})$ выделим подмножества $G_0, G_1, \dots, G_k$. По определению

$$G_0 = E(\Phi, \mathfrak{B}),$$

где $\mathfrak{B}$ — ковёр, производный от ковра $\mathfrak{A}$, и при $i = 1, 2, \dots, k$

$$G_i = G_{i-1}E_{r_i}(\Phi, \mathfrak{A}).$$

Теорема 4.3 [8]. *Пусть $\mathfrak{B}$ — ковёр, производный от ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ ранга $l \geqslant 2$ над кольцом K. Тогда каждое множество G_i является подгруппой, причём*

$$E(\Phi, \mathfrak{B}) = G_0 \leqslant G_1 \leqslant \ldots \leqslant G_k = E(\Phi, \mathfrak{A}). \tag{4.2}$$

В частности,

$$E(\Phi, \mathfrak{A}) = E(\Phi, \mathfrak{B}) \prod_{r\in\Phi} E_r(\Phi, \mathfrak{A}), \tag{4.3}$$

где сомножители $E_r(\Phi, \mathfrak{A})$ в произведении можно брать в любом порядке.

Для $\Phi = A_{n-1}$ факторизация (4.3) установлена ранее в [3]. Мы приведём формулировку этой факторизации элементарной сетевой группы $E(\mathfrak{A})$ на матричном языке.

Пусть $i \neq j$. Положим

$$E_{ij}(\mathfrak{A}) = \langle t_{ij}(\mathfrak{A}_{ij}),\, t_{ji}(\mathfrak{A}_{ji})\rangle.$$

При $n \geqslant 3$ имеет место равенство

$$E(\mathfrak{A}) = E(\mathfrak{B}) \prod_{1\leqslant i<j\leqslant n} E_{ij}(\mathfrak{A}).$$

Отметим также, что теорема 4.3 может быть полезна при исследовании вопросов 2.1 и 2.2, что, собственно, и было продемонстрировано в [4], где в принципиально важном случае $\Phi = A_2$ (трёхмерном матричном случае) с использованием теоремы 4.3 установлены тонкие результаты о включении корневого элемента $x_r(u)$ (трансвекции $t_{ij}(u)$) в ковровую подгруппу $E(\Phi, \mathfrak{A})$.

Для ковра типа A_l включения (4.1) из теоремы 4.2 совпадают с необходимыми и достаточными условиями его дополняемости до полного матричного ковра, а так как ковёр, дополняемый до полного ковра, является замкнутым, то в силу теоремы 4.2 производный ковёр типа A_l является замкнутым. Таким образом, для типа A_l теорема 4.3 даёт разложение ковровой подгруппы в произведение подгрупп, определяемых замкнутыми коврами, если потребовать, как в вопросе 2.2, замкнутость всех подковров ранга 1. Поэтому в связи с возможными применениями теоремы 4.3 к вопросам 2.1 и 2.2 представляет интерес следующий вопрос.

Вопрос 4.4. Будет ли любой производный ковёр типа Φ над коммутативным кольцом K замкнутым?

5. Ковровые кольца Ли

Пусть $L(\Phi, \mathbb{C})$ — простая алгебра Ли типа Φ над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$. Она обладает базисом Шевалле

$$\{e_r,\ r \in \Phi;\ h_s,\ s \in \Pi\}, \tag{5.1}$$

где Π — множество фундаментальных корней системы Φ, причём умножение базисных элементов осуществляется по следующим правилам:

$$\begin{aligned}
&[h_r h_s] = 0, && r, s \in \Pi,\\
&[h_r e_s] = A_{rs} e_s, && r \in \Pi,\ s \in \Phi,\\
&[e_r e_{-r}] = h_r, && r \in \Phi,\\
&[e_r e_s] = 0, && r, s \in \Phi,\ r+s \notin \Phi,\\
&[e_r e_s] = N_{r,s} e_{r+s}, && r, s, r+s \in \Phi.
\end{aligned} \tag{5.2}$$

Здесь, как обычно,

$$A_{rs} = \frac{2(r,s)}{(r,r)}, \quad N_{r,s} = \pm(p+1),$$

где $p = p(r,s)$ — наибольшее целое неотрицательное число, такое что $s - pr \in \Phi$.

Числа A_{rs} и $N_{r,s}$ целые, поэтому можно определить кольцо (алгебру) Ли $L(\Phi, K)$ с базисом Шевалле над произвольным коммутативным кольцом K с единицей (см., например, [11]).

По ковру $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K определим подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ кольца $L(\Phi, K)$ с операциями сложения и умножения такими же, как в $L(\Phi, K)$. По определению считаем, что подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ порождается (относительно обеих операций) всеми множествами $\mathfrak{A}_r e_r$, $r \in \Phi$, т. е.

$$L(\Phi, \mathfrak{A}) = \langle \mathfrak{A}_r e_r \colon r \in \Phi \rangle.$$

Будем называть $L(\Phi, \mathfrak{A})$ *ковровым* подкольцом Ли. Заметим, что базисные элементы e_r, h_s не обязаны лежать в $L(\Phi, \mathfrak{A})$.

Ковёр $\mathfrak{A}$ назовём *L-замкнутым*, если

$$L(\Phi, \mathfrak{A}) \cap K e_r = \mathfrak{A}_r e_r, \quad r \in \Phi. \tag{5.3}$$

Следующая теорема даёт ответ на аналог вопроса 2.1 для ковровых подколец Ли $L(\Phi, \mathfrak{A})$.

Теорема 5.1 [9]. *Ковёр $\mathfrak{A}$ типа Φ над кольцом K является L-замкнутым тогда и только тогда, когда*

$$2\mathfrak{A}_r \mathfrak{A}_{-r} \mathfrak{A}_r \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi. \tag{5.4}$$

В частности, над кольцом K характеристики 2 любой ковёр L-замкнут.

Элементарная группа Шевалле $E(\Phi, K)$ действует на кольце Ли $L(\Phi, K)$ как группа автоморфизмов. Будем говорить, что подкольцо (подмножество) $M \subseteq L(\Phi, K)$ *инвариантно* относительно подгруппы $G \subseteq E(\Phi, K)$, если $gm \in M$ для любых $g \in G$ и $m \in M$.

Теорема 5.2 [9]. *Подкольцо $L(\Phi, \mathfrak{A})$ инвариантно относительно ковровой подгруппы $E(\Phi, \mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда*

$$\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r, \quad r \in \Phi.$$

В [9] детально исследовались связи следующих трёх понятий для ковров: замкнутость, L-замкнутость и инвариантность. Осталось неясным лишь то, следует ли замкнутость ковра из инвариантности коврового подкольца относительно ковровой подгруппы, определяемой тем же ковром. Ввиду теоремы 5.2 последний вопрос можно переформулировать следующим образом.

Вопрос 5.3. Являются ли включения $\mathfrak{A}_r^2 \mathfrak{A}_{-r} \subseteq \mathfrak{A}_r$, $r \in \Phi$, достаточными для замкнутости ковра $\mathfrak{A}$ типа Φ?

Работа В. А. Койбаева поддержана РФФИ (проект 13-01-00469). Работа Я. Н. Нужина поддержана РФФИ (проект 12-01-00968-а) и Министерством образования и науки РФ (проект 2.1.1/4620).

Литература

[1] Боревич З. И. О подгруппах линейных групп, богатых трансвекциями // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1978. — Т. 75. — С. 22—31.

[2] Койбаев В. А. Сети, ассоциированные с элементарными сетями // Владикавк. мат. журн. — 2010. — Т. 12, № 4. — С. 39—43.

[3] Койбаев В. А. Элементарные сети в линейных группах // Тр. ИММ УрО РАН. — 2011. — Т. 17, № 4. — С. 134—141.

[4] Койбаев В. А. Разложение трансвекции в элементарной группе // Журн. Сибирск. фед. ун-та. — 2012. — Т. 5, № 3. — С. 388—392.

[5] Коуровская тетрадь. Нерешённые вопросы теории групп. — Новосибирск: ИМ СО РАН, 2010.

[6] Левчук В. М. Параболические подгруппы некоторых ABA-групп // Мат. заметки. — 1982. — Т. 31, № 4. — С. 509—525.

[7] Левчук В. М. Порождающие множества корневых элементов групп Шевалле над локально конечным полем // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 4. — С. 48—58.

[8] Нужин Я. Н. Факторизация ковровых подгрупп групп Шевалле над коммутативными кольцами // Журн. Сибирск. фед. ун-та. — 2011. — Т. 4, № 4. — С. 527—535.

[9] Нужин Я. Н. Кольца Ли, определяемые системой корней и набором аддитивных подгрупп основного кольца // Тр. ИММ УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 3. — С. 195—200.

[10] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.

[11] Carter R. Simple Groups of Lie Type. — New York: Wiley, 1972.