Первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Ю. В. КОЧЕТОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: jkochetova@mail.ru

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: e.shir@relcom.ru

УДК 512.552+512.545

Ключевые слова: решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над полем, первичный идеал, первичный радикал, нижний слабо разрешимый l-радикал.

Аннотация

В работе рассматривается подход к упорядочению алгебр, предложенный В. М. Копытовым. Найдены необходимые и достаточные условия существования линейного порядка на алгебре над полем. Исследуются свойства идеалов линейно упорядоченных алгебр и приведены примеры алгебр, для которых порядок Копытова на алгебре индуцирует порядок того же типа на различных алгебраических объектах, связанных с данной алгеброй. Изучается возможность обобщения понятия первичного радикала на класс решёточно упорядоченных алгебр над частично упорядоченным полем. Дано поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными и над направленными полями. Введено понятие и доказаны свойства нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры, а также получены условия его совпадения с l-первичным радикалом l-алгебры.

Abstract

J. V. Kochetova, E. E. Shirshova, Prime radicals of lattice $\mathcal{K}$-ordered algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 85—158.

The Kopytov order for any algebra over a field is considered. Necessary and sufficient conditions for an algebra to be a linearly ordered algebra are presented. Some results concerning the properties of ideals of linearly ordered algebras are obtained. Some examples of algebras with the Kopytov order are described. The Kopytov order for these examples induces the order on other algebraic objects. The purpose of this paper is to investigate a generalization of the concept of prime radical to lattice ordered algebras over partially ordered fields. Prime radicals of l-algebras over partially ordered and directed fields are described. Some results concerning the properties of the lower weakly solvable l-radical of l-algebras are obtained. Necessary and sufficient conditions for the l-prime radical of an l-algebra to be equal to the lower weakly solvable l-radical of the l-algebra are presented.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 85—158.

Введение

Понятие радикала является одним из основных инструментов построения структурной теории многих алгебраических систем. Теория радикалов наиболее развита для колец, алгебр, модулей и групп. Развитие структурной теории привело к появлению большого числа различных радикалов. В частности, в теории ассоциативных колец возникли следующие классические радикалы: локально нильпотентный радикал Левицкого, верхний ниль-радикал Кёте, квазирегулярный радикал Джекобсона, нижний ниль-радикал Бэра и первичный радикал. При построении структурной теории алгебр Ли в 1888—1890 годах появился разрешимый радикал В. Киллинга, а в 1971 году — слабо разрешимый радикал В. А. Парфёнова [30].

В 1943 году Р. Бэр [39] построил для колец нижний ниль-радикал трансфинитным «бэровским» процессом. Первичный радикал кольца ввёл в рассмотрение в 1949 году Н. Маккой [42]. Я. Левицкий [41] в 1951 году доказал совпадение радикала Бэра и радикала Маккоя. Первичный радикал исследовался для различных алгебраических систем: К. К. Щукиным для групп [38], А. В. Михалёвым и М. А. Шаталовой для Ω-групп [27], С. А. Пихтильковым для алгебр Ли [31]. В перечисленных работах было получено поэлементное описание первичного радикала соответствующей алгебраической системы. Кроме того, С. А. Пихтильковым в [31] было введено понятие нижнего слабо разрешимого радикала алгебры Ли и доказано, что этот радикал совпадает с первичным радикалом алгебры Ли [31, теорема 2.3.3].

Плодотворной оказалась идея распространить понятие радикала на частично упорядоченные алгебраические системы, что видно на примере рассмотрения первичного радикала в решёточно упорядоченных кольцах (l-кольцах), восходящего к статье Г. Биркгофа и Р. Пирса [40] 1956 года (см. также [4]). Поэлементное описание первичного радикала для l-колец, l-групп и l-модулей получено А. В. Михалёвым и М. А. Шаталовой [25—27], а для направленных групп — А. В. Михалёвым и Е. Е. Ширшовой [28, 29]. Для решёточно упорядоченных колец А. В. Михалёвым и М. А. Шаталовой [25] было показано, что стандартная процедура построения нижнего радикала приводит к l-первичному радикалу l-кольца.

До последнего времени понятие l-первичного радикала не исследовалось для решёточно упорядоченных алгебр Ли (l-алгебр Ли). Принимая во внимание этот факт, профессор кафедры высшей алгебры МГУ А. В. Михалёв поставил задачу изучения свойств первичного радикала решёточно упорядоченных алгебр Ли с использованием определения частично упорядоченной алгебры Ли над частично упорядоченным полем, введённого В. М. Копытовым в статье [10] 1972 года.

Алгебра Ли L над частично упорядоченным полем F называется *частично упорядоченной*, если на L задано отношение порядка $\leqslant$, такое что

1) $\langle L; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа;

2) из соотношения $x \leqslant y$ следует, что $\lambda x \leqslant \lambda y$ для всех $x, y \in L$ и $\lambda \in F$, $\lambda \geqslant 0$;
3) из соотношения $x \leqslant y$ следует, что $x+[x,z] \leqslant y+[y,z]$ для всех $x,y,z \in L$.

В 70—80-х годах прошлого века на базе понятия частично упорядоченной алгебры Ли была построена содержательная теория линейно упорядочиваемых алгебр Ли над линейно упорядоченным полем, ряд основных результатов которой отражён в работах [1,10—12,22—24]. Так, в работах В. М. Копытова [10—12] рассмотрено строение решётки выпуклых подалгебр линейно упорядоченной алгебры Ли и доказано, что все l-идеалы l-алгебры Ли над линейно упорядоченным полем образуют полную подрешётку в решётке всех идеалов данной алгебры. Кроме того, В. М. Копытовым рассматривались вопросы упорядочиваемости алгебр Ли и в [10] им было доказано, что алгебра Ли над линейно упорядоченным полем линейно упорядочиваема тогда и только тогда, когда она обладает центральной системой, при этом конечномерная линейно упорядоченная алгебра Ли нильпотентна. Также при изучении взаимосвязи решёточно упорядоченных алгебр Ли с линейными порядками В. М. Копытов в [11] показал, что всякая l-алгебра Ли над линейно упорядоченным полем l-изоморфна l-подалгебре декартовой суммы линейно упорядоченных алгебр Ли.

В [10] В. М. Копытов указывает на то, что введённое им определение порядка на алгебре Ли можно рассматривать не только для этих алгебр, но и для произвольных алгебр над упорядоченными полями. Кроме того, нами было замечено, что существует связь между линейным порядком Копытова ассоциативной алгебры A и порядком Копытова на соответствующей ей алгебре Ли $A^{(-)}$ (предложение 2.2.1), которая позволяет существенно расширить число примеров упорядоченных по Копытову алгебр Ли. Данные наблюдения послужили стимулом для изучения свойств порядка Копытова на произвольных линейных алгебрах над полями и привели к необходимости решения следующих задач.

1. Распространить понятие порядка Копытова с класса алгебр Ли на произвольные линейные алгебры над частично упорядоченными полями. В связи с этим изучить свойства модулей элементов в векторных решётках над полями с различным упорядочением.
2. Исследовать вопрос о линейной упорядочиваемости произвольной линейной алгебры над линейно упорядоченным полем, в частности описать конечномерные решёточно упорядочиваемые по Копытову ассоциативные алгебры. Вместе с этим изучить свойства l-идеалов l-алгебр.
3. Получить поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченными полями, а также исследовать взаимосвязь l-первичного радикала l-алгебры с её нижним слабо разрешимым l-радикалом.

Данная работа посвящена решению сформулированных выше задач теории частично упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями.

Основными в работы являются следующие результаты.

1. Найдены необходимые и достаточные условия линейной упорядочиваемости произвольной линейной алгебры над линейно упорядоченным полем

(теорема 2.4.4). Описаны конечномерные линейно и решёточно упорядочиваемые ассоциативные алгебры и алгебры Ли (следствие 2.4.1 и следствие 2.6.1). Для произвольных l-алгебр над частично упорядоченными полями доказан аналог теоремы Леви (теорема 2.3.2). Помимо этого показано, что любая l-алгебра над направленным полем вкладывается в декартову сумму линейно упорядоченных алгебр (теорема 2.6.1).

2. В произвольных l-алгебрах над частично упорядоченными полями описаны свойства спрямляющих l-идеалов (раздел 2.5), наименьших l-идеалов, содержащих данный элемент l-алгебры (раздел 2.2), и изучены свойства l-первичных l-идеалов (раздел 3.2), а также доказано, что все l-идеалы любой l-алгебры образуют полную подрешётку в решётке её идеалов (теорема 2.2.3).
3. Получено поэлементное описание l-первичного радикала решёточно упорядоченных алгебр над частично упорядоченными и направленными полями (теоремы 3.3.3 и 3.3.4). Доказано, что l-первичный радикал l-алгебры совпадает с её нижним слабо разрешимым l-радикалом (теорема 3.7.1).

Для получения данных результатов были развиты методы частично упорядоченных линейных алгебр, l-идеалов, l-первичного радикала.

Работа носит теоретический характер. Её результаты могут быть полезны специалистам и аспирантам, занимающимся теорией l-алгебр над частично упорядоченными полями, и использоваться при дальнейшем исследовании различных вопросов теорий частично упорядоченных векторных пространств, колец и алгебр. Также полученные результаты могут быть использованы при чтении спецкурсов в университетах и институтах для студентов математических специальностей.

Перейдём теперь к изложению содержания работы по разделам.

Во введении изложена предыстория исследуемых вопросов и дан обзор работы.

Раздел 1 носит предварительный характер. В первых двух подразделах этого раздела приводятся необходимые сведения из теории частично упорядоченных групп и полей, используемые в дальнейшем изложении. В работе используется терминология, общепринятая для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [12, 32]).

В связи с тем, что в работе рассматриваются поля с различными типами порядков, в разделе 1.3, результатами которого мы будем пользоваться в дальнейшем, исследуются свойства векторных решёток над частично упорядоченными, направленными и решёточно упорядоченными полями. В этом разделе вводится понятие решёточно упорядоченного векторного пространства над частично упорядоченным полем.

Частично упорядоченным векторным пространством над частично упорядоченным полем F называется векторное пространство V над полем F, на котором задано отношение порядка $\leqslant$, такое что

1) $\langle V; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;

2) для любых элементов $x \in V$, $\lambda \in F$ из неравенств $x \geqslant 0$ в V и $\lambda \geqslant 0$ в F следует, что $\lambda x \geqslant 0$ в V.

В разделе 1.3 показано, что известные равенства для векторных решёток над линейно упорядоченными полями (см., например, [4, гл. XV, § 1]) не выполняются уже в случае решёточно упорядоченных полей. Поэтому основное внимание в данном разделе уделяется изложению новых результатов, касающихся оценок в векторной решётке модуля произведения скаляра на вектор:

1) в решёточно упорядоченном векторном пространстве V над направленным полем F для любых элементов $x \in V$ и $\lambda \in F$ существует положительный элемент $\alpha \in F$, такой что $|\lambda x| \leqslant \alpha |x|$ (лемма 1.3.2);
2) если V — линейно упорядоченное векторное пространство над частично упорядоченным полем F, то $\lambda |x| \leqslant |\lambda x|$ для всех $x \in V$ и $\lambda \in F$ (лемма 1.3.5).

Также в разделе 1.3 доказано, что в решёточно упорядоченном векторном пространстве V над частично упорядоченным полем F, удовлетворяющим условию

$$\text{если} \quad ab > 0 \quad \text{и} \quad a > 0, \quad \text{то} \quad b > 0, \tag{$*$}$$

для любых $x, y \in V$ и $\lambda \in F$, $\lambda \geqslant 0$, верны равенства $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$ и $\lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y$ (предложение 1.3.1).

Напомним, что в [10] В. М. Копытовым было введено определение упорядочения алгебры Ли и указано на то, что данное определение можно рассматривать и для произвольных алгебр над упорядоченными полями.

В разделе 2 даны два эквивалентных определения частично упорядоченных по Копытову линейных алгебр над частично упорядоченными полями, а также сформулированы и доказаны их простейшие свойства.

Будем говорить, что на линейной алгебре $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ над частично упорядоченным полем F определён *порядок Копытова* (*$\mathcal{K}$-порядок*) $\leqslant$, если

1) $\langle A; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) из неравенства $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;
3) из неравенства $0 \leqslant a$ следует, что $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a + ba$ для всех $b \in A$.

Следует отметить, что для ассоциативных алгебр понятия $\mathcal{K}$-порядка и порядка ассоциативного кольца (см., например, [32, гл. VI, § 1]) различны. Так, в разделе 2.1 приведён пример ассоциативной алгебры, в которой порядок аддитивной группы индуцирует $\mathcal{K}$-порядок алгебры, но не индуцирует порядка ассоциативного кольца (пример 2.1.1).

Если $0 < a$, $a \in A$, то скажем, что элемент $b \in A$ *бесконечно мал* относительно элемента a ($b \ll a$), если $\lambda b \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$. С использованием данного понятия в разделе 2.1 показано, что условие 3) можно заменить на эквивалентное ему условие

3′) из неравенства $0 < a$ следует, что $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.

Поэтому будем считать, что на алгебре A над частично упорядоченным полем F определён *порядок Копытова* (*$\mathcal{K}$-порядок*) $\leqslant$, если выполняются условия 1), 2) и 3′). Если при этом группа $\langle A; +; \leqslant\rangle$ является линейно упорядоченной (l-группой), то алгебра A называется *линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной* (*l-алгеброй*).

В разделе 2.1 показано, что данное определение эквивалентно определению частично упорядоченной алгебры над полем, введённому В. М. Копытовым в [10] для алгебр Ли. При дальнейшем изложении, говоря «порядок на алгебре», мы будем подразумевать рассмотренный выше $\mathcal{K}$-порядок.

Также в разделе 2.1 приведены примеры линейных алгебр, упорядоченных по Копытову, и упорядоченных алгебраических объектов, связанных с этими алгебрами. Кроме того, в этом разделе сформулированы и доказаны свойства модулей элементов в произвольных $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах над полями. В частности, показано, что в решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L над частично упорядоченным полем F для любых элементов $x, y \in L$ выполняются неравенства $|xy| \leqslant |x|$ и $|yx| \leqslant |x|$ (предложение 2.1.4), а если поле F является направленным и удовлетворяет условию $(*)$, то $|ax| \ll a$ и $|xa| \ll a$ для всех положительных $a \in L$ (предложение 2.1.6).

В разделе 2.2 для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры введено понятие её l-идеала. Сформулировано второе определение l-идеала и доказана эквивалентность двух введённых определений. Доказаны свойства l-идеалов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем:

1) множество всех l-идеалов данной l-алгебры над частично упорядоченным полем образует подрешётку в решётке всех её идеалов, и притом полную (теорема 2.2.3);
2) множество M_a всех элементов линейно упорядоченной по Копытову алгебры A над линейно упорядоченным полем F, бесконечно малых относительно некоторого $a > 0$, $a \in A$, является выпуклым двусторонним идеалом в A (теоремы 2.2.1 и 2.2.2).

Отметим, что утверждение о полноте подрешётки l-идеалов в решётке всех идеалов l-алгебры Ли над линейно упорядоченным полем можно найти в работах В. М. Копытова [11, 12].

С использованием свойств идеалов M_a в разделе 2.2 доказано, что линейный $\mathcal{K}$-порядок ассоциативной алгебры A индуцирует линейный $\mathcal{K}$-порядок на алгебре Ли $B^{(-)}$ подалгебры B алгебры A (следствие 2.2.1). Кроме того, выпуклые идеалы M_a используются в разделе 2.4 при описании центральных систем идеалов линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Раздел 2.2 также содержит описание наименьших l-идеалов I_a, содержащих некоторый элемент a l-алгебры L над направленным полем F: l-идеал I_a совпадает с множеством

$$M = \{x \in L \mid |x| \leqslant \gamma_x |a|,\ \gamma_x \in F\}$$

(предложение 2.2.5) и при этом $M_{|a|} \subseteq I_a$.

В разделе 2.3 на фактор-алгебре частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем по её выпуклому идеалу введено естественное частичное упорядочение (предложение 2.3.1) и доказано, что фактор-алгебра l-алгебры по её l-идеалу является l-алгеброй относительно естественного порядка (следствие 2.3.2).

Также в разделе 2.3 для $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр сформулирована теорема, являющаяся аналогом теоремы Леви для l-групп (см., например, [12, гл. II, § 3]) и дающая инструмент для конструирования примеров $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр. Эта теорема утверждает, что если A — алгебра над частично упорядоченным полем F и I — идеал в A, где I и A/I частично упорядоченные по Копытову, а также для любого $a > 0$ в I и любого $b \in A$ выполняется $ab, ba \leqslant a$, то на алгебре A можно определить $\mathcal{K}$-порядок, индуцирующий заданные порядки на I и A/I, при котором I — выпуклый идеал в A (теорема 2.3.2). Для упорядоченных алгебр Ли данный результат доказан В. М. Копытовым в [10].

В работе А. Г. Куроша [19], положившей начало общей теории радикалов колец и алгебр, было отмечено, что эту теорию (а значит, и соответствующую структурную теорию) можно развивать для любых алгебраических систем, для которых имеют смысл гомоморфизмы и ядра гомоморфизмов с их обычными свойствами (ядра гомоморфизмов должны быть подсистемами, должны быть верны «теоремы об изоморфизмах» и т. д.). В разделе 2.3 показано, что для решёточно упорядоченных по Копытову линейных алгебр указанные свойства выполняются.

При исследовании решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр используются гомоморфизмы алгебр, согласованные с порядками на алгебрах. Для эффективной работы с ними в разделе 2.3 сформулированы известные определения порядкового, строгого порядкового и решёточного гомоморфизма. Доказаны основные свойства связанных с ними понятий, таких как ядро, образ, прообраз. В разделе 2.3 получены следующие результаты для частично и решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

1. Доказано, что канонический гомоморфизм частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем в её фактор-алгебру по выпуклому идеалу является порядковым гомоморфизмом (предложение 2.3.2), а канонический гомоморфизм l-алгебры в фактор-алгебру по её l-идеалу является l-гомоморфизмом (теорема 2.3.4).
2. Показано, что выпуклые идеалы и только они являются ядрами порядковых гомоморфизмов (теорема 2.3.3), а l-идеалы и только они являются ядрами l-гомоморфизмов l-алгебр (теорема 2.3.9).
3. Образ и полный прообраз l-идеала при каноническом гомоморфизме l-алгебр являются l-идеалами (теоремы 2.3.7 и 2.3.5).
4. Показано, что l-гомоморфизм решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр является строгим порядковым гомоморфизмом (предложение 2.3.3). Доказана теорема о гомоморфизмах и вторая теорема об изоморфизмах для решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр (теоремы 2.3.9 и 2.3.6).

В разделе 2.4 исследуется связь линейной $\mathcal{K}$-упорядочиваемости линейной алгебры над полем с наличием в этой алгебре центральной системы идеалов.

В частности, доказано, что любая линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра A над линейно упорядоченным полем F обладает центральной системой идеалов, и при этом для любого скачка $C \subset B$ l-идеалов в этой системе нижний идеал скачка совпадает с идеалом M_b для любого $b > 0$, $b \in B \setminus C$ (теорема 2.4.2 и предложение 2.4.2). Отметим, что свойства идеалов M_b, где $b > 0$, описаны в разделе 2.2.

Кроме того, в разделе 2.4 показано, что алгебра над линейно упорядоченным полем, обладающая центральной системой идеалов, может быть линейно упорядочена по Копытову (теорема 2.4.3).

Итогом этого раздела является доказательство утверждения, что конечномерная ассоциативная алгебра над линейно упорядоченным полем может быть линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной в том и только в том случае, когда она нильпотентна (следствие 2.4.1). Для случая алгебр Ли данные результаты получены В. М. Копытовым (см. [10, 12]). Заметим, что условие конечномерности является существенным, поскольку, как показывает пример 2.1.7, существуют бесконечномерные ненильпотентные алгебры, линейно упорядочиваемые по Копытову.

Также в разделе 2.4 приведён пример $\mathcal{K}$-порядка алгебры Ли, индуцирующего линейный порядок на группе Ли, для которой данная алгебра Ли является касательным пространством.

В разделе 2.6 изучены свойства декартовой суммы линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр над направленным полем, а именно её связь с некоторой l-алгеброй. Данный раздел содержит следующие результаты.

1. Для всякой решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над направленным полем, удовлетворяющим условию $(*)$, существует решёточный изоморфизм алгебры L в декартову сумму линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр (теорема 2.6.1).
2. Конечномерная решёточно упорядоченная по Копытову ассоциативная алгебра (алгебра Ли) над линейно упорядоченным полем нильпотентна (следствие 2.6.1).
3. В решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L над направленным полем, удовлетворяющим условию $(*)$, для любых $a, b, x \in L$ справедливы соотношения
$$a \wedge b + (a \wedge b)x = (a + ax) \wedge (b + bx),$$
$$a \vee b + (a \vee b)x = (a + ax) \vee (b + bx),$$
$$\big||a| \cdot |b|\big| \leqslant |ab|$$
(следствие 2.6.2 и предложение 2.6.3).

Утверждения теоремы 2.6.1 и следствия 2.6.2 для l-алгебр Ли над линейно упорядоченным полем можно найти в [11, 12].

Для доказательства свойств декартовых сумм линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр в разделе 2.5 было введено понятие спрямляющего l-идеала l-алгебры и исследованы его свойства.

Спрямляющим идеалом частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем назовём такой её выпуклый идеал I, что фактор-алгебра L/I является линейно $\mathcal{K}$-упорядоченной относительно индуцированного порядка.

В разделе 2.5 выявлена взаимосвязь между произвольным l-идеалом и спрямляющими l-идеалами l-алгебры, которая заключается в том, что всякий l-идеал l-алгебры L над направленным полем, удовлетворяющим условию $(*)$, является пересечением спрямляющих l-идеалов (предложение 2.5.1).

Если L — l-алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию $(*)$, то каждый из l-идеалов $J_\alpha(x)$ в L, максимальных среди l-идеалов, не содержащих элемента $x \in L$, $x \neq 0$, называется *значением* элемента x или *нижним идеалом скачка* в решётке $\mathcal{L}(L)$ всех l-идеалов из L и является спрямляющим l-идеалом в L (теорема 2.5.1).

Раздел 3 является центральным для всей работы. В нём вводится понятие l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченным полем и описываются его свойства.

В разделе 3.1 дано определение l-произведения l-идеалов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры, сформулированы и доказаны его свойства.

l-произведением l-идеалов J_1 и J_2 l-алгебры L будем называть наименьший l-идеал $I_{J_1J_2}$ в L, содержащий множество J_1J_2.

Раздел 3.1 содержит описание строения l-произведения двух l-идеалов J_1 и J_2 l-алгебры L над направленным полем:

$$I_{J_1J_2} = \left\{ x \in L \;\Big|\; |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i b_i|,\ a_i \in J_1,\ b_i \in J_2 \right\}$$

(предложение 3.1.1). Также в разделе 3.1 доказано, что для l-идеалов J, R и T l-алгебры L над направленным полем верны соотношения $I_{JT} \subseteq J + T$ и $I_{J(R+T)} = I_{JR} + I_{JT}$ (предложение 3.1.2).

Для изучения l-первичного радикала l-алгебр в разделе 3.2 введены понятия l-первичной l-алгебры и l-первичного идеала и исследованы их свойства.

l-первичной алгеброй назовём l-алгебру L над частично упорядоченным полем, в которой из соотношения $I_{UV} = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$ для любых l-идеалов U, V в L. *l-первичным идеалом* l-алгебры L назовём такой её l-идеал P, что L/P — l-первичная l-алгебра.

В разделе 3.2 получены необходимые и достаточные условия l-первичности l-идеала P l-алгебры L над частично упорядоченным полем F:

1) для любых l-идеалов I_1, I_2 в L из соотношения $I_{I_1I_2} \subseteq P$ следует, что $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$;
2) для всех $a, b \in L$ из соотношения $I_a I_b \subseteq P$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$;
3) для любых l-идеалов I_1 и I_2 l-алгебры L из соотношения $I_1 I_2 \subseteq P$ следует хотя бы одно из соотношений $I_1 \subseteq P$, $I_2 \subseteq P$ (теорема 3.2.1).

Также в разделе 3.2 дано определение насыщенной системы l-алгебры, являющейся аналогом понятия l-m-системы для решёточно упорядоченных колец (см. [25]): непустое подмножество $M \subseteq L$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем назовём *насыщенной системой*, если для любых $a, b \in M$ существует элемент $z \in I_a I_b$, такой что $z \in M$.

Введение понятия насыщенной системы позволяет получить ещё одно необходимое и достаточное условие l-первичности идеала l-алгебры L: l-идеал I является l-первичным идеалом в L тогда и только тогда, когда $L \setminus I$ — насыщенная система (следствие 3.2.1).

Кроме того, в разделе 3.2 рассмотрены необходимые и достаточные условия, при выполнении каждого из которых l-алгебра L является l-первичной (предложения 3.2.1 и 3.2.2):

1) нулевой l-идеал является l-первичным в L;
2) для любых l-идеалов U и V в L из равенства $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

В разделе 3.3 вводится понятие l-первичного радикала решёточно упорядоченной по Копытову алгебры L над частично упорядоченным полем F: *l-первичным радикалом* $l\text{-rad}_K(L)$ l-алгебры L называется пересечение всех l-первичных идеалов из L.

В данном разделе доказывается, что любая конечномерная линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем совпадает со своим l-первичным радикалом (теорема 3.3.1). Кроме того, раздел 3.3 содержит описание l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченным полем с точки зрения свойств его элементов. Такое описание меняется в зависимости от вида частичного порядка на поле, над которым рассматривается l-алгебра.

Теорема. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, $l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}_K(L)$;

1′) *a принадлежит пересечению всех минимальных l-первичных l-идеалов в L*;

2) *любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2}$, содержит нуль*;

3) *в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_1 = a$, $a_{i+1} \in I^2_{a_i}$ начиная с некоторого места все элементы равны нулю* (*теорема* 3.3.3).

Теорема. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем F, $l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}_K(L)$;
2) *любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} = x_i y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i |a_i|$, $0 \leqslant y_i \leqslant \beta_i |a_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in F$, содержит нуль* (*теорема* 3.3.4).

Данные теоремы дают инструмент для нахождения l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными и направленными полями.

Кроме того, в разделе 3.3 описана связь l-первичного радикала l-алгебры Ли с её первичным радикалом: $l\text{-rad}_K(L) \subseteq \text{rad}(L)$ для любой l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем (следствие 3.3.1). В этом же разделе приведены примеры вычисления l-первичного радикала для некоторых l-алгебр, построенные на основании теоретических результатов, полученных в данном разделе.

В разделе 3.4 дано определение и исследуются свойства l-полупервичной l-алгебры.

l-алгебра L над частично упорядоченным полем F называется *l-полупервичной*, если $I^2 \neq \{0\}$ для любого l-идеала $I \neq \{0\}$ в L.

Основным результатом данного раздела является следующая теорема, описывающая необходимое и достаточное условие l-полупервичности l-алгебры: l-алгебра L над частично упорядоченным полем F является l-полупервичной тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$ (теорема 3.4.1).

В разделе 3.5 доказано, что l-первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над частично упорядоченным полем является радикалом в смысле Куроша—Амицура (теоремы 3.5.1 и 3.5.2, предложение 3.5.3).

При исследовании l-первичного радикала решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр возникла необходимость введения понятия и изучения свойств l-радикала l-алгебры так же, как это делается для l-колец (см. [25]).

l-идеал J решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем назовём *l-разрешимым*, если в L существует цепочка l-идеалов $J \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k = \{0\}$, в которой фактор-алгебры J_i/J_{i+1} — алгебры с нулевым умножением. Обозначим через $\mathfrak{N}(L)$ сумму всех l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L и будем называть $\mathfrak{N}(L)$ *l-радикалом* l-алгебры L над частично упорядоченным полем.

В разделе 3.6 изучаются свойства l-разрешимых l-идеалов l-алгебр над частично упорядоченными полями, а именно связь l-полупервичности l-алгебры с наличием в этой l-алгебре l-разрешимых l-идеалов. Также в этом разделе исследуются свойства l-радикала l-алгебр. В частности, раздел 3.6 содержит доказательства следующих свойств l-радикала l-алгебры, раскрывающих его связь с l-первичным радикалом:

1) в любой решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L над частично упорядоченным полем верно включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$ (следствие 3.6.1);
2) в l-алгебре L над частично упорядоченным полем $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}_K(L)$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$ (теорема 3.6.1);
3) $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$ в l-алгебре L над частично упорядоченным полем тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$ (следствие 3.6.2).

Кроме того, в разделе 3.6 приведены примеры l-разрешимых решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Для изучения l-первичного радикала l-алгебр в разделе 3.7 вводится понятие нижнего слабо разрешимого l-радикала решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры, исследуются его свойства и условия совпадения для каждой l-алгебры введённого радикала с l-первичным радикалом.

Нижний слабо разрешимый l-радикал строится для произвольной l-алгебры по следующему правилу. С помощью трансфинитной индукции построим цепь l-идеалов l-алгебры L

$$\mathfrak{N}_0(L) \subseteq \mathfrak{N}_1(L) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) \subseteq \ldots, \qquad (**)$$

определяя для каждого порядкового числа α идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ следующим образом:

1) $\mathfrak{N}_0 = 0$;
2) предположим, что идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ построен для всех $\alpha < \mu$ и определим $\mathfrak{N}_\mu(L)$ следующим образом:
   а) если μ — предельное порядковое число, то $\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L)$;
   б) если $\alpha+1$ не является предельным порядковым числом, то $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$ — это такой l-идеал l-алгебры L, содержащий l-идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)/\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\alpha(L)\big)$.

Нижним слабо разрешимым l-радикалом l-алгебры L над частично упорядоченным полем называется l-идеал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup\limits_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$, построенный по l-идеалам $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ из цепи $(**)$.

Основным результатом раздела 3.7 является следующая теорема, дающая описание l-первичного радикала с точки зрения его совпадения с нижним слабо разрешимым l-радикалом l-алгебры.

Теорема. *В любой решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L над направленным полем F нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}(L)$ совпадает с l-первичным радикалом $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ (теорема* 3.7.1).

Авторы искренне благодарят А. В. Михалёва за интерес к работе и А. Ю. Ольшанского за полезные обсуждения результатов.

1. Решёточно упорядоченные векторные пространства

В этом разделе собраны для удобства ссылок основные результаты и определения, используемые в работе. В первых двух подразделах этого раздела приводятся необходимые сведения из теории частично упорядоченных групп и полей. В третьем подразделе, результатами которого мы будем пользоваться в дальнейшем, исследуются свойства векторных решёток над частично упорядоченными, направленными и решёточно упорядоченными полями.

1.1. Свойства частично упорядоченных групп

В работе используется общепринятая терминология для частично упорядоченных алгебраических систем (см. [12, 32]).

В данном разделе рассматриваются частичные порядки на группах и перечисляются известные факты, касающиеся частично упорядоченных групп.

Определение 1.1.1 [32, гл. II, § 1]. Частично упорядоченной группой называется такое множество G, что

1) G — группа относительно операции сложения;
2) G — частично упорядоченное множество с отношением порядка $\leqslant$;
3) справедлив закон монотонности с областью монотонности G: если $a \leqslant b$, то $c + a \leqslant c + b$ и $a + c \leqslant b + c$ для всех $c \in G$.

Если любые два элемента группы G сравнимы, то группу G называют *линейно упорядоченной*. Если множество G — решётка, то G — *решёточно упорядоченная* группа (*l-группа*). Если множество G является направленным множеством, то группу называют *направленной* (см. [32, гл. 2, § 1]).

Элемент a частично упорядоченной группы G называется *положительным*, если $a \geqslant 0$, *строго положительным*, если $a > 0$, и *отрицательным*, если $a \leqslant 0$.

Множество $P = P(G) = G^+$ положительных элементов из G называется *положительным конусом* группы G. При этом частичный порядок $\leqslant$ на группе вполне определяется соответствующим положительным конусом P, так как соотношение $a \leqslant b$ эквивалентно тому, что $b - a \in P$ (и $-a + b \in P$).

Теорема 1.1.1 [12, с. 23; 32, гл. 2, § 2, теорема 2]. *Подмножество P группы G является положительным конусом некоторого частичного порядка в G тогда и только тогда, когда оно обладает следующими свойствами*:

1) $P \cap -P = \{0\}$;
2) $P + P \subseteq P$;
3) $x + P + (-x) \subseteq P$ *для любого* $x \in G$.

При этом G будет линейно упорядоченной группой тогда и только тогда, когда $P \cup -P = G$.

Теорема 1.1.1 позволяет отождествить порядок $\leqslant$ на группе G с положительным конусом P группы G.

В теории решёточно упорядоченных групп очень важны понятия положительной части a^+, отрицательной части a^- и модуля $|a|$ элемента a, которые определяются следующим образом: $a^+ = a \vee 0$, $a^- = a \wedge 0$, $|a| = a \vee (-a)$ (см. [32, гл. V, § 4]).

Свойства положительной части, отрицательной части и модуля элемента решёточно упорядоченной группы перечислены в следующей лемме.

Лемма 1.1.1 [4, гл. XIII, § 3, 4; 32, гл. V, § 1, 4]. *В l-группе G для любых элементов $x, y, z \in G$ верны следующие соотношения*:

$$z + (x \wedge y) = (z + x) \wedge (z + y), \quad z + (x \vee y) = (z + x) \vee (z + y), \tag{I}$$

$$x + y - (x \wedge y) = x \vee y, \tag{II}$$

$$x = x^+ + x^-, \quad |x| = x^+ - x^-, \tag{III}$$

$$|x + y| \leqslant |x| + |y|, \quad -|x| \leqslant x \leqslant |x|. \tag{IV}$$

Важную роль при изучении частично упорядоченных алгебраических систем играет следующее утверждение, справедливое во всякой решёточно упорядоченной группе.

Предложение 1.1.1 [12, гл. II, § 2, следствие 1; 32, гл. V, § 1, следствие 2]. *Если $a, b_1, \ldots, b_n$ — такие положительные элементы l-группы G, что $a \leqslant b_1 + \ldots + b_n$, то в G существуют положительные элементы $a_1, \ldots, a_n$, для которых $a = a_1 + \ldots + a_n$ и $a_j \leqslant b_j$, где $1 \leqslant j \leqslant n$.*

Напомним, что отображение φ частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H называется *порядковым гомоморфизмом* (*о-гомоморфизмом*), если для любых элементов $x, y \in G$ выполнены следующие соотношения:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) если $x \leqslant y$, то $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$ (см. [12, с. 32]).

Предложение 1.1.2 [12, с. 34]. *Если G — частично упорядоченная группа и H — её выпуклая нормальная подгруппа, то естественный гомоморфизм ε из G на фактор-группу G/H является порядковым гомоморфизмом.*

Выпуклая нормальная подгруппа l-группы G, являющаяся подрешёткой в G, называется *l-идеалом* (см. [32, с. 114; 12, с. 32]).

Предложение 1.1.3 [12, гл. II, § 3, теорема 2]. *Фактор-группа l-группы G по её l-идеалу H является l-группой относительно естественного порядка, при этом для любых элементов $x, y \in G$ в G/H выполняются следующие равенства:*

$$(x \vee y) + I = (x + I) \vee (y + I), \quad (x \wedge y) + I = (x + I) \wedge (y + I).$$

Теорема 1.1.2 [12, гл. II, § 3, теорема 3]. *Если φ — порядковый гомоморфизм частично упорядоченной группы G в частично упорядоченную группу H, то ядро N этого гомоморфизма является выпуклой нормальной подгруппой в G и существует порядковый изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной фактор-группы G/N в H, такой что $\bar{\varphi}(x + N) = \varphi(x)$ для любого $x \in G$.*

Напомним, что *спрямляющей подгруппой* частично упорядоченной группы G называется такая её выпуклая подгруппа H, что множество правых смежных классов группы G по подгруппе H является линейно упорядоченным относительно индуцированного порядка (см. [12, с. 50]).

Для l-групп верна следующая теорема.

Теорема 1.1.3 [12, гл. III, § 3, теорема 1]. *Выпуклая l-подгруппа H l-группы G является спрямляющей тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $a, b \in G \setminus H$ верно соотношение $a \wedge b \notin H$.*

Следствие 1.1.1. *Выпуклая l-подгруппа H l-группы G является спрямляющей тогда и только тогда, когда для любых положительных элементов $a, b \in G$ из того, что $a \wedge b \in H$ и $a \notin H$, следует, что $b \in H$.*

Пусть A_α, $\alpha \in I$, — множество частично упорядоченных групп. *Декартовой суммой* $\bar{A} = \overline{\sum\limits_{\alpha \in I}} A_\alpha$ частично упорядоченных групп A_α называется множество всех функций f, определённых на I, таких что для любого $\alpha \in I$ выполнено $f(\alpha) \in A_\alpha$, на котором задано следующее отношение порядка: для $f, g \in \bar{A}$

полагают $f \geqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(\alpha) \geqslant g(\alpha)$ для любого $\alpha \in I$ (см. [12, с. 36]). Группа $\langle \bar{A}; \leqslant \rangle$ является частично упорядоченной.

Если все A_α $(\alpha \in I)$ являются l-группами, то $\bar{A}$ также оказывается l-группой. В этом случае говорят, что $\bar{A} = \overline{\sum_{\alpha \in I}}_l A_\alpha$ — *декартова сумма* l-групп A_α $(\alpha \in I)$.

Предложение 1.1.4 [12, гл. II, § 3, предложение 5]. *Если $\{N_\alpha,\ \alpha \in I\}$ — множество выпуклых нормальных l-подгрупп l-группы G, такое что $\bigcap\limits_{\alpha \in I} N_\alpha = \{0\}$, то l-группа G l-изоморфна l-подгруппе декартовой суммы l-групп $G_\alpha = G/N_\alpha$, $\alpha \in I$.*

1.2. Частично упорядоченные поля

Определение 1.2.1 [32, гл. VI, § 1]. Частично упорядоченным полем называется поле F, на котором задано отношение порядка $\leqslant$, такое что выполнены следующие условия:

1) $\langle F; +; \leqslant \rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) из соотношений $a \leqslant b$ и $c > 0$ следует, что $ca \leqslant cb$ и $ac \leqslant bc$ $(a, b, c \in F)$.

Таким образом, аддитивная группа $\langle F; + \rangle$ поля F является коммутативной частично упорядоченной группой, и значит, она обладает свойствами, установленными для частично упорядоченных групп.

Множество положительных элементов P — *положительный конус* поля F — однозначно определяет частичный порядок в F, а именно $a \leqslant b$ эквивалентно условию $b - a \in P$. Наиболее важные свойства P объединяются в следующую теорему, аналогичную теореме 1.1.1.

Теорема 1.2.1 [32, гл. VI, § 1, теорема 1]. *Подмножество P поля F является положительным конусом некоторого частичного порядка в F тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия*:

1) $P \cap -P = \{0\}$;
2) $P + P \subseteq P$;
3) $PP \subseteq P$.

Подмножество P определяет линейный порядок в F, если $P \cup -P = F$.

Пример 1.2.1. Рассмотрим поле рациональных чисел $\langle \mathbb{Q}; +; \cdot \rangle$ и множество

$$P = \{0\} \cup \{x \in \mathbb{Q} \mid x \geqslant 1\},$$

где $\leqslant$ имеет обычный для рациональных чисел смысл. Ясно, что множество P удовлетворяет условиям 1)—3) теоремы 1.2.1, поэтому поле $\mathbb{Q}$ является частично упорядоченным относительно введённого порядка $\leqslant_1$. При этом согласно сделанному выше замечанию $x \leqslant_1 y$, если $y - x \in P$.

Введённый порядок $\leqslant_1$ не является линейным, поскольку есть рациональные числа, не сравнимые с помощью этого отношения. Действительно, из того, что

$\frac{1}{2} - 0 \notin P$, следует, что 0 и $\frac{1}{2}$ несравнимы. Аналогично $1\frac{1}{2} - 1 \notin P$, поэтому 1 и $1\frac{1}{2}$ несравнимы.

Отметим, что порядок $\leqslant_1$ является направленным. Действительно, рассмотрим произвольные рациональные числа x и y. Пусть для определённости $x \leqslant y$. Тогда $y+1$ является верхней гранью для x и y, так как $y+1-x \geqslant y+1-y = 1 \geqslant 1$. Следовательно, аддитивная группа $\langle \mathbb{Q}; +; \leqslant_1 \rangle$ является u-направленной и, значит, направленной группой. Отсюда следует направленность порядка $\leqslant_1$ на поле $\mathbb{Q}$.

Введённый на поле $\mathbb{Q}$ порядок не является решёточным, поскольку в $\mathbb{Q}$ есть элементы, для которых среди их верхних граней относительно порядка $\leqslant_1$ нельзя выбрать точную верхнюю грань. Например, для несравнимых элементов 0 и $\frac{1}{2}$ верхними гранями являются $1\frac{1}{2}$ и 2, но при этом числа $1\frac{1}{2}$ и 2 несравнимы между собой. Поэтому для 0 и $\frac{1}{2}$ невозможно выбрать наименьшую верхнюю грань.

Пример 1.2.2. Рассмотрим поле $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, на котором зададим следующее отношение порядка: для $a+b\sqrt{2}, c+d\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ будем считать, что $a+b\sqrt{2} \leqslant' c+d\sqrt{2}$ тогда и только тогда, когда $a \leqslant c$ и $b \leqslant d$. Тогда множество

$$P = \{x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Q}[\sqrt{2}] \mid x \geqslant 0 \text{ и } y \geqslant 0\}$$

удовлетворяет условиям 1)—3) теоремы 1.2.1, т. е. $\langle \mathbb{Q}[\sqrt{2}]; +; \cdot; \leqslant' \rangle$ — частично упорядоченное поле. При этом из линейности порядка $\leqslant$ на $\mathbb{Q}$ следует, что порядок $\leqslant'$ на $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ является решёткой. Таким образом, $\langle \mathbb{Q}[\sqrt{2}]; +; \cdot; \leqslant' \rangle$ — l-поле. Поскольку в $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ существуют элементы, не сравнимые с помощью отношения $\leqslant'$, например 1 и $\sqrt{2}$, то порядок $\leqslant'$ не является линейным.

Заметим, что при положительной характеристике поля F его положительный конус равен нулю, т. е. порядок на поле тривиален (см. [32, гл. VI, § 1]). Поэтому далее рассматривается упорядоченное поле F нулевой характеристики.

Известно [32, с. 166], что если частично упорядоченное кольцо обладает единицей e, то либо $e > 0$, либо e и 0 являются несравнимыми элементами. Во втором случае можно так продолжить частичный порядок, чтобы e стало положительным, если только характеристика кольца не положительна. Поэтому можно считать, что на частично упорядоченном поле F нулевой характеристики задан частичный порядок, при котором единица поля положительна.

Линейно упорядоченное поле F, очевидно, удовлетворяет условию (см. [32, с. 167])

$$\text{если} \quad ab > 0 \quad \text{и} \quad a > 0, \quad \text{то} \quad b > 0. \tag{1}$$

Нам иногда будет удобно предполагать выполненным условие (1) и в случае частично упорядоченного поля. Это каждый раз будет специально оговариваться.

1.3. Векторные решётки над полями с различным упорядочением

По аналогии с определением частично упорядоченного действительного векторного пространства (см. [4, с. 445]) сформулируем определение частично упорядоченного векторного пространства над частично упорядоченным полем F.

Определение 1.3.1. Частично упорядоченным векторным пространством над частично упорядоченным полем F называется векторное пространство V над полем F, на котором задано отношение порядка $\leqslant$, такое что

1) $\langle V; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) для любых элементов $x \in V$, $\lambda \in F$ из неравенств $x \geqslant 0$ в V и $\lambda > 0$ в F следует, что $\lambda x \geqslant 0$ в V.

Определение 1.3.2. Если аддитивная группа частично упорядоченного векторного пространства V является l-группой, то оно называется решёточно упорядоченным векторным пространством.

Из этих определений видно, что результаты теории частично упорядоченных групп применимы к любому частично упорядоченному векторному пространству над частично упорядоченным полем. В частности, для любого решёточно упорядоченного векторного пространства над частично упорядоченным полем верны утверждения леммы 1.1.1.

Лемма 1.3.1 [11, с. 596]. *В решёточно упорядоченном векторном пространстве V над линейно упорядоченным полем F для любых элементов $x, y \in V$, $\lambda \in F$ верны следующие равенства*:

$$|\lambda x| = |\lambda|\,|x|, \tag{V}$$

$$\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y \quad \text{и} \quad \lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y \quad \text{при} \quad \lambda \geqslant 0. \tag{VI}$$

Доказательство. Доказательство леммы аналогично доказательству соответствующего утверждения для векторных решёток над полем действительных чисел (см., например, [4, гл. XV, § 1]). □

В лемме 1.3.1 требование линейной упорядоченности поля существенно, как показывает следующий пример.

Пример 1.3.1. Рассмотрим поле $\langle \mathbb{Q}[\sqrt{2}]; +; \cdot\rangle$ как одномерное векторное пространство над самим собой. При этом будем считать, что на векторном пространстве $V = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ задан обычный линейный порядок $\leqslant$, а на поле $F = \mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ задан решёточный порядок $\leqslant'$, рассмотренный в примере 1.2.2. Тогда $\langle V; +; \leqslant\rangle$ — линейно упорядоченная группа.

Пусть $x + y\sqrt{2} \in V$, $x + y\sqrt{2} \geqslant 0$ в V и $\lambda = a + b\sqrt{2} \in F$, $\lambda \geqslant' 0$ в F. Тогда $a + b\sqrt{2} \geqslant 0$ в V, и поэтому $\lambda(x + y\sqrt{2}) \geqslant 0$ в V.

Таким образом, V — линейно упорядоченное векторное пространство над решёточно упорядоченным полем F.

Рассмотрим $\lambda = -1 + \sqrt{2} \in F$ и $x = 1 + \sqrt{2} \in V$. Тогда

$$|\lambda| = |-1 + \sqrt{2}| = (-1 + \sqrt{2}) \vee (1 - \sqrt{2}) = 1 + \sqrt{2},$$

и $|x| = |1+\sqrt{2}| = 1+\sqrt{2}$. При этом

$$|\lambda x| = |(-1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2})| = |1| = 1.$$

Кроме того,

$$|\lambda| \cdot |x| = (1+\sqrt{2})(1+\sqrt{2}) = 3+2\sqrt{2}.$$

Ясно, что

$$3+2\sqrt{2} = |\lambda| \cdot |x| \neq |\lambda x| = 1,$$

но выполняется свойство $|\lambda x| \leqslant |\lambda| \cdot |x|$.

Лемма 1.3.2. *Пусть V — решёточно упорядоченное векторное пространство над направленным полем F. Тогда для любого элемента $\lambda \in F$ существуют положительные верхние грани элементов λ и $-\lambda$ и для любой такой верхней грани $\alpha \in F$ верно неравенство $|\lambda x| \leqslant \alpha|x|$ для каждого $x \in V$.*

Доказательство. Так как порядок $\leqslant$ в частично упорядоченном поле F является направленным, то для элементов $\lambda, -\lambda \in F$ найдётся элемент λ', являющийся их верхней гранью, т. е. удовлетворяющий условиям $\lambda' \geqslant \lambda$ и $\lambda' \geqslant -\lambda$. Кроме того, поскольку порядок на поле F является направленным, существует такой элемент $\alpha \in F$, что $\alpha \geqslant \lambda'$ и $\alpha \geqslant 0$. Ясно, что $\alpha \in F$ — положительная верхняя грань элементов λ и $-\lambda$.

Из свойства (III) леммы 1.1.1, справедливой для любого решёточно упорядоченного векторного пространства, известно, что $x = x^+ + x^-$. Применяя второй пункт определения 1.3.1 к неравенствам $\alpha - \lambda \geqslant 0$ и $x^+ \geqslant 0$, получим, что $\alpha x^+ \geqslant \lambda x^+$. Используя неравенства $\alpha + \lambda \geqslant 0$ и $x^- \leqslant 0$, по второму пункту определения 1.3.1 заключаем, что $\alpha x^- \leqslant -\lambda x^-$, поэтому $-\alpha x^- \geqslant \lambda x^-$. По свойству (III) леммы 1.1.1 из полученных неравенств следует, что

$$\alpha|x| = \alpha(x^+ - x^-) = \alpha x^+ - \alpha x^- \geqslant \lambda x^+ + \lambda x^- = \lambda x,$$

т. е. $\alpha|x| \geqslant \lambda x$.

По второму пункту определения 1.3.1 из того, что $\alpha + \lambda \geqslant 0$ и $x^+ \geqslant 0$, получаем, что $\alpha x^+ \geqslant -\lambda x^+$, а из того, что $\alpha - \lambda \geqslant 0$ и $x^- \leqslant 0$, имеем $\alpha x^- \leqslant \lambda x^-$, значит, $-\alpha x^- \geqslant -\lambda x^-$. Отсюда по свойству (III) из леммы 1.1.1 выводим, что

$$\alpha|x| = \alpha x^+ - \alpha x^- \geqslant -\lambda x^+ - \lambda x^- = -\lambda x.$$

Из соотношений $\alpha|x| \geqslant \lambda x$ и $\alpha|x| \geqslant -\lambda x$ по определению точной верхней грани выводим, что $\alpha|x| \geqslant \lambda x \vee (-\lambda x) = |\lambda x|$. □

Следствие 1.3.1. *В решёточно упорядоченном векторном пространстве V над решёточно упорядоченным полем F для любых элементов $x \in V$, $\lambda \in F$ верно соотношение $|\lambda x| \leqslant |\lambda|\,|x|$.*

Доказательство. Так как поле F является решёточно упорядоченным, то для элементов λ и $-\lambda$ существует точная верхняя грань $|\lambda|$ и $|\lambda| \geqslant 0$. По лемме 1.3.2 для $\alpha = |\lambda|$ имеем неравенство $|\lambda x| \leqslant |\lambda|\,|x|$. □

Лемма 1.3.3. *В решёточно упорядоченном векторном пространстве V над частично упорядоченным полем F для любых элементов $x, y \in V$ и $\lambda \in F$, $\lambda \geqslant 0$, справедливы неравенства*

$$\lambda(x \wedge y) \leqslant \lambda x \wedge \lambda y, \quad \lambda(x \vee y) \geqslant \lambda x \vee \lambda y.$$

Доказательство. Пусть $x, y \in V$, $\lambda \in F$ и $\lambda \geqslant 0$. Поскольку $x \wedge y \leqslant x$ и $\lambda \geqslant 0$, то по второму пункту определения 1.3.1 $\lambda(x \wedge y) \leqslant \lambda x$. Так как $x \wedge y \leqslant y$, то аналогичные рассуждения дают неравенство $\lambda(x \wedge y) \leqslant \lambda y$. Из полученных соотношений по определению точной нижней грани выводим, что $\lambda(x \wedge y) \leqslant \lambda x \wedge \lambda y$. Используя данное неравенство и свойство (II) из леммы 1.1.1, получаем, что

$$\lambda(x \vee y) = \lambda(x + y) - \lambda(x \wedge y) \geqslant \lambda x + \lambda y - \lambda x \wedge \lambda y = \lambda x \vee \lambda y. \qquad \square$$

Предложение 1.3.1. *Пусть V — решёточно упорядоченное векторное пространство над частично упорядоченным полем F, удовлетворяющим условию* (1)*. Тогда для любых элементов $x, y \in V$ и $\lambda \in F$, $\lambda \geqslant 0$, верны равенства*

$$\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y, \quad \lambda(x \vee y) = \lambda x \vee \lambda y.$$

Доказательство. Пусть $x, y \in V$, $\lambda \in F$ и $\lambda \geqslant 0$. Так как в частично упорядоченном поле F выполнены соотношения $\lambda \geqslant 0$ и $1 \geqslant 0$, то из них ввиду равенства $1 = \lambda\lambda^{-1}$ по условию (1) следует неравенство $\lambda^{-1} \geqslant 0$.

По определению точной нижней грани имеем $\lambda x \wedge \lambda y \leqslant \lambda x$, откуда с учётом неравенства $\lambda^{-1} \geqslant 0$ по определению 1.3.1 заключаем, что $\lambda^{-1}(\lambda x \wedge \lambda y) \leqslant x$. С помощью аналогичных рассуждений можно получить неравенство $\lambda^{-1}(\lambda x \wedge \lambda y) \leqslant y$. Из выписанных соотношений и определения точной нижней грани выводим неравенство $\lambda^{-1}(\lambda x \wedge \lambda y) \leqslant x \wedge y$. Применим к этому выражению и неравенству $\lambda \geqslant 0$ определение 1.3.1. Тогда $\lambda x \wedge \lambda y \leqslant \lambda(x \wedge y)$. Учитывая неравенство из леммы 1.3.3, получаем требуемое равенство $\lambda(x \wedge y) = \lambda x \wedge \lambda y$.

С помощью свойства (II) из леммы 1.1.1 данное выражение преобразуется в выражение

$$\lambda(x \vee y) = \lambda(x + y) - \lambda(x \wedge y) = \lambda x + \lambda y - \lambda x \wedge \lambda y = \lambda x \vee \lambda y. \qquad \square$$

Замечание 1.3.1. Если V — решёточно упорядоченное векторное пространство над частично упорядоченным полем F, удовлетворяющим условию (1), то для любых элементов $x \in V$ и $\alpha \in F$, $\alpha \geqslant 0$, по предложению 1.3.1 справедливо равенство

$$\alpha|x| = \alpha(x \vee -x) = \alpha x \vee -\alpha x = |\alpha x|.$$

Если V — решёточно упорядоченное векторное пространство над решёточно упорядоченным полем F, удовлетворяющим условию (1), то для любых элементов $x \in V$ и $\lambda \in F$ по предложению 1.3.1 верно равенство

$$|\lambda|\,|x| = |\lambda|(x \vee -x) = |\lambda|x \vee -|\lambda|x = \big||\lambda|x\big|.$$

Лемма 1.3.4. *Пусть V — линейно упорядоченное векторное пространство над частично упорядоченным полем F. Тогда для любых элементов $x \in V$, $\lambda \in F$ найдётся элемент $\beta \in F$, для которого $|\lambda x| = \beta |x|$.*

Доказательство. Так как векторное пространство V по условию леммы линейно упорядоченное, то $\lambda x \geqslant 0$ или $\lambda x \leqslant 0$. В первом случае $|\lambda x| = \lambda x \vee (-\lambda x) = \lambda x$, во втором случае $|\lambda x| = -\lambda x$. В каждом из выписанных случаев рассмотрим два возможных в линейно упорядоченном векторном пространстве V соотношения для элемента $x \in V$, а именно $x \geqslant 0$ или $x \leqslant 0$.

Пусть $|\lambda x| = \lambda x$. Тогда $|\lambda x| = \lambda |x|$ при $x \geqslant 0$ и $|\lambda x| = -\lambda |x|$ при $x \leqslant 0$. Если же $|\lambda x| = -\lambda x$, то $|\lambda x| = -\lambda |x|$ при $x \geqslant 0$ и $|\lambda x| = \lambda |x|$ при $x \leqslant 0$.

Таким образом, рассмотрев все возможные варианты, приходим к выводу, что $|\lambda x| = \lambda |x|$ или $|\lambda x| = -\lambda |x|$. Поэтому существует элемент $\beta \in F$, для которого $|\lambda x| = \beta |x|$, где $\beta = \lambda$ или $\beta = -\lambda$. □

Лемма 1.3.5. *Пусть V — линейно упорядоченное векторное пространство над частично упорядоченным полем F. Тогда для любых элементов $x \in V$, $\alpha \in F$ выполняется соотношение $\alpha |x| \leqslant |\alpha x|$.*

Доказательство. Поскольку по условию леммы векторное пространство V линейно упорядоченное, то для элемента $x \in V$ верно одно из неравенств $x \geqslant 0$, $x \leqslant 0$. Следовательно, $|x| = x \vee (-x) = x$, если $x \geqslant 0$, и $|x| = -x$ при $x \leqslant 0$. В первом случае $\alpha |x| = \alpha x \leqslant |\alpha x|$, а во втором $\alpha |x| = -\alpha x \leqslant |\alpha x|$.

Таким образом, во всех случаях $\alpha |x| \leqslant |\alpha x|$. □

2. Идеалы в частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебрах

В данном разделе изучаются свойства различных видов l-идеалов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр над частично упорядоченными полями, рассмотрены свойства фактор-алгебр частично и решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр по выпуклому идеалу и l-идеалу, содержатся доказательства утверждений, раскрывающих взаимосвязь между l-идеалами в решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре и её фактор-алгебре по некоторому l-идеалу, изучаются свойства порядковых и l-гомоморфизмов l-алгебр над частично упорядоченными полями. Исследована взаимосвязь линейной упорядочиваемости произвольной алгебры и существования в ней центральной системы идеалов. Также в данном разделе вводится понятие спрямляющего l-идеала l-алгебры и изучается, как связан произвольный l-идеал l-алгебры с её спрямляющими l-идеалами. Кроме того, рассмотрена связь произвольной l-алгебры с некоторой декартовой суммой линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр над направленным полем.

2.1. Частично $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры. Примеры

В данном разделе введено определение порядка Копытова для произвольной алгебры над полем, эквивалентное определению упорядочения для алгебр Ли (см. [10]). Сформулированы и доказаны простейшие свойства частично упорядоченных и решёточно упорядоченных по Копытову линейных алгебр над полем. Исследуются свойства идеалов линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр и приведены примеры алгебр, для которых порядок Копытова на алгебре индуцирует порядок того же типа на различных алгебраических объектах, связанных с данной алгеброй. Также в этом разделе приведены примеры частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр над полями, порядки которых обладают различными свойствами. В каждом примере указан вид порядка на поле, над которым рассматривается алгебра.

Поскольку определение рассматриваемого в работе упорядочения линейных алгебр над полем было введено В. М. Копытовым для алгебр Ли (см. [10]), то для начала рассмотрим понятие частично упорядоченной алгебры Ли.

Определение 2.1.1 [10, с. 297]. Частично упорядоченной алгеброй Ли над частично упорядоченным полем F называется алгебра Ли L над полем F, на которой задано отношение порядка $\leqslant$, такое что

1) $\langle L; +; 0; -; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) для любых элементов $x, y \in L$, $\lambda \in F$ из неравенств $x \leqslant y$, $\lambda \geqslant 0$ следует $\lambda x \leqslant \lambda y$;
3) для любых элементов $x, y, z \in L$ из неравенства $x \leqslant y$ следует $x + [x, z] \leqslant \leqslant y + [y, z]$.

В зависимости от свойств частичного порядка $\leqslant$ аддитивной группы алгебры Ли над частично упорядоченным полем различают *направленные*, *решёточно упорядоченные* (*l-алгебры Ли*) и *линейно упорядоченные* алгебры Ли.

Рассмотрим порядок Копытова для произвольной линейной алгебры над частично упорядоченным полем.

Пусть F — частично упорядоченное поле и $A = \langle A; +; \cdot\rangle$ — линейная алгебра над полем F.

Определение 2.1.2. Скажем, что на алгебре A над частично упорядоченным полем F определён порядок Копытова ($\mathcal{K}$-порядок) $\leqslant$, если

1) $\langle A; +; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;
2) из $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;
3) из $0 \leqslant a$ следует, что $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a + ba$ для всех $b \in A$.

Если при этом группа $\langle A; +; \leqslant\rangle$ является линейно (решёточно) упорядоченной, то алгебра A над полем F называется *линейно* (*решёточно*) *$\mathcal{K}$-упорядоченной алгеброй*.

Замечание 2.1.1. Если $a > 0$ в частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре A, то $-a \leqslant ab, ba \leqslant a$ для всех $b \in A$.

Теорема 2.1.1. *Подмножество P алгебры L над частично упорядоченным полем F является множеством положительных элементов при некотором частичном порядке Копытова этой алгебры тогда и только тогда, когда множество P удовлетворяет следующим условиям:*

1) $P + P \subseteq P$;

2) *$\lambda P \subseteq P$ для всех $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;*
3) *$-P \cap P = \{0\}$;*
4) *$a + ax, a + xa \in P$ для всех $a \in P$, $x \in L$.*

Доказательство. Если на алгебре L задан частичный порядок Копытова, то свойства 1) и 3) имеют место в силу условия 1), свойство 2) — в силу условия 2), а свойство 4) — в силу условия 3).

Если множество $P \subseteq L$ обладает свойствами 1)—4), определим порядок на алгебре L следующим образом: для $a, b \in L$ считаем, что $a \leqslant b$, если $a - b \in P$. Тогда группа $\langle L; +\rangle$ является частично упорядоченной группой, т. е. выполняется условие 1). Свойство 2) влечёт выполнение условия 2), а свойство 4) — условия 3). $\square$

Множество P положительных элементов при некотором частичном порядке алгебры L будем называть, как обычно, *положительным конусом* в L.

Для алгебр Ли данная теорема доказана В. М. Копытовым [10, с. 298].

Определение 2.1.3. Пусть алгебра A над полем F удовлетворяет условиям 1) и 2) и $0 < a$, $a \in A$. Скажем, что элемент $b \in A$ бесконечно мал относительно элемента a ($b \ll a$), если $\lambda b \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$.

Предложение 2.1.1 (о транзитивности). *Если $c \ll b$ и $b \ll a$ для элементов $a > 0$, $b > 0$ частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры A над частично упорядоченным полем F, то $c \ll a$.*

Доказательство. Для любого $\lambda \in F$ имеем $\lambda c \leqslant b$ и $\lambda b \leqslant a$. При $\lambda = 1$ получаем, что $b \leqslant a$. Таким образом, $\lambda c \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$. $\square$

Предложение 2.1.2. *Если на алгебре A определён $\mathcal{K}$-порядок и $a > 0$, $a \in A$, то $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.*

Доказательство. По условию 3) определения 2.1.2 имеем $a + a\big(\lambda(-b)\big) = a - \lambda(ab) \geqslant 0$ и $a + \big(\lambda(-b)\big)a = a - \lambda(ba) \geqslant 0$ для любого $b \in A$ и $\lambda \in F$. $\square$

Следствие 2.1.1. *Если алгебра A удовлетворяет условиям* 1) *и* 2)*, то условие* 3) *равносильно условию*

3′) *из того, что $0 < a$, следует, что $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.*

Доказательство. Импликация 3) $\Longrightarrow$ 3′) справедлива по предложению 2.1.2.

Пусть выполняется условие 3′) и $a \geqslant 0$, $a \in A$. Если $a = 0$, то $0 \leqslant a + ab$ и $0 \leqslant a + ba$ для всех $b \in A$. Если $0 < a$, то из условия 3′) получаем, что $a(-b) \ll a$ и $(-b)a \ll a$, поэтому $a(-b) \leqslant a$ и $(-b)a \leqslant a$. Отсюда следует, что $a + ab \geqslant 0$ и $a + ba \geqslant 0$ для всех $b \in A$. $\square$

Таким образом, определение 2.1.3 позволяет дать эквивалентную формулировку определения частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры над полем.

Определение 2.1.4. Будем говорить, что на алгебре A над частично упорядоченным полем F определён порядок Копытова ($\mathcal{K}$-порядок) $\leqslant$, если

1) $\langle A; +; \leqslant\rangle$ — частично упорядоченная группа;

2) из $a \leqslant b$ следует, что $\lambda a \leqslant \lambda b$ для всех $a, b \in A$ и $\lambda > 0$, $\lambda \in F$;

3′) из $0 < a$ следует, что $ab \ll a$ и $ba \ll a$ для всех $b \in A$.

Условия 1) и 2) определений 2.1.2 и 2.1.4 означают, что A является частично упорядоченным векторным пространством над полем F.

Замечание 2.1.2. Заметим, что если алгебра A частично упорядоченная по Копытову, то в ней не может быть единицы.

Доказательство. Если упорядоченная по Копытову алгебра содержит единицу, то для любого строго положительного элемента $a \in A$ по условию 3′) будет выполнено $a \ll a$, что невозможно. □

Далее приведём примеры алгебр, частично упорядоченных по Копытову.

Пример 2.1.1. Пусть

$$A = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \right\} -$$

ассоциативная алгебра строго верхнетреугольных матриц порядка 3 над линейно упорядоченным полем действительных чисел $\mathbb{R}$. Будем считать, что $X \geqslant 0$ для $X \in A$, если в $\mathbb{R}$

$$\beta_1 > 0, \quad \text{или} \quad \beta_1 = 0,\ \beta_2 > 0, \quad \text{или} \quad \beta_1 = \beta_2 = 0,\ \beta_3 \geqslant 0. \tag{2}$$

Тогда $\langle A; +; \lambda; \leqslant \rangle$ — линейно упорядоченное векторное пространство над $\mathbb{R}$.

Если

$$X = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0,$$

то

$$X \geqslant XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1\gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad X \geqslant YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_2\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для любого элемента

$$Y = \begin{pmatrix} 0 & \gamma_1 & \gamma_3 \\ 0 & 0 & \gamma_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in A.$$

Поэтому на алгебре A определён порядок Копытова, являющийся линейным.

Рассмотрим в алгебре A положительные при данном порядке элементы

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0, \quad Y = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \geqslant 0.$$

Тогда

$$XY = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \leqslant 0.$$

Следовательно, относительно порядка (2) A не является частично упорядоченным ассоциативным кольцом (см., например, [32, гл. VI, § 1]).

Данный пример показывает, что понятия $\mathcal{K}$-порядка на ассоциативной алгебре и порядка ассоциативного кольца различны.

Пример 2.1.2. Пусть A — ассоциативная алгебра из примера 2.1.1. Рассмотрим алгебру Ли $B = A^{(-)}$, в которой

$$[X,Y] = XY - YX = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

для любых $X, Y \in A$. Тогда порядок (2) алгебры A индуцирует линейный порядок Копытова на алгебре Ли B.

Описанная в данном примере связь порядков вовсе не случайна. Далее будет показано, что указанное свойство присуще порядкам любых ассоциативных алгебр.

Пример 2.1.3. Если для ассоциативной алгебры

$$A = \left\{ X = \begin{pmatrix} 0 & \beta_1 & \beta_3 \\ 0 & 0 & \beta_2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;\middle|\; \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

из примера 2.1.1 считать, что $X \geqslant 0$ тогда и только тогда, когда $\beta_1 > 0$, $\beta_2 > 0$ или $\beta_1 = \beta_2 = 0$, $\beta_3 \geqslant 0$ в $\mathbb{R}$, то получим, что $\langle A; \leqslant \rangle$ является направленной алгеброй с порядком Копытова, но не является решёточно упорядоченной алгеброй. При этом введённый на алгебре A порядок индуцирует $\mathcal{K}$-порядок на алгебре Ли $A^{(-)}$ (см. пример 2.1.2).

Пример 2.1.4. Введём на четырёхмерном векторном пространстве L над частично упорядоченным полем F бинарную операцию $[\,,\,]$. Для этого зададим произведения базисных элементов e_i $(i = 1, 2, 3, 4)$:

$[\,,\,]$	e_1	e_2	e_3	e_4
e_1	0	e_4	0	0
e_2	$-e_4$	0	0	0
e_3	0	0	0	0
e_4	0	0	0	0

Так как произвольные элементы $x, y \in L$ однозначно записываются в виде

$$x = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i e_i,$$

где $\beta_i, \gamma_i \in F$, то согласно таблице их коммутатор равен $[x,y] = (\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1)e_4$.

Поскольку $\big[[L,L],L\big] = 0$, то все коммутаторы в тождестве Якоби равны нулю, следовательно, тождество верно. Таким образом, $\langle L; +; 0; -; \lambda; [\,,\,] \rangle$ является алгеброй Ли.

Зададим на L бинарное отношение $\leqslant$ следующим образом: для элементов

$$x = \sum_{i=1}^{4} \beta_i e_i, \quad y = \sum_{i=1}^{4} \gamma_i e_i$$

считаем, что $x \leqslant y$ в одном из трёх случаев:

1) $\beta_1 < \gamma_1$;
2) $\beta_1 = \gamma_1$, $\beta_2 < \gamma_2$;
3) $\beta_1 = \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_2$, $\beta_3 \leqslant \gamma_3$, $\beta_4 \leqslant \gamma_4$.

Так как поле F частично упорядоченно, то легко устанавливается наличие у данного бинарного отношения свойств рефлексивности, антисимметричности и транзитивности, а также выполнение первых двух условий определения частично упорядоченной алгебры Ли.

Рассмотрим произвольные элементы $x, y \in L$, для которых $x \leqslant y$, и $z = \sum_{i=1}^{4} \delta_i e_i \in L$ и покажем, что $x + [x, z] \leqslant y + [y, z]$. Действительно,

$$x + [x, z] = \beta_1 e_1 + \beta_2 e_2 + \beta_3 e_3 + (\beta_4 + \beta_1 \delta_2 - \delta_1 \beta_2) e_4,$$
$$y + [y, z] = \gamma_1 e_1 + \gamma_2 e_2 + \gamma_3 e_3 + (\gamma_4 + \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2) e_4.$$

Поскольку $x \leqslant y$, то возможны следующие случаи:

1) $\beta_1 < \gamma_1$ или $\beta_1 = \gamma_1, \beta_2 < \gamma_2$. Тогда $x + [x, z] \leqslant y + [y, z]$;
2) $\beta_1 = \gamma_1$, $\beta_2 = \gamma_2$, $\beta_3 \leqslant \gamma_3$, $\beta_4 \leqslant \gamma_4$. Из данных соотношений получаем, что $\beta_1 \delta_2 - \delta_1 \beta_2 = \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2$, и следовательно, в силу частичной упорядоченности поля F справедливо $\beta_4 + \beta_1 \delta_2 - \delta_1 \beta_2 \leqslant \gamma_4 + \gamma_1 \delta_2 - \delta_1 \gamma_2$. Отсюда по правилу задания отношения $\leqslant$ получаем, что $x + [x, z] \leqslant y + [y, z]$.

Таким образом, алгебра Ли L является частично упорядоченной алгеброй Ли над частично упорядоченным полем относительно введённого отношения порядка. Кроме того, если поле F линейно упорядоченное, то алгебра Ли L является решёточно упорядоченной.

Пример 2.1.5. Пусть $A = \langle A; +; \cdot \rangle$ — ассоциативная алгебра над полем F, радикальная по Джекобсону, с $\mathcal{K}$-порядком $\leqslant$.

Рассмотрим $G = \langle A; \circ \rangle$ — группу квазирегулярных элементов, где $a \circ b = a + b - ab$ для $a, b \in A$ (см. [2, гл. 1, § 3; 7, гл. 1, § 5]). Положим $P(G) = P(A) = \{a \in A \mid a \geqslant 0\}$. Покажем, что $P(G)$ — положительный конус группы G.

Пусть $a, b \in P(G)$. Тогда $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ в алгебре A. Если $b = 0$, то $a \circ b = a \geqslant 0$ и $a \circ b \in P(G)$. Если $b > 0$, то $a \circ b = a + (b + (-a)b) = a + c$, где $c \geqslant 0$ по условию 3) определения 2.1.2. Следовательно, $a + c \geqslant 0$ в A и $a \circ b \in P(G)$. Значит, $P(G) \circ P(G) \subseteq P(G)$.

Если $x \in P(G) \cap P(G)^{-1}$, то $x \in P(G)$ и $x^{-1} \in P(G)$, где $x \circ x^{-1} = 0$, поскольку единица группы G равна нулю алгебры A. Отсюда следует, что $x \geqslant 0$ и $x^{-1} \geqslant 0$. Так как $x + x^{-1} - xx^{-1} = 0$, то $-x = x^{-1} - xx^{-1}$. При этом из того, что $x^{-1} \geqslant 0$, по условию 3) выводим, что $x^{-1} - xx^{-1} \geqslant 0$. Отсюда получаем $x \geqslant 0$ и $-x \geqslant 0$, поэтому $x = 0$. Таким образом, $P(G) \cap P(G)^{-1} = \{0\}$.

Пусть $a \in P(G)$ и $x \circ x^{-1} = x^{-1} \circ x = 0$ для элемента $x \in A$. Тогда

$$x \circ a \circ x^{-1} = (x + a - xa) \circ x^{-1} = \\ = x + a - xa + x^{-1} - xx^{-1} - ax^{-1} + xax^{-1} = (a - xa) - (a - xa)x^{-1}.$$

Так как $a \geqslant 0$, то по условию 3) $a - xa \geqslant 0$, откуда получаем, что $x \circ a \circ x^{-1} \in \in P(G)$. Следовательно, $x \circ P(G) \circ x^{-1} \subseteq P(G)$. Таким образом, $P(G)$ — положительный конус группы G.

Итак, $\mathcal{K}$-порядок радикальной по Джекобсону алгебры A индуцирует порядок на группе её квазирегулярных элементов.

Пример 2.1.6. Пусть F — поле и $T = F[x_1, x_2, \ldots, x_d]$ — кольцо полиномов над F от свободных образующих $x_1, x_2, \ldots, x_d$. Рассмотрим градуировку на данной алгебре T, т. е. её разложение в прямую сумму

$$T = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n = T_0 \oplus T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \oplus \ldots,$$

где $T_0 = F$, а подпространство T_n однородных полиномов степени n имеет базис из d^n элементов вида $x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_n}$. При этом $T_i T_j \subset T_{i+j}$.

Рассмотрим подалгебру

$$A = T_1 \oplus \ldots \oplus T_n \oplus \ldots$$

алгебры T. Упорядочим базис T_n $(n = 1, 2, \ldots)$ линейно, а элементы T_n лексикографически. При этом будем считать, что каждый полином из базиса T_{n-1} $(n = 2, 3, \ldots)$ больше любого элемента базиса T_n. Тогда на A будет задано отношение линейного лексикографического порядка, для которого выполняются условия 1) и 2) определения 2.1.4. Пусть $f \geqslant 0$ в A и f содержит слагаемые только степени больше, чем $m \geqslant 1$. Тогда благодаря включению $T_i T_j \subset T_{i+j}$ для любого $g \in A$ и $\lambda \in F$ слагаемые произведения $\lambda(fg)$ принадлежат только тем алгебрам T_n, для которых $n > m$. По правилу задания порядка на A получаем, что $f \geqslant \lambda(fg)$ для всех $\lambda \in F$. Следовательно, $fg \ll f$ для любого $g \in A$, т. е. выполнено условие 3′) определения 2.1.4. Таким образом, алгебра A линейно упорядоченная по Копытову.

Пример 2.1.7. Рассмотрим алгебру Голода A — бесконечномерную алгебру, градуированную по построению (см., например, [6; 9, с. 215). Ввиду примера 2.1.6 A является линейно упорядочиваемой по Копытову алгеброй. Известно, что алгебра A радикальна по Джекобсону, поэтому из примера 2.1.5 следует, что линейный $\mathcal{K}$-порядок на алгебре Голода A индуцирует линейный порядок на группе $\langle A; \circ \rangle$ её квазирегулярных элементов. Также алгебра A является ненильпотентной ниль-алгеброй. Присоединим к алгебре Голода A единицу и рассмотрим мультипликативную группу $G = \{1 + a \mid a \in A\}$. Рассмотрим множество $P = \{1 + a \mid a \geqslant 0 \text{ в } A\}$ и покажем, что P является положительным конусом для G.

Пусть $1 + a, 1 + b \in P$. Если $b = 0$, то $(1 + a)(1 + b) = 1 + a \in P$. Если $b > 0$, то $(1+a)(1+b) = 1+a+(b+ab)$, где $b+ab \geqslant 0$ по условию 3) определения 2.1.2, откуда следует, что $a+b+ab \geqslant 0$. Следовательно, $(1+a)(1+b) \in P$, т. е. $PP \subseteq P$.

Пусть $1+a \in P \cap P^{-1}$. Тогда $1+a \in P$ и для элемента $1+b$, для которого $(1+a)(1+b)=1$, имеем $1+b \in P$. Из равенства $1+a+b+ab=1$ следует, что $a+b+ab=0$. Если $b=0$, то $a=0$. Если $b>0$, то $b+ab \geqslant 0$ по условию 3), поэтому $-a \geqslant 0$. Значит, $a=0$ и $P \cap P^{-1}=\{1\}$.

Пусть $1+a \in G$, $1+c \in P$, т. е. $c \geqslant 0$ в A. Рассмотрим $(1+a)^{-1}=1+b \in G$ и $x=(1+a)(1+c)(1+b)$. Если $c=0$, то $x=1 \in P$. При $c>0$ по условию 3) имеем $c+cb \geqslant 0$, откуда следует, что $x=(1+a)(1+b+c+cb)=(1+a)(1+b)+ + (c+cb)+a(c+cb)$, где $(1+a)(1+b)=1$ и $(c+cb)+a(c+cb) \geqslant 0$. Значит, $x \in P$. Следовательно, G — упорядоченная группа.

Таким образом, порядок Копытова алгебры A индуцирует порядок на группе G.

Отметим, что так как по определению 2.1.2 l-алгебра L над частично упорядоченным полем F является аддитивной l-группой, то для l-алгебр справедливы все утверждения, верные для аддитивных l-групп.

Предложение 2.1.3. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F. Тогда для любого положительного $a \in L$ и любых элементов $x \in L$, $\lambda \in F$ справедливы неравенства $|\lambda(ax)| \leqslant a$ и $|\lambda(xa)| \leqslant a$.*

Доказательство. Так как $a>0$, то по пункту $3')$ определения 2.1.4 имеем, что $ax \ll a$ и $xa \ll a$ для всех $x \in L$. Следовательно, $\lambda(ax) \leqslant a$ и $-\lambda(ax) \leqslant a$ для любого $\lambda \in F$, что влечёт $|\lambda(ax)|=\lambda(ax) \vee -\lambda(ax) \leqslant a$. □

Предложение 2.1.4. *В l-алгебре L над частично упорядоченным полем для любых элементов $x, y \in L$ выполняются неравенства $|xy| \leqslant |x|$ и $|yx| \leqslant |x|$.*

Доказательство. Используя свойства (III) и (IV) из леммы 1.1.1, получаем

$$|xy|=|(x^{+}+x^{-})y|=|x^{+}y+x^{-}y| \leqslant |x^{+}y|+|x^{-}y|.$$

Так как по предложению 2.1.3 $|x^{+}y| \leqslant x^{+}$ и $|x^{-}y|=|(-x^{-})y| \leqslant -x^{-}$, то, учитывая свойство (III) из леммы 1.1.1, имеем $|xy| \leqslant x^{+}-x^{-}=|x|$. Аналогично доказывается неравенство $|yx| \leqslant |x|$. □

Предложение 2.1.5. *Пусть L — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F. Тогда для любого положительного $a \in L$ и любого $x \in L$ справедливы неравенства $|ax| \ll a$ и $|xa| \ll a$.*

Доказательство. Из леммы 1.3.5 известно, что для любого $\lambda \in F$ верно $\lambda|ax| \leqslant |\lambda(ax)|$, при этом для $a>0$ по предложению 2.1.3 $|\lambda(ax)| \leqslant a$. Значит, $\lambda|ax| \leqslant a$ для любого $\lambda \in F$, т. е. по определению 2.1.3 $|ax| \ll a$. □

Предложение 2.1.6. *Если L — l-алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию (1), то для любого положительного $a \in L$ и любого $x \in L$ справедливы неравенства $|ax| \ll a$ и $|xa| \ll a$.*

Доказательство. В силу направленности поля F для каждого $\lambda \in F$ найдётся такой элемент $\alpha \in F$, что $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant \lambda$. Тогда по определению 2.1.4 из неравенств $\alpha - \lambda \geqslant 0$ и $|ax| \geqslant 0$ следует $\alpha|ax| \geqslant \lambda|ax|$. По замечанию 1.3.1 справедливо равенство $\alpha|ax| = |\alpha(ax)|$. Кроме того, для $a > 0$ по предложению 2.1.3 получаем $|\alpha(ax)| \leqslant a$. Следовательно, $\lambda|ax| \leqslant a$ для любого $\lambda \in F$, и поэтому по определению 2.1.3 $|ax| \ll a$. □

2.2. Идеалы и l-идеалы l-алгебр. Свойства l-идеалов

Двусторонним идеалом (или *идеалом*) линейной алгебры L над полем F называется такое подпространство I в L, что $xy, yx \in I$ для любых элементов $x \in I$ и $y \in L$.

Пусть A — частично упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F, $a \in A$, $a > 0$, и $M_a = \{x \in A \mid x \ll a\}$.

Теорема 2.2.1. *Если $\langle A; +\rangle$ — линейно упорядоченная группа, то M_a — двусторонний идеал в алгебре A.*

Доказательство. Пусть $b, c \in M_a$, но $b + c \notin M_a$. Тогда $\beta b \leqslant a$ и $\beta c \leqslant a$ для всех $\beta \in F$, при этом найдётся элемент $\lambda \in F$, для которого справедливо $a < \lambda(b + c) = \lambda b + \lambda c$. Из условия теоремы следует, что $\lambda b \leqslant \lambda c$ или $\lambda c \leqslant \lambda b$. Отсюда получаем, что $a < 2\lambda c$ или $a < 2\lambda b$, что противоречит выбору b и c. Значит, $b + c \in M_a$.

Так как для любых элементов $b \in M_a$, $\lambda \in F$ и $\gamma \in F$ выполняется соотношение $\lambda(\gamma b) = (\lambda\gamma)b \leqslant a$, то $\gamma b \in M_a$, и поэтому M_a — подпространство в A.

Для $b \in M_a$ по условию теоремы $b > 0$ или $b \leqslant 0$. Пусть $x \in A$. При $b > 0$ по предложению 2.1.2 имеем $bx \ll b$ и $xb \ll b$. Тогда по предложению 2.1.1 получаем, что $bx \ll a$ и $xb \ll a$, т. е. $bx, xb \in M_a$. При $b = 0$ ясно, что $bx, xb \in M_a$. Если $b < 0$, то $-b > 0$, поэтому по предложению 2.1.2 $bx = (-b)(-x) \ll -b$ и $xb = (-x)(-b) \ll -b$, где $-b \in M_a$ по доказанному выше. Отсюда по транзитивности следует, что $bx \ll a$ и $xb \ll a$, и значит, $bx, xb \in M_a$. □

Как показывает следующее утверждение, линейный $\mathcal{K}$-порядок ассоциативной алгебры A индуцирует $\mathcal{K}$-порядок на алгебре Ли $A^{(-)}$.

Предложение 2.2.1. *Пусть A — линейно упорядоченная по Копытову ассоциативная алгебра над линейно упорядоченным полем. Тогда алгебра Ли $A^{(-)}$ ассоциативной алгебры A также является линейно упорядоченной по Копытову.*

Доказательство. Действительно, условия 1) и 2) определения 2.1.4 выполнены в $A^{(-)}$, поскольку они выполнены в A. Если $a \geqslant 0$ в $A^{(-)}$, то по условию $3'$) для A имеем $ab \ll a$ и $ba \ll a$, откуда по теореме 2.2.1 получаем, что $[a, b] = ab - ba \ll a$. Значит, для $A^{(-)}$ выполняется условие $3'$) определения 2.1.4. □

Следствие 2.2.1. *Если A — ассоциативная алгебра, линейно упорядоченная по Копытову и B — подалгебра в A, то $\mathcal{K}$-порядок на A индуцирует линейный порядок Копытова на алгебре Ли $B^{(-)}$ ассоциативной алгебры B.*

Идеал I частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем F называется *выпуклым*, если I является выпуклым подмножеством в L, т. е. для любых элементов $x, y, z \in L$ из $x, y \in I$ и $x \leqslant z \leqslant y$ следует, что $z \in I$.

Теорема 2.2.2. *Если A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F, то M_a — выпуклый идеал в A и $M_a \neq A$.*

Доказательство. Пусть $b, c \in M_a$, $x \in A$ и $b \leqslant x \leqslant c$. Для элемента $\lambda \in F$ по условию теоремы имеем $\lambda < 0$ или $\lambda \geqslant 0$. При $\lambda > 0$ по условию 2) определения 2.1.2 получаем $\lambda x \leqslant \lambda c$, где $\lambda c \leqslant a$, откуда следует, что $\lambda x \leqslant a$. Далее, $-c \leqslant -x \leqslant -b$. Если $\lambda < 0$, то $-\lambda > 0$, поэтому по условию 2) имеем $(-\lambda)(-c) \leqslant (-\lambda)(-x) \leqslant (-\lambda)(-b)$, т. е. $\lambda x \leqslant \lambda b$, где $\lambda b \leqslant a$. Отсюда следует, что $\lambda x \leqslant a$.

Таким образом, $\lambda x \leqslant a$ для всех $\lambda \in F$, т. е. $x \ll a$ и, значит, $x \in M_a$. Итак, M_a — выпуклый идеал и при этом $M_a \neq A$, так как $a \notin M_a$. □

Предложение 2.2.2. *Пусть A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F и $b > 0$, $b \in A \setminus M_a$. Тогда $x \ll b$ для всех $x \in M_a$ и $M_a \subseteq M_b$.*

Доказательство. Пусть $x \in M_a$. Если существует $\lambda \in F$, для которого $b \leqslant \lambda x$, то $b \in M_a$ в силу выпуклости идеала M_a, что противоречит выбору элемента b. Значит, $\lambda x \leqslant b$ для всех $\lambda \in F$, т. е. $x \ll b$. Следовательно, $M_a \subseteq M_b$. □

Предложение 2.2.3. *Если I — выпуклое направленное подпространство в частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре A над частично упорядоченным полем F, то I является идеалом в A.*

Доказательство. Пусть $x \in A$, $y \in I$. Если $y > 0$, то по замечанию 2.1.1 $-y \leqslant xy, yx \leqslant y$, откуда в силу выпуклости I имеем, что $xy, yx \in I$. Если $y < 0$, то $-y > 0$ и по доказанному выше $-xy \in I$, откуда следует, что $xy \in I$. В случае когда $y \parallel 0$, существуют элементы $a, b \in I$, такие что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$ и $y = a - b$ (см., например, [32, гл. 2, § 1, предложение 1]). Тогда $xy = xa - xb$, при этом по доказанному выше имеем $xa, xb \in I$, откуда следует, что $xy \in I$. Аналогично $yx \in I$. □

Предложение 2.2.4. *Следующие условия на идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем F эквивалентны*:

1) *I — выпуклая подрешётка в L*;
2) *если $x \in I$, $y \in L$ и $|y| \leqslant |x|$, то $y \in I$ для любых $x \in I$, $y \in L$.*

Определение 2.2.1. Выпуклый идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем F, являющийся подрешёткой в L, называется l-идеалом.

Лемма 2.2.1. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, I — l-идеал в L и $a \in L$, то $a \in I$ в том и только в том случае, когда $|a| \in I$.*

Доказательство. Если $a \in I$, то для l-идеала I, являющегося по определению 2.2.1 подрешёткой в L, имеем $|a| = a \vee (-a) \in I$. Обратно, пусть $|a| \in I$. Из свойства (III) из леммы 1.1.1 следует, что $a = a^+ + a^+ - |a|$. Поскольку $0 \leqslant a^+ \leqslant |a|$, а l-идеал I является по определению 2.2.1 выпуклым идеалом, то $a^+ \in I$. Значит, $a \in I$. $\square$

Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем, $M \subseteq L$ — подмножество в L и $\{M_i \mid i \in \mathfrak{I}\}$ — семейство всех l-идеалов алгебры L, для которых $M \subseteq M_i$. Обозначим через $I_M = \bigcap\limits_{i \in \mathfrak{I}} M_i$ наименьший l-идеал в L, содержащий множество M. Если $M = \{a\}$, то данный идеал будем обозначать I_a, а через (a) обозначим наименьший идеал в L, содержащий элемент a, т. е. $(a) = \bigcap\limits_{j \in \mathcal{J}} M_j$, где $\{M_j \mid j \in \mathcal{J}\}$ — множество всех идеалов в L, таких что $a \in M_j$.

Замечание 2.2.1. Для любого элемента a l-алгебры L над частично упорядоченным полем F имеет место включение $(a) \subseteq I_a$, поскольку $a \in I_a$, а идеал (a) является наименьшим идеалом в L, содержащим элемент a.

Дадим описание в произвольной l-алгебре L l-идеала I_a для $a \in L$.

Предложение 2.2.5. *В любой l-алгебре L над направленным полем F наименьший l-идеал I_a, содержащий элемент a, совпадает с множеством*

$$M = \{x \in L \mid |x| \leqslant \gamma_x |a|,\ \gamma_x \in F\}.$$

Доказательство. Так как $a \in I_a$ и l-идеал I_a является выпуклым, то по лемме 2.2.1 получаем, что $M \subseteq I_a$.

Докажем, что M — l-идеал в L, содержащий элемент a. Пусть $x, y \in M$ и $\lambda \in F$. Тогда $|x| \leqslant \gamma_x |a|$ и $|y| \leqslant \gamma_y |a|$. Используя свойство (IV) леммы 1.1.1, получаем, что

$$|x - y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \gamma_x |a| + \gamma_y |a| = (\gamma_x + \gamma_y)|a|,$$

т. е. $x - y \in M$. Для $\lambda \in F$ по лемме 1.3.2 найдётся элемент $\alpha \geqslant 0$, $\alpha \in F$, для которого $|\lambda x| \leqslant \alpha |x|$, откуда по определению 2.1.2 получаем, что $|\lambda x| \leqslant (\alpha \gamma_x)|a|$. Таким образом, $\lambda x \in M$.

Пусть $z \in L$. Так как $|xz|, |zx| \leqslant |x|$ по предложению 2.1.4, то $xz, zx \in M$.

Поскольку для элементов $x \in M$, $y \in L$, удовлетворяющих условию $|y| \leqslant |x|$, верно, что $y \in M$, то по предложению 2.2.4 M — l-идеал l-алгебры L.

Если рассмотреть элемент $x = a$ и взять $\gamma_x = 1$, то получим верное неравенство $|a| \leqslant |a|$, поэтому $a \in M$. $\square$

Замечание 2.2.2. Ввиду предложения 2.2.5 можно сделать вывод о том, что $I_a = I_{-a} = I_{|a|}$ для любого элемента a l-алгебры L над направленным полем.

Отметим, что $M_{|a|} \subseteq I_a$ для любого элемента a l-алгебры L над направленным полем, где $M_{|a|} = \{x \in L \mid x \ll |a|\}$.

Лемма 2.2.2. *В l-алгебре Ли L над направленным полем $(a) = I_a$ тогда и только тогда, когда идеал (a) является выпуклым и $|a| \in (a)$.*

Доказательство. Если $(a) = I_a$, то (a) — выпуклый идеал и $|a| \in (a)$.

Пусть (a) — выпуклый идеал и $|a| \in (a)$. По замечанию 2.2.1 имеем $(a) \subseteq I_a$. Покажем, что $I_a \subseteq (a)$. Для $x \in I_a$ по предложению 2.2.5 имеем $|x| \leqslant \gamma_x |a|$, где $\gamma_x \in F$. Отсюда ввиду выпуклости идеала (a), для которого $|a| \in (a)$, получаем, что $|x| \in (a)$. Так как $0 \leqslant x^+ \leqslant |x|$ по определению положительной части и модуля элемента, то $x^+ \in (a)$, откуда, учитывая свойство (III) из леммы 1.1.1, выводим, что $x \in (a)$. □

Лемма 2.2.3. *Теоретико-множественное объединение идеалов любой возрастающей цепочки l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F является l-идеалом в L.*

Доказательство. Пусть $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$ — возрастающая цепочка l-идеалов l-алгебры L и $J = \bigcup\limits_{i \in I} J_i$. Если $x, y \in J$, $\lambda \in F$, $z \in L$, то $x \in J_i$, $y \in J_j$ для некоторых $i, j \in I$. Для l-идеалов J_i, J_j верно $J_i \subseteq J_j$ или $J_j \subseteq J_i$. Пусть для определённости $J_i \subseteq J_j$. Тогда $x+y$, λx, xz, $zx \in J_j$. Значит, J — идеал в L. Кроме того, если $x \in J$, $z \in L$ таковы, что $|z| \leqslant |x|$, то по предложению 2.2.4 для $x \in J_i$ имеем $z \in J_i$. Следовательно, J является по предложению 2.2.4 l-идеалом в L. □

Лемма 2.2.4. *Сумма l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F является l-идеалом в L.*

Доказательство. Рассмотрим идеал $I + J = \{x + y \mid x \in I,\ y \in J\}$ для l-идеалов I и J l-алгебры L. Так как I и J — выпуклые нормальные l-подгруппы абелевой l-группы L и при этом известно, что сумма выпуклых нормальных l-подгрупп любой l-группы G является выпуклой нормальной l-подгруппой в G (см., например, [32, с. 116]), то $I + J$ — выпуклая подрешётка l-группы L, а значит, и l-алгебры L. □

Лемма 2.2.5. *Пересечение любого множества l-идеалов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем F также является l-идеалом в L.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \{J_i - l\text{-идеалы в } L,\ i \in I\}$ и $J = \bigcap\limits_{i \in I} J_i$. Тогда J является выпуклой нормальной l-подгруппой аддитивной l-группы L как пересечение выпуклых нормальных l-подгрупп (см. [32, с. 116; 12, с. 40]). Ясно, что J — идеал в L. При этом по предложению 2.2.4 J — l-идеал в L. □

Известно, что множество идеалов линейной алгебры L над полем F образует решётку и при этом $I \wedge J = I \cap J$ и $I \vee J = I + J$ для любых идеалов I и J в L.

Определение 2.2.2. Решёточно упорядоченная по включению система $\mathcal{P}(L)$ идеалов алгебры L называется полной, если $\mathcal{P}(L)$ содержит точную верхнюю и точную нижнюю грани любого множества идеалов из $\mathcal{P}(L)$, т. е. если $\mathcal{P}(L)$ — полная решётка.

Теорема 2.2.3. *Множество всех l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F является полной подрешёткой решётки всех её идеалов.*

Доказательство. Если I, J — l-идеалы l-алгебры L, то $I \wedge J = I \cap J$ и $I \vee J = I + J$ в решётке идеалов алгебры L, при этом по леммам 2.2.4 и 2.2.5 $I \cap J$ и $I + J$ — l-идеалы в L. Значит, по определению подрешётки множество всех l-идеалов l-алгебры L есть подрешётка в решётке всех её идеалов. Кроме того, из леммы 2.2.5 получаем, что точная нижняя грань для любого множества l-идеалов является l-идеалом.

Для любого множества l-идеалов J_α $(\alpha \in A)$ l-алгебры L рассмотрим

$$I = \{x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s} \mid x_{\alpha_i} \in J_{\alpha_i}\} -$$

множество всевозможных конечных сумм элементов идеалов J_α $(\alpha \in A)$. Если $x, y \in I$, $\lambda \in F$ и $z \in L$, то

$$\begin{gathered} x - y = x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_s} - y_{\beta_1} - y_{\beta_2} - \ldots - y_{\beta_t}, \\ \lambda x = \lambda x_{\alpha_1} + \lambda x_{\alpha_2} + \ldots + \lambda x_{\alpha_s}, \\ xz = x_{\alpha_1} z + x_{\alpha_2} z + \ldots + x_{\alpha_s} z. \end{gathered}$$

По построению множества I ясно, что $x - y \in I$. Так как $x_{\alpha_i} \in J_{\alpha_i}$ и J_{α_i} — идеал в L, то $\lambda x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i} z \in J_{\alpha_i}$, поэтому $\lambda x, xz \in I$. Следовательно, I — идеал в L, такой что $J_\alpha \subseteq I$ для любого $\alpha \in A$.

Известно (см. [12, с. 40]), что построенное множество I является выпуклой l-подгруппой в L, порождённой множеством $\{J_\alpha,\ \alpha \in A\}$ выпуклых l-подгрупп l-группы L. Значит, I — l-идеал в L. При этом ясно, что для l-идеала J в L из того, что $J_\alpha \subseteq J$ для любого $\alpha \in A$, следует, что $I \subseteq J$. Таким образом, l-идеал I — точная верхняя грань l-идеалов J_α $(\alpha \in A)$. □

В дальнейшем решётку l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F будем обозначать через $\mathcal{L}(L)$, а операции объединения и пересечения в $\mathcal{L}(L)$ — через $\bigvee^*$ и $\bigwedge^*$ соответственно.

Ввиду теоремы 2.2.3 можно сформулировать следующее определение.

Определение 2.2.3. Для любого множества l-идеалов $\{I_\alpha \mid \alpha \in \mathfrak{I}\}$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F назовём их суммой l-идеал $I = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{I}} I_\alpha$, порождённый объединением $\bigvee\limits_{\alpha \in \mathfrak{I}}^* I_\alpha$, т. е. l-идеал, состоящий из всех элементов x, представимых в виде $x = x_1 + \ldots + x_m$, где $x_k \in I_{\alpha_k}$ для некоторых $\alpha_k \in \mathfrak{I}$.

Предложение 2.2.6. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, $x \in L$, $x \neq 0$. Тогда множество $\{J_\alpha(x),\ \alpha \in I\}$ l-идеалов l-алгебры L, максимальных среди l-идеалов, не содержащих элемента x, непусто.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M} = \{J - l\text{-идеал в } L \mid x \notin J\}$. Множество $\mathcal{M}$ непусто, так как $x \notin \{0\}$, и поэтому $\{0\} \in \mathcal{M}$. Заметим, что по теореме 2.2.3 множество $\mathcal{L}(L)$ всех l-идеалов l-алгебры L решёточно упорядоченное по включению. Так как $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{L}(L)$, то $\mathcal{M}$ частично упорядоченное относительно индуцированного порядка. Для возрастающей цепочки $J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots$

l-идеалов $J_i \in \mathcal{M}$ по лемме 2.2.3 получаем, что $J' = \bigcup J_n$ — l-идеал в L. При этом ясно, что $x \notin J'$. Поскольку $J_i \subseteq J'$ для любого i, то J' — верхняя грань для l-идеалов рассматриваемой цепочки. Тогда по лемме Цорна в $\mathcal{M}$ существуют максимальные элементы, которые обозначим через $J_\alpha(x)$. □

Лемма 2.2.6. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем F, удовлетворяющим условию* (1). *Если J — l-идеал в L и $a \in L$, $a > 0$, то множество $C = \{y \in L \mid |y| \wedge a \in J\}$ является l-идеалом l-алгебры L, содержащим J.*

Доказательство. Пусть $y \in J$. Тогда $|y| \in J$ и $0 \leqslant |y| \wedge a \leqslant |y|$. Так как J — выпуклый идеал, то $|y| \wedge a \in J$ и, значит, $y \in C$. Таким образом, $J \subseteq C$.

Покажем, что C — l-идеал в L. Пусть $y \in C$ и $z \in C$. Обозначим $0 \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$ и $0 \leqslant |z| \wedge a = c_2 \in J$. Рассмотрим $|y - z| \wedge a$. По свойствам (I) и (IV) из леммы 1.1.1 и определению точной нижней грани имеем

$$
\begin{aligned}
|y - z| \wedge a &\leqslant (|y| + |z|) \wedge a \leqslant (|y| + |z|) \wedge (a + |y| \wedge 0) = \\
&= (|y| + |z|) \wedge (|y| + a) \wedge a = \big(|y| + (|z| \wedge a)\big) \wedge a = \\
&= (|y| + c_2) \wedge a \leqslant (|y| + c_2) \wedge (a + c_2) = c_2 + (|y| \wedge a) = c_2 + c_1 \in J.
\end{aligned}
$$

Из задания множества C и выпуклости J имеем $y - z \in C$, т. е. C — подгруппа в L.

Из леммы 1.3.2 и определения точной нижней грани следует, что $|\lambda y| \wedge a \leqslant \alpha |y| \wedge a$, где $\alpha \in F$, $\alpha \geqslant 0$ и $\alpha \geqslant \lambda$. Так как поле F является направленным, то существует элемент $\beta \in F$, такой что $\beta \geqslant \alpha$ и $\beta \geqslant 1$. Тогда для элементов $\beta \in F$, $|y| \geqslant 0$ и $a > 0$ по определению 2.1.2 выполняются соотношения $\alpha|y| \leqslant \beta|y|$ и $a < \beta a$, из которых по определению точной нижней грани следует, что $\alpha|y| \wedge a \leqslant \beta|y| \wedge \beta a$. Отсюда по предложению 1.3.1 в силу того, что $\beta \geqslant 1 \geqslant 0$, получаем равенство $\beta|y| \wedge \beta a = \beta(|y| \wedge a)$. Итак, $|\lambda y| \wedge a \leqslant \beta(|y| \wedge a) = \beta c_1 \in J$. Учитывая выпуклость J, имеем $\lambda y \in C$, поэтому C — подпространство в L.

Если $z \in L$, то $|yz|, |zy| \leqslant |y|$ по предложению 2.1.4. Тогда по определению точной нижней грани заключаем, что $|yz| \wedge a \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$, откуда ввиду выпуклости идеала J и задания множества C следует, что $yz \in C$. Значит, C — идеал в L.

Пусть $z \in L$, $y \in C$ и $|z| \leqslant |y|$. Тогда $|z| \wedge a \leqslant |y| \wedge a = c_1 \in J$. Используя выпуклость идеала J, заключаем, что $z \in C$. Таким образом, C является по предложению 2.2.4 l-идеалом в l-алгебре L. □

2.3. Свойства порядковых гомоморфизмов частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Так же как и для частично упорядоченных групп, естественно определяется понятие индуцированного частичного порядка на фактор-алгебре частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры по выпуклому идеалу. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 2.3.1. *Пусть A — частично упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F и I — выпуклый идеал в A. Тогда векторное пространство A/I является частично упорядоченной алгеброй над полем F с порядком Копытова.*

Доказательство. Операции $(a+I)+(b+I) = (a+b)+I$, $\lambda(a+I) = \lambda a+I$ и $(a+I)(b+I) = ab+I$ определяют структуру алгебры на $\langle A/I; +; \cdot\rangle$ и структуру частично упорядоченной группы на $\langle A/I; +\rangle$, если считать, что $a+I \geqslant I$ тогда и только тогда, когда существует такой элемент $a' \in a+I$, что $a' \geqslant 0$ в A.

Если $I < a+I$, то можно считать $a > 0$ в A, поэтому по предложению 2.1.2 имеем $ab \leqslant a$ и $ba \leqslant a$ для всех $b \in A$. Тогда $ab+I \leqslant a+I$ и $ba+I \leqslant a+I$, т. е. $(a+I)(b+I) \leqslant a+I$ и $(b+I)(a+I) \leqslant a+I$. □

Следствие 2.3.1. *Если A — линейно упорядоченная по Копытову алгебра над частично упорядоченным полем F и I — выпуклый идеал в A, то фактор-алгебра A/I является линейно упорядоченной по Копытову алгеброй над полем F.*

Доказательство. Пусть $a+I \in A/I$. Если существует элемент $a' \in a+I$, такой что $a' \geqslant 0$ в A, то $a+I \geqslant I$. В противном случае для любого $b \in a+I$ имеем $b < 0$. Тогда $-b > 0$ и $-(a+I) = -b+I > I$, откуда следует, что $a+I < I$. □

Следствие 2.3.2. *Фактор-алгебра l-алгебры L над частично упорядоченным полем F по её l-идеалу I является l-алгеброй относительно естественного порядка.*

Доказательство. Утверждение верно в силу предложений 2.3.1 и 1.1.3. □

Замечание 2.3.1. В фактор-алгебре L/I l-алгебры L над частично упорядоченным полем по её l-идеалу I справедливо равенство $|x+I| = |x|+I$ для любых элементов $x, y \in L$.

Доказательство. Используя определение модуля элемента и предложение 1.1.3, получаем, что

$$|x+I| = (x+I) \vee \bigl(-(x+I)\bigr) = \\ = (x+I) \vee \bigl((-x)+I\bigr) = \bigl(x \vee (-x)\bigr)+I = |x|+I. \quad \square$$

Теорема 2.3.1. *Пусть I — выпуклый направленный идеал частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем F. Полный прообраз любого выпуклого направленного идеала $\bar{J}$ фактор-алгебры L/I при каноническом гомоморфизме $\varepsilon\colon L \to L/I$ является выпуклым направленным идеалом алгебры L.*

Доказательство. Рассмотрим полный прообраз $J = \{x \in L \mid x+I \in \bar{J}\}$ идеала $\bar{J}$. Так как L — частично упорядоченная группа, I — её выпуклая направленная нормальная подгруппа, а J — подгруппа группы L, для которой $I \subseteq J$, то $\bar{J} = J/I$ является по определению 2.1.2 выпуклой направленной подгруппой частично упорядоченной группы $\langle L/I;+\rangle$. Отсюда по [37, лемма 2.2] следует, что J — выпуклая направленная подгруппа группы L.

Пусть $x \in J$, $z \in L$ и $\lambda \in F$. Так как $\bar{J}$ — идеал в L/I, то $\lambda(x+I) = \lambda x+I \in \bar{J}$ и $(x+I)(z+I) = xz+I \in \bar{J}$. Следовательно, $\lambda x \in J$ и $xz, zx \in J$, т. е. J — идеал в L. □

Теорема 2.3.2 (аналог теоремы Леви). *Пусть A — алгебра над частично упорядоченным полем F и I — идеал в A, где I и A/I частично упорядоченные по Копытову. Если для $a > 0$ в I и любого элемента $b \in A$ выполняется $ab, ba \leqslant a$, то на алгебре A можно определить $\mathcal{K}$-порядок, индуцирующий заданные порядки на I и A/I, при котором I — выпуклый идеал в A.*

Доказательство. Обозначим через $\leqslant_1$ порядок на идеале I, а через $\leqslant_2$ — порядок на фактор-алгебре A/I. Рассмотрим подмножество P алгебры A и будем считать, что $a \in P$ если $a+I >_2 I$ в A/I при $a \in A\setminus I$ или $a \geqslant_1 0$ в I при $a \in I$. Покажем, что P является положительным конусом в A.

Если $a, b \in P$, то в случаях, когда $a, b \in A\setminus I$ или $a, b \in I$, получаем $a+b \in P$. Пусть $a \in A\setminus I$ и $b \in I$. Тогда $(a+b)+I = (a+I)+(b+I) = a+I >_1 I$ в A/I, поэтому $a+b \in P$.

Легко проверить, что $\lambda P \subseteq P$ для всех $\lambda > 0$, $\lambda \in F$. Далее рассмотрим $a \in P \cap -P$. Если $a, -a \in A\setminus I$, то $a+I >_2 I$ и $-a+I >_2 I$, откуда следует, что $a+I = I$, т. е. $a \in I$. Для $a, -a \in I$ из $a \geqslant_1 0$ и $-a \geqslant_1 0$ следует, что $a = 0$. Таким образом, $P \cap -P = \{0\}$.

Пусть $a \in P$ и $x \in A$. Если $a \in A\setminus I$ и $a+I >_2 I$ в A/I, то по условию 3) определения 2.1.2 $(a+I)+(a+I)(x+I) \geqslant_2 I$. Следовательно, $a+ax+I \geqslant_2 I$. Если $a+ax+I = I$, то $a+I = (a+I)(-x+I)$, при этом по условию 3′) определения 2.1.4 $(a+I)(-x+I) \ll a+I$, откуда следует, что $a+I \ll a+I$, что невозможно. Значит, $a+ax+I \neq I$, т. е. $a+ax \notin I$.

Если $a \in I$ и $a \geqslant_1 0$ в I, то по условию 3) $a+ax \geqslant_1 0$, при этом $a+ax \in I$. Аналогично $a+xa \in I$ и $a+xa \geqslant_1 0$. Таким образом, $a+ax \in P$.

Пусть $a \leqslant x \leqslant b$, где $a, b \in I$ и $x \in A$. Если $x \notin I$, то $a+I \leqslant_2 x+I \leqslant_2 b+I$ в A/I, откуда следует, что $I \leqslant_2 x+I \leqslant_2 I$. Значит, $x+I = I$ и $x \in I$. Таким образом, I является выпуклым идеалом в A. □

Теорема 2.3.2 даёт инструмент для конструирования примеров $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Рассмотрим понятие и свойства порядкового гомоморфизма частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Определение 2.3.1 [11, с. 597]. Пусть даны частично $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры L_1 и L_2 над частично упорядоченным полем F. Отображение φ из L_1 в L_2 называется порядковым гомоморфизмом (о-гомоморфизмом), если φ — гомоморфизм алгебр L_1 и L_2 и φ — гомоморфизм частично упорядоченных множеств L_1 и L_2, т. е. для любых элементов $x, y \in L_1$ и для любого $\lambda \in F$ выполнены следующие соотношения:

1) $\varphi(x+y) = \varphi(x) + \varphi(y)$;
2) $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$;
3) $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$;
4) если $x \leqslant y$, то $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$.

Если порядковый гомоморфизм φ частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L_1 и L_2 является изоморфизмом этих алгебр и при этом φ^{-1} удовлетворяет условию 4) определения 2.3.1, то φ называется *порядковым изоморфизмом* частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L_1 и L_2.

Определение 2.3.2. Если L_1 и L_2 — частично $\mathcal{K}$-упорядоченные алгебры над частично упорядоченным полем F с конусами положительных элементов L_1^+ и L_2^+ соответственно, то порядковый гомоморфизм $\varphi\colon L_1 \to L_2$ называется строгим порядковым гомоморфизмом, если $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$.

Предложение 2.3.2. *Пусть L — частично $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над частично упорядоченным полем F и I — выпуклый идеал алгебры L. Тогда канонический гомоморфизм ε алгебры L на фактор-алгебру L/I является порядковым гомоморфизмом частично $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L и L/I.*

Доказательство. Для гомоморфизма ε алгебр L и L/I выполнены условия 1)—3) определения 2.3.1. Так как фактор-алгебра L/I по предложению 2.3.1 частично $\mathcal{K}$-упорядоченная, то ε является по пункту 1) определения 2.3.1 гомоморфизмом частично упорядоченных групп $\langle L; +\rangle$ и $\langle L/I; +\rangle$. Тогда по предложению 1.1.2 ε — порядковый гомоморфизм групп, и значит, для него выполнено условие 4) определения 2.3.1. □

Для $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр верна теорема о гомоморфизмах.

Теорема 2.3.3. *Если φ — порядковый гомоморфизм частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L_1 в частично $\mathcal{K}$-упорядоченную алгебру L_2, то ядро I этого гомоморфизма является выпуклым идеалом в L_1 и существует порядковый изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной фактор-алгебры L_1/I в L_2, такой что $\bar{\varphi}(x+I) = \varphi(x)$ для любого $x \in L_1$.*

Доказательство. Для порядкового гомоморфизма $\varphi\colon L_1 \to L_2$ из пунктов 1) и 4) определения 2.3.1 следует, что φ является порядковым гомоморфизмом аддитивных частично упорядоченных групп L_1 и L_2. Из теоремы 1.1.2 известно, что ядро I гомоморфизма φ является выпуклой подгруппой группы L_1 и существует порядковый изоморфизм $\bar{\varphi}$ частично упорядоченной фактор-группы L_1/I в L_2, при котором $\bar{\varphi}(x+I) = \varphi(x)$ для любого $x \in L_1$.

Покажем, что I является идеалом алгебры L_1. Пусть $x \in I$, $y \in L_1$, $\lambda \in F$. Тогда по определению гомоморфизма алгебр и ядра гомоморфизма получаем $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda \cdot 0 = 0$ и $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = 0 \cdot \varphi(y) = 0$, поэтому $\lambda x \in I$, $xy \in I$. Таким образом, I является выпуклым идеалом в L_1.

Покажем, что $\bar{\varphi}$ — гомоморфизм алгебр. Если $x+I,\ y+I \in L_1/I$ и $\lambda \in F$, то

$$\bar{\varphi}\big(\lambda(x+I)\big) = \bar{\varphi}(\lambda x + I) = \varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) = \lambda\bar{\varphi}(x+I)$$

и

$$\bar{\varphi}\big((x+I)(y+I)\big) = \bar{\varphi}(xy+I) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = \bar{\varphi}(x+I)\bar{\varphi}(y+I).$$

Значит, по определению 2.3.1 $\bar{\varphi}$ — порядковый изоморфизм алгебр L_1/I и L_2. □

Определение 2.3.3 [11, с. 597]. Если L_1 и L_2 — l-алгебры над частично упорядоченным полем и φ — гомоморфизм алгебры L_1 в алгебру L_2, такой что для любых $x, y \in L_1$ выполнены условия

$$\varphi(x \vee y) = \varphi(x) \vee \varphi(y), \quad \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge \varphi(y), \tag{3}$$

то φ называется гомоморфизмом l-алгебры L_1 в l-алгебру L_2 или l-гомоморфизмом.

Предложение 2.3.3. *Всякий l-гомоморфизм φ l-алгебр L_1 и L_2 над частично упорядоченным полем является строгим порядковым гомоморфизмом.*

Доказательство. Так как l-гомоморфизм φ l-алгебр L_1 и L_2 является l-гомоморфизм l-групп $\langle L_1; +\rangle$ и $\langle L_2; +\rangle$, а всякий l-гомоморфизм l-групп является их строгим порядковым гомоморфизмом (см., например, [12, с. 33]), то φ — порядковый гомоморфизм l-алгебр L_1 и L_2. Пусть $x \in L_1^+$, т. е. $x \geqslant 0$ в L_1. Тогда $x = x \vee 0$, откуда по определению 2.3.3 имеем

$$\varphi(x) = \varphi(x \vee 0) = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x) \vee 0.$$

Следовательно, $\varphi(x) \geqslant 0$, т. е. $\varphi(x) \in L_2^+$. Таким образом, $\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+$. Отсюда, учитывая $\varphi(L_1^+) \subseteq \varphi(L_1)$, получаем, что $\varphi(L_1^+) \subseteq L_2^+ \cap \varphi(L_1)$.

Если $y \in L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, то $y \geqslant 0$ в L_2 и $y = \varphi(x)$ для некоторого $x \in L_1$. Поскольку $y \geqslant 0$, то по свойствам l-гомоморфизма

$$y = y \vee 0 = \varphi(x) \vee \varphi(0) = \varphi(x \vee 0) = \varphi(x^+).$$

Значит, $y \in \varphi(L_1^+)$, и поэтому $L_2^+ \cap \varphi(L_1) \subseteq \varphi(L_1^+)$. Из двух полученных включений следует равенство $\varphi(L_1^+) = L_2^+ \cap \varphi(L_1)$, из которого по определению 2.3.2 вытекает, что φ — строгий порядковый гомоморфизм. □

Теорема 2.3.4. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, а I — l-идеал алгебры L, то канонический гомоморфизм ε l-алгебры L на фактор-алгебру L/I является l-гомоморфизмом l-алгебр L и L/I.*

Доказательство. По предложению 2.3.2 отображение ε является порядковым гомоморфизмом l-алгебр L и L/I. Для элементов $x, y \in L$, используя предложение 1.1.3, получаем

$$\varepsilon(x \vee y) = (x \vee y) + I = (x+I) \vee (y+I) = \varepsilon(x) \vee \varepsilon(y),$$
$$\varepsilon(x \wedge y) = (x \wedge y) + I = (x+I) \wedge (y+I) = \varepsilon(x) \wedge \varepsilon(y).$$

Значит, по определению 2.3.3 гомоморфизм ε является l-гомоморфизмом l-алгебр L и L/I. □

Теорема 2.3.5. *Пусть I — l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем F. Полный прообраз любого l-идеала $\bar{J}$ фактор-алгебры L/I при каноническом гомоморфизме $\varepsilon\colon L \to L/I$ является l-идеалом l-алгебры L.*

Доказательство. По теореме 2.3.1 полный прообраз J идеала $\bar{J}$ является выпуклым направленным идеалом алгебры L.

Для доказательства того, что J является подрешёткой L, воспользуемся предложением 2.2.4. Рассмотрим $x \in J$, $y \in L$, удовлетворяющие условию $|y| \leqslant |x|$. По определению частичного порядка, индуцированного на фактор-алгебре L/I, из данного неравенства следует соотношение $|y|+I \leqslant |x|+I$, откуда по замечанию 2.3.1 получаем, что $|y+I| \leqslant |x+I|$ для $x+I \in \bar{J}$, $y+I \in L/I$. Отсюда для l-идеала $\bar{J}$ по предложению 2.2.4 следует, что $y+I \in \bar{J}$, поэтому $y \in J$. Таким образом, по предложению 2.2.4 J является l-идеалом в l-алгебре L. □

Предложение 2.3.4. *Пусть L и L_1 — l-алгебры над частично упорядоченным полем F и φ — l-гомоморфизм из L в L_1. Тогда полный прообраз любого l-идеала I_1 из L_1 — множество $A = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$ — является l-идеалом в L.*

Доказательство. Если $x, y \in A$, $z \in L$ и $\lambda \in F$, то $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in I_1$. Используя определение 2.3.3 l-гомоморфизма l-алгебр и определение l-идеала, получаем, что $\varphi(x+y) = \varphi(x)+\varphi(y) \in I_1$, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x) \in I_1$ и $\varphi(xz) = \varphi(x)\varphi(z) \in I_1$. Поэтому $x + y$, λx, $xz \in A$, и значит, A является идеалом в L.

Пусть элементы $x \in A$, $y \in L$ удовлетворяют условию $|y| \leqslant |x|$. Поскольку по предложению 2.3.3 φ является строгим порядковым гомоморфизмом, то из неравенства $|x| - |y| \geqslant 0$ по определению 2.3.2 следует, что $\varphi(|x| - |y|) \geqslant 0$. При этом $\varphi(|x| - |y|) = \varphi(|x|) - \varphi(|y|)$. Следовательно, $\varphi(|y|) \leqslant \varphi(|x|)$. Так как $\varphi\colon L \to L_1$ — l-гомоморфизм l-алгебр, то, используя определение 2.3.3, имеем, что $\varphi(|y|) = \varphi(y) \vee \varphi(-y) = |\varphi(y)|$ и $\varphi(|x|) = \varphi(x) \vee \varphi(-x) = |\varphi(x)|$. Значит, $|\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)|$. Так как $\varphi(x) \in I_1$, $\varphi(y) \in L_1$ и I_1 является l-идеалом l-алгебры L_1, то по предложению 2.2.4 $\varphi(y) \in I_1$, поэтому $y \in A$. Применяя предложение 2.2.4, заключаем, что A является l-идеалом l-алгебры L. □

Теорема 2.3.6 (вторая теорема об изоморфизмах). *Пусть L и L_1 — l-алгебры над частично упорядоченным полем F и φ — l-эпиморфизм из L в L_1. Тогда для любого l-идеала I_1 из L_1 и его полного прообраза I из L фактор-алгебры L/I и L_1/I_1 l-изоморфны.*

Доказательство. Рассмотрим канонический l-эпиморфизм $\varepsilon\colon L_1 \to L_1/I_1$ и l-эпиморфизм $\varphi\colon L \to L_1$ из условия теоремы. Тогда композиция $\psi = \varepsilon \circ \varphi$ данных l-эпиморфизмов также является l-эпиморфизмом, так как $\psi\colon L \to L_1/I_1$ и $\psi(L) = \varepsilon\big(\varphi(L)\big) = \varepsilon(L_1) = L_1/I_1$. Применяя к l-эпиморфизму $\psi\colon L \to L_1/I_1$ теорему 2.3.3, получим, что существует l-изоморфизм между $L/\operatorname{Ker}\psi$ и $\operatorname{Im}\psi$. Так как ψ — эпиморфизм, то $\operatorname{Im}\psi = L_1/I_1$.

Рассмотрим $\operatorname{Ker}\psi = \{x \in L \mid \psi(x) = I_1\}$. Поскольку $\psi(x) = \varepsilon\big(\varphi(x)\big) = \varphi(x) + I_1$, то $\operatorname{Ker}\psi = \{x \in L \mid \varphi(x) \in I_1\}$ — полный прообраз l-идеала I_1, т. е. $\operatorname{Ker}\psi = I$. Следовательно, l-алгебры L/I и L_1/I_1 l-изоморфны. □

Теорема 2.3.7. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, I и A — l-идеалы l-алгебры L. Тогда множество $\bar{A} = \{T \in L/I \mid T \cap A \neq \varnothing\}$ является l-идеалом фактор-алгебры L/I.*

Доказательство. Если $T, S \in \bar{A}$, $\lambda \in F$ и $C = c + I \in L/I$, то существуют элементы $a, b \in A$, такие что $T = a + I$, $S = b + I$, и поэтому $T + S = (a + b) + I$, $\lambda T = \lambda a + I$ и $TC = ac + I$. Так как A — l-идеал в L, то $a + b$, λa, $ac \in A$, и значит, $T + S$, λT, $TS \in \bar{A}$. Следовательно, $\bar{A}$ — идеал в L/I.

Так как L/I является по следствию 2.3.2 l-алгеброй, то для $T, S \in \bar{A}$ существуют элементы $T \vee S$, $T \wedge S \in L/I$, которые по предложению 1.1.3 равны $(a \vee b) + I$ и $(a \wedge b) + I$ соответственно. Для элементов a и b l-идеала A имеем $a \vee b$, $a \wedge b \in A$, и следовательно, $T \vee S$, $T \wedge S \in \bar{A}$.

Пусть элементы $T, S \in \bar{A}$ и $Z = z + I \in L/I$ удовлетворяют условию $T \leqslant Z \leqslant S$. Тогда $a + I \leqslant z + I \leqslant b + I$, откуда следует, что $I \leqslant (z - a) + I \leqslant \leqslant (b - a) + I$. По определению порядка на L/I имеем $0 \leqslant z - a \leqslant (b - a) + t$ для подходящего $t \in I$. Поскольку по свойству (IV) из леммы 1.1.1 $(b - a) + t \leqslant \leqslant |(b - a) + t| \leqslant |b - a| + |t|$, то $0 \leqslant z - a \leqslant |b - a| + |t|$. Применяя следствие 1.1.1, получаем, что $z - a = c + j$, где $0 \leqslant c \leqslant |b - a|$, $0 \leqslant j \leqslant |t|$. Для элементов a, b l-идеала A имеем $|b - a| \in A$, и значит, $c \in A$. Аналогично получаем $j \in I$. Отсюда следует, что $(z + I) + \big((-a) + I\big) = (z - a) + I = (c + j) + I = c + I$, и поэтому $z + I = (c + I) + (a + I) = (c + a) + I$, где $c + a \in A$. Таким образом, $Z \in \bar{A}$ по определению множества $\bar{A}$. Значит, $\bar{A}$ — выпуклая подрешётка в L/I. $\square$

Предложение 2.3.5. *Пусть L и L_1 — l-алгебры над частично упорядоченным полем F и φ — l-изоморфизм из L в L_1. Тогда для любого l-идеала I из L множество $A_1 = \{\varphi(x) \mid x \in I\}$ является l-идеалом в L_1.*

Доказательство. Пусть $x_1, y_1 \in A_1$, $z_1 \in L_1$ и $\lambda \in F$. Тогда $x_1 = \varphi(x)$ и $y_1 = \varphi(y)$ для некоторых $x, y \in I$ и, поскольку φ — l-изоморфизм, существует элемент $z \in L$, такой что $\varphi(z) = z_1$. Используя определение 2.3.3 l-гомоморфизма l-алгебр и определение l-идеала, получаем, что $x_1 + y_1 = \varphi(x) + \varphi(y) = = \varphi(x + y) \in A_1$, $\lambda x_1 = \lambda\varphi(x) = \varphi(\lambda x) \in A_1$ и $xz_1 = \varphi(x)\varphi(z) = \varphi(xz) \in A_1$. Следовательно, A_1 — идеал в L_1.

Пусть элементы $x_1 \in A_1$, $y_1 \in L_1$ удовлетворяют условию $|y_1| \leqslant |x_1|$. Так как φ — изоморфизм, то найдётся элемент $y \in L$, такой что $\varphi(y) = y_1$, и при этом $x_1 = \varphi(x)$, где $x \in I$. Тогда $|\varphi(y)| \leqslant |\varphi(x)|$. Используя рассуждения из доказательства предложения 2.3.4, получаем, что $\varphi(|y|) \leqslant \varphi(|x|)$. Применение к данному неравенству l-изоморфизма φ^{-1} даёт неравенство $|y| \leqslant |x|$. Тогда по предложению 2.2.4 $y \in I$. Поэтому $y_1 \in A_1$, а это по предложению 2.2.4 означает, что идеал A_1 является l-идеалом в L_1. $\square$

Теорема 2.3.8. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем и I — её l-идеал, то между l-идеалами из l-алгебры L/I и l-идеалами в L, содержащими I, существует естественное взаимно-однозначное соответствие.*

Доказательство. Пусть J — l-идеал l-алгебры L и $I \subseteq J$. Тогда по теореме 2.3.7 l-идеалу J можно поставить в соответствие l-идеал $\bar{J}$ алгебры L/I.

Если A — полный прообраз идеала $\bar{J}$ из теоремы 2.3.5, то A — l-идеал l-алгебры L. Докажем, что $A = J$. Поскольку $\bar{J} = \{T \in L/I \mid T \cap J \neq \varnothing\}$ и $A = \{x \in L \mid x+I \in \bar{J}\}$, то для любого элемента $x \in J$ имеем $x+I \in \bar{J}$ и $x \in A$, и поэтому $J \subseteq A$. Если $x \in A$, то $x+I \in \bar{J}$. Значит, найдётся элемент $t \in J$, для которого $t + I = x + I$. Отсюда получаем, что $x = t + u$ для некоторого $u \in I$. Так как $I \subseteq J$, то $u \in J$ и $x \in J$. Таким образом, $A \subseteq J$. □

Для l-алгебр справедлива теорема о гомоморфизмах.

Теорема 2.3.9. *Если φ — l-гомоморфизм l-алгебры L_1 в l-алгебру L_2, то ядро I этого гомоморфизма является l-идеалом в L_1 и существует l-изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной фактор-алгебры L_1/I в L_2, такой что $\bar{\varphi}(x+I) = \varphi(x)$ для любого $x \in L_1$.*

Доказательство. По теореме 2.3.3 I — выпуклый идеал в L_1 и существует порядковое вложение $\bar{\varphi}$ частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L_1/I в L_2, при котором $\bar{\varphi}(x+I) = \varphi(x)$ для любого элемента $x \in L_1$. Из предложения 1.1.3 следует, что $\bar{\varphi}$ сохраняет решёточные операции над элементами, т. е. $\bar{\varphi}$ — l-гомоморфизм.

Пусть $x \in I$, $y \in L$ и $|y| \leqslant |x|$. Тогда по определению гомоморфизма и ядра гомоморфизма $\varphi(x) = 0 = -\varphi(x) = \varphi(-x)$. По определению модуля элемента имеем

$$\varphi(|x|) = \varphi(x \vee -x) = \varphi(x) \vee \varphi(-x) = 0 \vee 0 = 0,$$

т. е. $|x| \in I$. Значит, $|y| \in I$, так как I — выпуклое подмножество в L_1. Поскольку $0 \leqslant y^+ \leqslant |y|$ и $|y| \in I$, то $y^+ \in I$ ввиду выпуклости идеала I. Из свойства (III) из леммы 1.1.1 следует, что $y = y^+ + y^+ - |y|$, поэтому $y \in I$.

Таким образом, для идеала I выполняется условие 2) предложения 2.2.4. Следовательно, I — l-идеал алгебры L. □

Замечание 2.3.2. В условиях теоремы 2.3.9 образ $\operatorname{Im}\varphi$ l-гомоморфизма φ является l-подалгеброй в l-алгебре L_2.

Доказательство. Известно, что образ $\operatorname{Im}\varphi$ гомоморфизма алгебр L_1 и L_2 является подалгеброй алгебры L_2. Так как, очевидно, φ — l-гомоморфизм l-групп L_1 и L_2, то $\operatorname{Im}\varphi$ является по теореме 1.1.2 подрешёткой в L_2. □

2.4. Центральные системы идеалов $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

Этот раздел посвящён исследованию связи линейной упорядочиваемости алгебры над полем с наличием в этой алгебре центральной системы идеалов.

Предложение 2.4.1. *Пусть A — алгебра над линейно упорядоченным полем F, для которой $\langle A; +\rangle$ — линейно упорядоченная группа. Если в A нет выпуклых подалгебр, то A — алгебра с нулевым умножением и для любых элементов $a, b \in A$, таких что $a > 0$ и $b > 0$, существуют элементы $\beta, \gamma \in F$, для которых $a < \beta b$ и $b < \gamma a$.*

Доказательство. Пусть $a \in A$. По условию теоремы имеем $a > 0$ или $a \leqslant 0$. Если $a > 0$, то по теореме 2.2.2 в A существует выпуклая подалгебра $M_a = \{x \in A \mid x \ll a\}$. Следовательно, по условию $M_a = \{0\}$. Так как по теореме 2.2.2 $ab \in M_a$ для всех $b \in A$, то $ab = 0$. Пусть $b > 0$ в A. Поскольку $M_a = \{0\}$, то $b \notin M_a$, поэтому существует такой элемент $\beta \in F$, что $a < \beta b$. Так как по теореме 2.2.2 в A существует выпуклая подалгебра $M_b = \{x \in A \mid x \ll b\}$, то по условию предложения $M_b = \{0\}$ и, значит, $a \notin M_b$. Поэтому найдётся элемент $\gamma \in F$, для которого $b < \gamma a$.

При $a = 0$ ясно, что $ab = 0$ для всех $b \in A$. Если $a < 0$, то $-a > 0$ и по доказанному выше $-ab = (-a)b = 0$ для всех $b \in A$, откуда следует, что $ab = 0$. □

Для упорядоченных алгебр Ли предложение 2.4.1 рассмотрено В. М. Копытовым в [10, 12].

Определение 2.4.1. Под скачком $A \prec B$ полной решёточно упорядоченной по включению системы $\mathcal{P}(L)$ идеалов алгебры L будем понимать такую пару идеалов из $\mathcal{P}(L)$, что $A \subseteq B$, $A \neq B$ и между ними нет идеалов из $\mathcal{P}(L)$.

Теорема 2.4.1. *Пусть A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F. Если $C \subset B$ — скачок выпуклых подпространств в A, то $AB \subseteq C$ и $BA \subseteq C$.*

Доказательство. Рассмотрим фактор-алгебру B/C. Пусть в ней существует выпуклое подпространство $\bar{J}$. Тогда легко показать, что множество $T = \{x \in B \mid x + C \in \bar{J}\}$ является подпространством в B. Если $x, y \in T$, $z \in B$ и $x \leqslant z \leqslant y$, то $x + C, y + C \in \bar{J}$ и $x + C \leqslant z + C \leqslant y + C$, откуда ввиду выпуклости пространства $\bar{J}$ получаем, что $z + C \in \bar{J}$, т. е. $z \in T$. Следовательно, T является выпуклым подпространством в B и $C \subseteq T$. Значит, $T = C$ и $\bar{J} = C$. Таким образом, линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная фактор-алгебра B/C не содержит выпуклых подпространств.

Пусть $b \in B \setminus C$. Если $b > 0$, то $bx \ll b$ и $xb \ll b$ для всех $x \in A$. Следовательно, $\lambda(xb) \leqslant b$ для всех $\lambda \in F$. Пусть существует $x \in A$, для которого $xb \notin C$, где $xb > 0$. Тогда $b + C > C$, $xb + C > C$ и $b + C \geqslant \lambda(xb) + C$ в фактор-алгебре B/C.

Так как линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная фактор-алгебра B/C не содержит выпуклых подпространств, то по предложению 2.4.1 существует $\beta \in F$, для которого $b + C < \beta(xb) + C$, что противоречит доказанному ранее.

Таким образом, $AB \subseteq C$. Аналогично доказывается, что $BA \subseteq C$. □

Напомним, что *инвариантной системой* называется любая упорядоченная по включению полная система идеалов алгебры A, содержащая $\{0\}$ и A, где $I_k \subset I_{k+1}$ и I_k — идеал в I_{k+1}. Если при этом для всякого скачка $I_k \subset I_{k+1}$ этой системы имеет место включение $AI_{k+1} \subseteq I_k$, то система идеалов называется *центральной системой* [20, с. 356, 392].

Теорема 2.4.2. *Любая линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра A над линейно упорядоченным полем F обладает центральной системой идеалов.*

Доказательство. Пусть B и C — выпуклые подпространства в A. Если $B \nsubseteq C$ и $C \nsubseteq B$, то существуют элементы $b \in B \setminus C$ и $c \in C \setminus B$, такие что $b > 0$ и $c > 0$. Если $b > c$, то $c \in B$, а если $c > b$, то $b \in C$, что противоречит выбору элементов b и c. Следовательно, $B \subseteq C$ или $C \subseteq B$, т. е. все выпуклые подпространства в A образуют цепь. Ясно, что система всех выпуклых подпространств в A является полной.

Если $B \supset C$ — скачок выпуклых подпространств в A, то по теореме 2.4.1 $AB \subseteq C$ и $BA \subseteq C$.

Таким образом, рассматриваемая система выпуклых подпространств является центральной. □

Предложение 2.4.2. *Пусть A — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра над линейно упорядоченным полем F и $C \subset B$ — скачок выпуклых подпространств в A. Тогда для любого $b > 0$, $b \in B \setminus C$ выполняется равенство $C = M_b$.*

Доказательство. Пусть $b \in B \setminus C$, $b > 0$ для скачка выпуклых подпространств $B \supset C$. Тогда для любого элемента $x \in C$ и $\lambda \in F$ имеем $\lambda x < b$, так как в случае $\lambda x \geqslant b > 0$ ввиду выпуклости C получим, что $b \in C$. Следовательно, $x \ll b$, поэтому $C \subseteq M_b$, где M_b — выпуклый идеал в A, соответствующий элементу $b > 0$. Все выпуклые подпространства в A образуют цепь, поэтому $B \subseteq M_b$ или $M_b \subseteq B$. Если $B \subseteq M_b$, то $b \ll b$, что невозможно. Поэтому $M_b \subseteq B$. Учитывая, что $C \subseteq M_b$, для скачка $B \supset C$ получаем, что $C = M_b$.

Пусть $d > 0$, $d \in B \setminus C$. Тогда по предложению 2.2.2 $C \subseteq M_d$. Из рассуждений, аналогичных проведённым выше, получаем, что $C = M_d = M_b$, т. е. все строго положительные элементы из $B \setminus C$ определяют один и тот же выпуклый идеал M_b, который всегда совпадает с нижним идеалом скачка. □

Теорема 2.4.3. *Если алгебра над линейно упорядоченным полем обладает центральной системой идеалов, то её можно линейно упорядочить по Копытову.*

Доказательство. Пусть A — линейная алгебра над линейно упорядоченным полем F, имеющая центральную систему идеалов.

Для скачка идеалов $I_k \subset I_{k+1}$ рассмотрим абелевы группы $\langle I_k; + \rangle$ и $\langle I_{k+1}/I_k; + \rangle$. Поскольку, как отмечалось ранее, упорядоченное поле F имеет нулевую характеристику, то абелевы группы I_k и I_{k+1}/I_k свободны от кручений. Известно, что любую абелеву группу без кручения можно превратить в линейно упорядоченную (см., например, [4, гл. 13, § 7, теорема 11]). Следовательно, группы I_k и I_{k+1}/I_k можно линейно упорядочить. Тогда по теореме Леви для групп (см., например, [32, гл. 2, § 4, предложение 6]) на группе I_{k+1} можно определить линейный порядок $\leqslant$, индуцирующий найденный порядок на I_k, при котором I_k — выпуклая подгруппа в I_{k+1}. Таким образом, выполнено условие 1) определения 2.1.4.

Рассмотрим пространство I_{k+1} над полем F и для $a \geqslant 0$ из $\langle I_{k+1}; + \rangle$ будем считать, что $\alpha a \leqslant \beta a$, если $\alpha \leqslant \beta$ в поле F. Тогда выполняется условие 2) определения 2.1.4.

Пусть $c \in I_k$, $b \in I_{k+1} \setminus I_k$ и $b > 0$. Тогда $c \leqslant b$, так как в случае $c \geqslant b$ ввиду выпуклости I_k получаем, что $b \in I_k$. Следовательно, каждый элемент из $I_{k+1} \setminus I_k$ больше любого элемента из I_k.

Упорядочивая подобным образом каждый следующий скачок системы идеалов алгебры A, получим линейный порядок, заданный на пространстве A.

Пусть $a \geqslant 0$ в A и $z \in A$. Тогда $a \in I_{k+1} \setminus I_k$ для некоторого k. Поскольку система идеалов алгебры A является центральной, то $\lambda(az) \in I_k$. Отсюда получаем, что $a \geqslant \lambda(az)$, т. е. $az \ll a$ для всех $z \in A$. Следовательно, выполнено условие $3'$) определения 2.1.4.

Таким образом, алгебра A линейно упорядоченная по Копытову. □

Теорема 2.4.4. *Алгебру A над линейно упорядоченным полем F можно линейно упорядочить тогда и только тогда, когда она обладает центральной системой идеалов.*

Доказательство. Утверждение следует из теорем 2.4.2 и 2.4.3. □

Следствие 2.4.1. *Конечномерную ассоциативную алгебру* (*алгебру Ли*) *можно линейно упорядочить в том и только в том случае, когда она нильпотентна.*

Отметим, что в следствии 2.4.1 условие конечномерности является существенным, поскольку, как показывает пример 2.1.7, существуют бесконечномерные ненильпотентные алгебры, линейно упорядочиваемые по Копытову.

Рассмотрим пример, в котором $\mathcal{K}$-порядок алгебры Ли индуцирует линейный порядок на группе Ли, для которой данная алгебра Ли является касательным пространством.

Пример 2.4.1. Пусть L — конечномерная нильпотентная алгебра Ли над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел. Тогда в отвечающем ей ряде Кэмпбелла—Хаусдорфа лишь конечное число членов отлично от нуля и операция

$$a \circ b = a + b + \frac{1}{2}[a, b] + \frac{1}{12}\big[[a, b], b\big] + \frac{1}{12}\big[[b, a], a\big] + \ldots$$

определяет на множестве L структуру группы (см. [8, гл. 5, § 5]). Роль единицы в группе $G = \langle L; \circ \rangle$ играет элемент 0, $x^{-1} = -x$. По [5, гл. III, § 9, п. 5] группа $G = \langle L; \circ \rangle$ является группой Ли, ассоциированной с алгеброй Ли L, а L является для G касательным пространством. Отметим также, что G — нильпотентная группа.

Пусть на алгебре Ли L задан $\mathcal{K}$-порядок. Так как алгебра Ли L конечномерна и нильпотентна, то по следствию 2.4.1 $\mathcal{K}$-порядок на L является линейным. Будем считать, что $a \in P(G)$, если $a \in P(L)$. Тогда ясно, что для любых элементов $a \in G$ и $r \in \mathbb{R}$ справедливо свойство

$$\text{если} \quad a > 1 \quad \text{и} \quad r > 0, \quad \text{то} \quad a^r > 1. \tag{4}$$

Покажем, что $P(G)$ — положительный конус для группы G. Пусть $x, y \in P(G)$. Тогда $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$ в L, $x \circ y = x + y + u$. Отметим, что из пункта $3'$) определения 2.1.4 $\mathcal{K}$-порядка, а также из теоремы 2.2.2 следует, что $u \ll x$ и

$u \ll y$, т. е. $u \in M_x \cap M_y$. Отсюда по определению 2.1.3, в частности, имеем $-2u \leqslant x$ и $u \leqslant y$. Следовательно, $-u \leqslant x+y$ и $x+y+u \geqslant 0$ в L. Таким образом, $x \circ y \in P(G)$.

Если $x \in P(G)$ и $y \in G$, то $x \geqslant 0$ в L и

$$y^{-1} \circ x \circ y = -y \circ (x+y+u) = -y+x+y+v = x+v.$$

Так как по доказанному выше $u \in M_x$, то по теореме 2.2.2 получаем, что $v \in M_x$. Используя определение 2.1.3, имеем $-v \leqslant x$, и значит, $x+v \geqslant 0$ в L. Поэтому $y^{-1} \circ x \circ y \in P(G)$.

Если $x \in P(G) \cap P(G)^{-1}$, то $x \in P(L)$ и $x \in -P(L)$, откуда следует, что $x = 0$ в L. Значит, $x = 1$ в G.

Итак, $P(G)$ — положительный конус группы G. При этом из соотношения (4) следует, что группа G является относительно данного порядка линейно упорядоченной группой Ли.

2.5. Спрямляющие l-идеалы l-алгебр

Определение 2.5.1. Спрямляющим идеалом частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем будем называть её выпуклый идеал I, являющийся спрямляющей подгруппой.

Таким образом, выпуклый идеал I является спрямляющим в частично $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L, если фактор-алгебра L/I линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная относительно индуцированного порядка.

Оказывается, что в каждой l-алгебре много спрямляющих l-идеалов. Для того чтобы в этом убедиться, в l-алгебре L над частично упорядоченным полем F рассмотрим для элемента $x \in L$, $x \neq 0$, любой из l-идеалов $J_\alpha(x)$ $(\alpha \in I)$, максимальных среди l-идеалов, не содержащих элемента x, существование которых было доказано в предложении 2.2.6. Также рассмотрим l-идеал $(J_\alpha(x), x)_l$ — наименьший l-идеал среди l-идеалов в L, содержащих $J_\alpha(x)$ и x. Тогда ясно, что $J_\alpha(x) \subsetneqq (J_\alpha(x), x)_l$.

Лемма 2.5.1. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, $x \in L$, $x \neq 0$. Тогда пара l-идеалов $J_\alpha(x) \subset (J_\alpha(x), x)_l$ составляет скачок в решётке $\mathcal{L}(L)$.*

Доказательство. Отметим, что по теореме 2.2.3 множество $\mathcal{L}(L)$ всех l-идеалов l-алгебры L является полной решёточно упорядоченной по включению системой идеалов.

Пусть $A \in \mathcal{L}(L)$ и $J_\alpha(x) \subseteq A \subseteq (J_\alpha(x), x)_l$. Для l-идеала A есть две возможности: $x \notin A$ или $x \in A$. Если $x \notin A$, то в силу максимальности l-идеала $J_\alpha(x)$ относительно свойства $x \notin J_\alpha(x)$ из $J_\alpha(x) \subseteq A$ следует, что $J_\alpha(x) = A$. Если $x \in A$, то $A = (J_\alpha(x), x)_l$, поскольку $A \subseteq (J_\alpha(x), x)_l$ и $(J_\alpha(x), x)_l$ — наименьший l-идеал, содержащий x. Таким образом, по определению 2.4.1 пара l-идеалов $J_\alpha(x) \subset (J_\alpha(x), x)_l$ является скачком в решётке $\mathcal{L}(L)$. $\square$

Будем говорить, что $J_\alpha(x) \prec (J_\alpha(x), x)_l$ — *скачок в* $\mathcal{L}(L)$*, определяемый элементом* x. Каждый из l-идеалов $J_\alpha(x)$, рассмотренных в предложении 2.2.6, будем называть *значением* элемента x, а также *нижним идеалом скачка* в решётке $\mathcal{L}(L)$ всех l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F.

Теорема 2.5.1. *Всякий нижний идеал скачка в* $\mathcal{L}(L)$*, определяемый отличным от нуля элементом* l*-алгебры* L *над направленным полем, удовлетворяющим условию* (1)*, является спрямляющим* l*-идеалом.*

Доказательство. Пусть $J_\alpha(x) \prec (J_\alpha(x), x)_l$ — скачок в решётке $\mathcal{L}(L)$, определяемый элементом $x \neq 0$. Из леммы 2.5.1 следует, что всякий l-идеал в L, строго содержащий $J_\alpha(x)$, содержит и $(J_\alpha(x), x)_l$. Рассмотрим множество $C = \{y \in L \mid |y| \wedge |x| \in J_\alpha(x)\}$, которое по лемме 2.2.6 является l-идеалом l-алгебры L, и при этом $J_\alpha(x) \subseteq C$. Если $J_\alpha(x) \subsetneqq C$, то $(J_\alpha(x), x)_l \subseteq C$, и значит, $x \in C$. Отсюда следует, что $|x| \wedge |x| = |x| \in J_\alpha(x)$, и поэтому $x \in J_\alpha(x)$, но это невозможно по построению $J_\alpha(x)$. Отсюда заключаем, что $C = J_\alpha(x)$.

Пусть теперь $a, b \in L$, $a > 0$, $b > 0$, $a \notin J_\alpha(x)$ и $a \wedge b \in J_\alpha(x)$. Построим множество $B = \{y \in L \mid |y| \wedge b \in J_\alpha(x)\}$, которое по лемме 2.2.6 является l-идеалом, содержащим $J_\alpha(x)$. При этом из $a \in B$ и $a \notin J_\alpha(x)$ следует, что $J_\alpha(x) \subsetneqq B$. По доказанному выше имеем $(J_\alpha(x), x)_l \subseteq B$, откуда получаем, что $|x| \wedge b \in J_\alpha(x)$, и значит, $b \in C = J_\alpha(x)$. Следовательно, $J_\alpha(x)$ является по следствию 1.1.1 из теоремы 1.1.3 спрямляющим l-идеалом. □

Предложение 2.5.1. *Всякий* l*-идеал* l*-алгебры* L *над направленным полем, удовлетворяющим условию* (1)*, является пересечением спрямляющих* l*-идеалов.*

Доказательство. Пусть I — l-идеал l-алгебры L и $J(x)$ — один из нижних идеалов скачка для элемента $x \in L \setminus I$, построенный в предложении 2.2.6. Тогда $x \notin J(x)$, а также $I \subseteq J(x)$ в силу максимальности идеала $J(x)$. Кроме того, по теореме 2.5.1 $J(x)$ — спрямляющий идеал. Ясно, что $I \subseteq \bigcap\limits_{x \in L \setminus I} J(x)$. Если $y \in \bigcap\limits_{x \in L \setminus I} J(x)$, то $y \in J(x)$ для любого $x \in L \setminus I$, и значит, в случае $y \notin I$ имеем $y \in J(y)$, противоречие. Поэтому $y \in I$. Таким образом, $I = \bigcap\limits_{x \in L \setminus I} J(x)$. □

2.6. Разложение в декартову сумму l-алгебр над направленным полем

Рассмотрим l-алгебры L_i $(i \in I)$ над частично упорядоченным полем F и алгебру $\bar{L} = \overline{\sum\limits_{i \in I} L_i}$ над полем F, являющуюся множеством всех функций f, определённых на I, таких что для любого $i \in I$ выполнено $f(i) \in L_i$, а операции на $\bar{L}$ определены покоординатно, т. е. $(f+g)(i) = f(i) + g(i)$, $(\alpha f)(i) = \alpha f(i)$, $fg(i) = f(i)g(i)$ для $f, g \in \bar{L}$, $\alpha \in F$. Будем называть алгебру $\bar{L}$ *кардинальной* (или *декартовой*) *суммой* l-алгебр L_i $(i \in I)$. При этом на $\bar{L}$ можно задать покоординатное отношение порядка: $f \leqslant g$ тогда и только тогда, когда $f(i) \leqslant g(i)$ в L_i для всех $i \in I$.

Предложение 2.6.1. *Декартова сумма* $\bar{L} = \overline{\sum_{i\in I}} L_i$ *частично упорядоченных по Копытову алгебр* L_i *над полем* F *является частично упорядоченной по Копытову алгеброй над полем* F *относительно покоординатного порядка.*

Подалгебра $L = \sum_{i\in I} L_i$ в $\bar{L}$, состоящая из всех функций, отличных от нуля лишь на конечном числе индексов $i \in I$, называется *прямой суммой* l-алгебр L_i.

Предложение 2.6.2. *Если* $\{M_\alpha,\ \alpha \in I\}$ — *множество* l-*идеалов* l-*алгебры* L *над частично упорядоченным полем* F, *такое что* $\bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha = \{0\}$, *то* l-*алгебра* L l-*изоморфна* l-*подалгебре декартовой суммы* l-*алгебр* $L_\alpha = L/M_\alpha$, $\alpha \in I$.

Доказательство. Отметим, что для любого $\alpha \in I$ по следствию 2.3.2 фактор-алгебра $L_\alpha = L/M_\alpha$ есть l-алгебра над полем F.

Применяя к системе $\{M_\alpha,\ \alpha \in I\}$ предложение 1.1.4, получаем, что существует отображение φ l-группы $\langle L, +\rangle$ в декартову сумму l-групп L_α, действующее по правилу $\varphi(x) = f_x$ для любого $x \in L$, где $f_x(\alpha) = x + M_\alpha \in L_\alpha$. При этом φ является l-гомоморфизмом указанных l-групп. Покажем, что φ — l-гомоморфизм l-алгебр L и $\overline{\sum_l}_{\alpha\in I} L_\alpha$.

Если $x, y \in L$, $\lambda \in F$, то $\varphi(\lambda x) = f_{\lambda x}$ и $\varphi(xy) = f_{xy}$, при этом по определению декартовой суммы имеем

$$f_{\lambda x}(\alpha) = \lambda x + M_\alpha = \lambda(x + M_\alpha) = \lambda f_x(\alpha)$$

и

$$f_{xy}(\alpha) = xy + M_\alpha = (x + M_\alpha)(y + M_\alpha) = f_x(\alpha) f_y(\alpha)$$

для любого $\alpha \in I$. Следовательно, $\varphi(\lambda x) = \lambda\varphi(x)$ и $f_{xy} = f_x f_y$, т. е. $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.

Таким образом, по определению 2.3.3 φ является l-гомоморфизмом алгебр L и $\overline{\sum_l}_{\alpha\in I} L_\alpha$. Отсюда по теореме 2.3.9 следует, что существует l-изоморфизм $\bar{\varphi}$ естественно упорядоченной фактор-алгебры $L/\operatorname{Ker}\varphi$ и $\operatorname{Im}\varphi$, при этом $\operatorname{Im}\varphi$ является по замечанию 2.3.2 l-подалгеброй в $\overline{\sum_l}_{\alpha\in I} L_\alpha$. Если $x \in \operatorname{Ker}\varphi$, то $f_x = 0$, т. е. $f_x(\alpha) = x + M_\alpha = M_\alpha$ для любого $\alpha \in I$. Поэтому $x \in M_\alpha$ для всех $\alpha \in I$, откуда следует, что $x \in \bigcap_{\alpha\in I} M_\alpha = \{0\}$, и значит, $x = 0$. Так как $\operatorname{Ker}\varphi = \{0\}$, то L l-изоморфна l-подалгебре декартовой l-суммы $\overline{\sum_l}_{\alpha\in I} L_\alpha$. □

Теорема 2.6.1. *Для всякой решёточно* $\mathcal{K}$-*упорядоченной алгебры* L *над направленным полем* F, *удовлетворяющим условию* (1), *существует решёточный изоморфизм из* L *в декартову сумму линейно* $\mathcal{K}$-*упорядоченных алгебр.*

Доказательство. Используя предложение 2.5.1, для l-идеала $\{0\}$ из L получаем, что $\{0\} = \bigcap\limits_{a \in L \setminus \{0\}} J(a)$, где нижний идеал скачка $J(a)$, определяемый элементом a, является по теореме 2.5.1 спрямляющим l-идеалом в L, т. е. $L/J(a)$ — линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра. Следовательно, множество l-идеалов $\{J(a),\ a \in L \setminus \{0\}\}$ удовлетворяет условию предложения 2.6.2, и значит, l-алгебра L над направленным полем F l-изоморфна l-подалгебре декартовой суммы линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр $L/J(a)$, где $a \in L \setminus \{0\}$. $\square$

Следствие 2.6.1. *Конечномерная решёточно упорядоченная по Копытову ассоциативная алгебра* (*алгебра Ли*) *над линейно упорядоченным полем нильпотентна.*

Доказательство. По теореме 2.6.1 конечномерная алгебра над полем l-изоморфна l-подалгебре прямой суммы линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр, которые по следствию 2.4.1 нильпотентны. $\square$

Для произвольного элемента x алгебры L над полем F обозначим через α_x и α'_x преобразования $L \to L$ по правилу $\alpha_x(a) = a + ax$ для любого $a \in L$ и $\alpha'_x(a) = a + xa$ для любого $a \in L$.

Следствие 2.6.2. *В l-алгебре L над направленным полем, удовлетворяющим условию* (1), *для любых элементов $a, b, x \in L$ справедливы равенства*

$$\alpha_x(a \wedge b) = \alpha_x(a) \wedge \alpha_x(b), \quad \alpha_x(a \vee b) = \alpha_x(a) \vee \alpha_x(b).$$

Доказательство. Согласно теореме 2.6.1 существует l-изоморфизм φ l-алгебры L в l-подалгебру L_0 декартовой суммы $\overline{\sum_{i \in I}}_l L_i$ линейно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр L_i. Пусть $a', b', x' \in L$ и $a = \varphi(a')$, $b = \varphi(b')$ и $x = \varphi(x')$ из L_0, где

$$a = (a(1), a(2), \ldots, a(i), \ldots), \quad b = (b(1), b(2), \ldots, b(i), \ldots),$$
$$x = (x(1), x(2), \ldots, x(i), \ldots).$$

Учитывая линейную упорядоченность алгебр L_i, по определению декартовой суммы и точной нижней грани получаем $(a \wedge b)(i) = a(i) \wedge b(i)$ и $\alpha_x(a \wedge b)(i) = \alpha_{x(i)}\big(a(i) \wedge b(i)\big)$.

Для элементов $a(i), b(i) \in L_i$ верно, что $a(i) \leqslant b(i)$ или $b(i) \leqslant a(i)$. Если $a(i) \leqslant b(i)$, то $a(i) \wedge b(i) = a(i)$, и значит, $\alpha_{x(i)}\big(a(i) \wedge b(i)\big) = \alpha_{x(i)}\big(a(i)\big)$. Кроме того, по определению 2.1.2 имеем $\alpha_{x(i)}\big(a(i)\big) \leqslant \alpha_{x(i)}\big(b(i)\big)$, откуда ввиду линейной упорядоченности L_i получаем, что $\alpha_{x(i)}\big(a(i)\big) = \alpha_{x(i)}\big(a(i)\big) \wedge \alpha_{x(i)}\big(b(i)\big)$. Комбинируя полученные равенства, получаем, что $\alpha_x(a \wedge b)(i) = \alpha_{x(i)}\big(a(i)\big) \wedge \alpha_{x(i)}\big(b(i)\big) = \alpha_x(a)(i) \wedge \alpha_x(b)(i)$ для всех $i \in I$, откуда следует, что $\alpha_x(a \wedge b) = \alpha_x(a) \wedge \alpha_x(b)$. Аналогичные рассуждения приводят к этому равенству и в случае $b(i) \leqslant a(i)$.

Отсюда с использованием определения l-гомоморфизма заключаем, что

$$\alpha_x(a \wedge b) = \alpha_{\varphi(x')}\big(\varphi(a') \wedge \varphi(b')\big) = \alpha_{\varphi(x')}\big(\varphi(a' \wedge b')\big) = \varphi\big(\alpha_{x'}(a' \wedge b')\big)$$

и

$$\alpha_x(a) \wedge \alpha_x(b) = \alpha_{\varphi(x')}\bigl(\varphi(a')\bigr) \wedge \alpha_{\varphi(x')}\bigl(\varphi(b')\bigr) = \varphi\bigl(\alpha_{x'}(a') \wedge \alpha_{x'}(b')\bigr).$$

По доказанному выше получаем, что $\varphi(\alpha_{x'}\bigl(a' \wedge b')\bigr) = \varphi\bigl(\alpha_{x'}(a') \wedge \alpha_{x'}(b')\bigr)$, откуда по определению изоморфизма следует равенство $\alpha_{x'}(a' \wedge b') = \alpha_{x'}(a') \wedge \alpha_{x'}(b')$.

Аналогично доказывается равенство $\alpha_{x'}(a' \vee b') = \alpha_{x'}(a') \vee \alpha_{x'}(b')$. □

Утверждение следствия 2.6.2 верно и для преобразования α'_x.

Предложение 2.6.3. *В l-алгебре L над направленным полем, удовлетворяющим условию* (1), *справедливо неравенство*

$$-|ab| \leqslant |a| \cdot |b| \leqslant |ab| \quad \textit{для любых} \quad a, b \in L.$$

Доказательство. Для элементов $a, b, x \in L$, используя следствие 2.6.2, получаем

$$\alpha_x(|a|) = \alpha_x\bigl(a \vee (-a)\bigr) = \alpha_x(a) \vee \alpha_x(-a) = \alpha_x(a) \vee \bigl(-\alpha_x(a)\bigr) = |\alpha_x(a)|,$$

т. е. $\alpha_x(|a|) = |\alpha_x(a)|$. Аналогично $\alpha'_x(|a|) = |\alpha'_x(a)|$. Подставляя в данные равенства различные $a, b, x \in L$ и используя свойство (IV) из леммы 1.1.1, можно сделать следующие выводы:

1) $\alpha_{|b|}(|a|) = |\alpha_{|b|}(a)|$, т. е. $|a| \cdot |b| = \bigl|a + a|b|\bigr| - |a|$, и поэтому $|a| \cdot |b| \leqslant \bigl|a \cdot |b|\bigr|$;
2) $\alpha_{-|b|}(|a|) = |\alpha_{-|b|}(a)|$, откуда получаем $|a| - |a|\,|b| = \bigl|a - a|b|\bigr|$, и поэтому $-|a| \cdot |b| \leqslant \bigl|a \cdot |b|\bigr|$;
3) $\alpha'_a(|b|) = |\alpha'_a(b)|$ и $\alpha'_{-a}(|b|) = |\alpha'_{-a}(b)|$, а значит, $a|b| = |b + ab| - |b|$ и $-a|b| = |b + (-a)b| - |b|$. Отсюда получаем, что $a|b| \leqslant |ab|$ и $-a|b| \leqslant |ab|$, что по определению точной верхней грани означает, что $|ab| \geqslant a|b| \vee (-a|b|) = \bigl|a \cdot |b|\bigr|$.

Из пунктов 1) и 3) следует, что $|a| \cdot |b| \leqslant \bigl|a \cdot |b|\bigr| \leqslant |ab|$, а из пунктов 2) и 3) получаем, что $-|a| \cdot |b| \leqslant |ab|$. Таким образом, по определению точной верхней грани имеем $\bigl||a| \cdot |b|\bigr| \leqslant |ab|$. □

3. Радикалы решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр

В этом разделе вводится понятие l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченным полем и изучаются его свойства. В частности, получено поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными и направленными полями. Кроме того, в данном разделе дано определение и описано строение l-произведения l-идеалов l-алгебры, введены понятия l-первичной и l-полупервичной l-алгебры и исследованы их свойства. Для изучения l-первичного радикала l-алгебры введено понятие её нижнего слабо разрешимого l-радикала, изучены его свойства и условия совпадения для каждой l-алгебры введённого радикала с l-первичным радикалом.

3.1. l-произведение l-идеалов l-алгебры

Пусть A — линейная алгебра над частично упорядоченным полем F, решёточно упорядоченная по Копытову, а J_1, J_2 — её l-идеалы. Рассмотрим множество

$$J_1J_2 = \left\{ z \in A \;\middle|\; z = \sum_{i=1}^{n=n(z)} x_i y_i,\ x_i \in J_1,\ y_i \in J_2 \right\},$$

являющееся подпространством в алгебре A. Для l-идеала J в A множество JJ будем обозначать через J^2. Отметим, что если A — ассоциативная алгебра или алгебра Ли, то известно, что J_1J_2 — идеал в A. Но даже если J_1J_2 — идеал в A, то, вообще говоря, J_1J_2 не будет l-идеалом. Для того чтобы восполнить этот недостаток, рассмотрим наименьший l-идеал $I_{J_1J_2}$, содержащий множество J_1J_2, который будем называть *l-произведением* l-идеалов J_1, J_2.

Отметим, что из определения l-произведения l-идеалов следует, что $I_{J_1J_2} \subseteq J_1 \cap J_2$.

Опишем l-произведение l-идеалов произвольной l-алгебры.

Предложение 3.1.1. *Если J_1 и J_2 — l-идеалы l-алгебры L над направленным полем F, удовлетворяющим условию* (1), *то l-идеал $I_{J_1J_2}$ совпадает с множеством*

$$M = \left\{ x \in L \;\middle|\; |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n=n(x)} |a_i b_i|,\ a_i \in J_1,\ b_i \in J_2 \right\}.$$

Доказательство. Отметим, что $J_1J_2 \subseteq M$ и множество M включено в любой l-идеал из L, который содержит множество J_1J_2. Действительно, если $x \in M$, то $|x| \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n=n(x)} |a_i b_i|$, где $a_i \in J_1, b_i \in J_2$. Поскольку $a_i b_i \in J_1J_2$, то по лемме 2.2.1 элемент $|a_i b_i|$ принадлежит любому l-идеалу, содержащему множество J_1J_2. По предложению 2.2.4 элемент x также принадлежит любому l-идеалу, содержащему множество J_1J_2, а значит, $x \in I_{J_1J_2}$.

Докажем, что множество M является идеалом в L.

Пусть $x, y \in M$. Принимая во внимание способ задания множества M и свойство (IV) из леммы 1.1.1, заключаем, что

$$|x-y| \leqslant |x| + |y| \leqslant \sum_{i=1}^{n=n(x)} |a_i b_i| + \sum_{i=1}^{n=n(y)} |c_i d_i| = \sum_{i=1}^{n(x)+n(y)} |r_i s_i|,$$

где $r_i \in J_1$, $s_i \in J_2$. Таким образом, $x - y \in M$.

Если $\lambda \in F$, то по лемме 1.3.2 найдётся элемент $\alpha \in F$, $\alpha \geqslant 0$, для которого $|\lambda x| \leqslant \alpha |x|$. Отсюда по определению 2.1.2 имеем

$$|\lambda x| \leqslant \alpha |x| \leqslant \sum_{i=1}^{n=n(x)} \alpha |a_i b_i|.$$

Для каждого $1 \leqslant i \leqslant n(x)$ по замечанию 1.3.1 получаем, что $\alpha|a_i b_i| = |\alpha(a_i b_i)| = |(\alpha a_i) b_i|$. Таким образом,

$$|\lambda x| \leqslant \sum_{i=1}^{n=n(x)} |(\alpha a_i) b_i|,$$

где $\alpha a_i \in J_1$, $b_i \in J_2$. Следовательно, $\lambda x \in M$.

Пусть $z \in L$. Тогда $|xz| \leqslant |x|$ и $|zx| \leqslant |x|$ по предложению 2.1.4, и поэтому $xz, zx \in M$. Таким образом, M является идеалом в L.

Если элементы $x \in M$, $y \in L$ удовлетворяют условию $|y| \leqslant |x|$, то ясно, что $y \in M$. Значит, для идеала M выполнено условие 2) предложения 2.2.4, поэтому M — l-идеал l-алгебры L. □

Рассмотрим свойства, которыми обладает l-произведение l-идеалов l-алгебры L.

Предложение 3.1.2. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем F и J, R и T — l-идеалы в L. Тогда справедливы следующие соотношения*:

а) $I_{JT} \subseteq J + T$;

б) $I_{J(T+R)} = I_{JT} + I_{JR}$.

Доказательство. Пусть $x \in I_{JT}$. Тогда по предложению 3.1.1 $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i b_i|$, где $a_i \in J$, $b_i \in T$. Так как $|a_i b_i| \leqslant |a_i|$ по предложению 2.1.4, то $|a_i b_i| \leqslant |a_i| + |b_i|$, и поэтому

$$|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i| + \sum_{i=1}^{n(x)} |b_i|.$$

Для положительных элементов $|x|$, $\sum_{i=1}^{n(x)} |a_i|$ и $\sum_{i=1}^{n(x)} |b_i|$ l-алгебры L по следствию 1.1.1 получаем, что $|x| = a + b$, где $0 \leqslant a \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i|$ и $0 \leqslant b \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |b_i|$. Поскольку идеалы J и T выпуклы, $a \in J$ и $b \in T$. Так как $0 \leqslant x^+ \leqslant |x|$, то аналогично получаем, что $x^+ = a' + b'$, где $a' \in J$ и $b' \in T$. По свойству (III) из леммы 1.1.1 $x = x^+ + x^+ - |x|$, поэтому $x = (a' + a' - a) + (b' + b' - b) \in J + T$. Следовательно, $I_{JT} \subseteq J + T$.

Если $x \in I_{J(T+R)}$, то согласно предложению 3.1.1 $|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i b_i|$, где $a_i \in J$, $b_i \in T + R$. Так как $b_i \in T + R$, то $b_i = c_i + d_i$ для некоторых элементов $c_i \in T$, $d_i \in R$. Отсюда с учётом свойства (IV) из леммы 1.1.1 получаем, что $|a_i(c_i + d_i)| \leqslant |a_i c_i| + |a_i d_i|$, и следовательно,

$$|x| \leqslant \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i c_i| + \sum_{i=1}^{n(x)} |a_i d_i|.$$

Применяя следствие 1.1.1, получаем, что $|x| = x_1 + x_2$, где $0 \leqslant x_1 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n(x)} |a_i c_i|$ и $0 \leqslant x_2 \leqslant \sum\limits_{i=1}^{n(x)} |a_i d_i|$. При этом для x_1, x_2 по предложению 3.1.1 имеем $x_1 \in I_{JT}$ и $x_2 \in I_{JR}$. Поскольку $0 \leqslant x^+ \leqslant |x|$, то, рассуждая аналогично, получим, что $x^+ = x_1' + x_2'$, где $x_1' \in I_{JT}$ и $x_2' \in I_{JR}$. Учитывая равенство $x = x^+ + x^+ - |x|$, имеем $x = (x_1' + x_1' - x_1) + (x_2' + x_2' - x_2)$, откуда следует, что $x \in I_{JT} + I_{JR}$. Таким образом, $I_{J(T+R)} \subseteq I_{JT} + I_{JR}$.

Так как $JT \subseteq J(T+R)$ и $JR \subseteq J(T+R)$, то $I_{JT} \subseteq I_{J(T+R)}$ и $I_{JR} \subseteq I_{J(T+R)}$, откуда следует, что $I_{JT} + I_{JR} \subseteq I_{J(T+R)}$. $\square$

3.2. l-первичные алгебры. Свойства l-первичных идеалов l-алгебр. Насыщенные системы

Определение 3.2.1. Назовём l-алгебру L над частично упорядоченным полем F l-первичной, если l-произведение любых её двух ненулевых l-идеалов отлично от нуля, иначе говоря, если из $I_{UV} = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$ для любых l-идеалов U, V l-алгебры L. Назовём l-первичным идеалом l-алгебры L такой её l-идеал P, что L/P — l-первичная l-алгебра.

Основные свойства l-первичных идеалов l-алгебры над частично упорядоченным полем сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3.2.1. *Для l-идеала P l-алгебры L над частично упорядоченным полем F следующие условия эквивалентны*:

а) *P — l-первичный идеал*;

б) *для любых l-идеалов I_1 и I_2 l-алгебры L из $I_1 I_2 \subseteq P$ следует хотя бы одно из соотношений $I_1 \subseteq P$, $I_2 \subseteq P$*;

в) *для любых l-идеалов I_1, I_2 в L из $I_{I_1 I_2} \subseteq P$ следует $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$*;

г) *для всех $a, b \in L$ из $I_a I_b \subseteq P$ следует, что $a \in P$ или $b \in P$.*

Доказательство. Покажем, что справедлива импликация а) $\Longrightarrow$ б). Пусть I_1, I_2 — произвольные l-идеалы в L, для которых $I_1 I_2 \subseteq P$. По теореме 2.3.7 l-идеалам I_1, I_2 из L соответствуют l-идеалы $\bar{I}_1$, $\bar{I}_2$ из l-алгебры L/P. Из $I_1 I_2 \subseteq P$ следует, что $\bar{I}_1 \bar{I}_2 = \{P\}$ и $I_{\bar{I}_1 \bar{I}_2} = \{P\}$ в L/P. Отсюда, ввиду l-первичности l-алгебры L/P, получаем, что $\bar{I}_1 = P$ или $\bar{I}_2 = P$. Значит, любой класс $x + P \in \bar{I}_1$ совпадает с P или любой класс $y + P \in \bar{I}_2$ совпадает с P, в частности, $x + P = P$ для любого $x \in I_1$ или $y + P = P$ для любого $y \in I_2$. Таким образом, $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$.

Докажем, что справедлива импликация б) $\Longrightarrow$ в). Если l-идеалы I_1, I_2 в L таковы, что $I_{I_1 I_2} \subseteq P$, то $I_1 I_2 \subseteq P$. Отсюда по пункту б) следует, что $I_1 \subseteq P$ или $I_2 \subseteq P$.

Покажем, что справедлива импликация в) $\Longrightarrow$ г). Рассмотрим произвольные $a, b \in L$, для которых $I_a I_b \subseteq P$. Тогда $I_{I_a I_b} \subseteq P$, что по пункту в) влечёт $I_a \subseteq P$ или $I_b \subseteq P$. Следовательно, $a \in P$ или $b \in P$.

Осталось доказать, что справедлива импликация г) $\Longrightarrow$ а). Покажем, что L/P — l-первичная l-алгебра. Рассмотрим для этого l-идеалы $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P, такие что $I_{\bar{U}\bar{V}} = \{P\}$ в L/P. Для того чтобы l-алгебра L/P была l-первичной, необходимо выполнение хотя бы одного из равенств $\bar{U} = \{P\}$, $\bar{V} = \{P\}$.

Допустим, что ни одно равенство не выполняется, т. е. $\bar{U} \neq \{P\}$ и $\bar{V} \neq \{P\}$. По теореме 2.3.7 в l-алгебре L найдутся l-идеалы U, V, соответствующие l-идеалам $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P. Кроме того, существуют элементы $a \in U$ и $b \in V$, такие что $a + P \neq P$ и $b + P \neq P$, т. е. $a \notin P$ и $b \notin P$. Из $a \in U$ и $b \in V$ следует, что $I_a \subseteq U$, $I_b \subseteq V$, и значит, $I_a I_b \subseteq UV$.

Поскольку $I_{\bar{U}\bar{V}} = \{P\}$, то $\bar{U}\bar{V} = \{P\}$, и поэтому $UV \subseteq P$. Отсюда по доказанному выше получаем включение $I_a I_b \subseteq P$, из которого по пункту г) следует, что $a \in P$ или $b \in P$. Полученное противоречие с выбором элементов $a, b \notin P$ показывает, что $\bar{U} = \{P\}$ или $\bar{V} = \{P\}$. Значит, L/P является по определению 3.2.1 l-первичной l-алгеброй.

Таким образом, верна цепочка импликаций а) $\Longrightarrow$ б) $\Longrightarrow$ в) $\Longrightarrow$ г) $\Longrightarrow$ а), которая доказывает эквивалентность всех выписанных условий. $\square$

Прежде чем сформулировать следствие из данной теоремы, необходимо ввести следующее понятие.

Определение 3.2.2. Непустое подмножество $M \subseteq L$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F назовём насыщенной системой, если для любых $a, b \in M$ существует элемент $z \in I_a I_b$, такой что $z \in M$.

Замечание 3.2.1. Понятие насыщенной системы для l-алгебр является аналогом понятия l-m-системы для решёточно упорядоченных колец (см. [25]).

Из теоремы 3.2.1 выводится следствие.

Следствие 3.2.1. *l-идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем F является l-первичным идеалом тогда и только тогда, когда $L \setminus I$ — насыщенная система.*

Доказательство. Пусть I — l-первичный идеал l-алгебры L и $x, y \in L \setminus I$. Если $I_x I_y \subseteq I$, то по пункту г) теоремы 3.2.1 $x \in I$ или $y \in I$, что противоречит выбору элементов $x \notin I$ и $y \notin I$. Следовательно, $I_x I_y \nsubseteq I$, поэтому существует такой элемент $z \in I_x I_y$, что $z \notin I$, т. е. $z \in L \setminus I$. По определению 3.2.2 $L \setminus I$ является насыщенной системой.

Обратно, пусть I — l-идеал l-алгебры L, для которого $L \setminus I$ — насыщенная система. Рассмотрим $x, y \in L$, удовлетворяющие условию $I_x I_y \subseteq I$. Если $x \notin I$ и $y \notin I$, то $x, y \in L \setminus I$ и по определению 3.2.2 найдётся элемент $z \in I_x I_y$, $z \in L \setminus I$, т. е. $z \notin I$. Значит, $I_x I_y \nsubseteq I$, что противоречит условию $I_x I_y \subseteq I$. Следовательно, $x \in I$ или $y \in I$, а l-идеал I является по пункту г) теоремы 3.2.1 l-первичным идеалом l-алгебры L. $\square$

Рассмотрим необходимые и достаточные условия l-первичности произвольной l-алгебры над частично упорядоченным полем.

Предложение 3.2.1. *l-алгебра L над частично упорядоченным полем F является l-первичной тогда и только тогда, когда нулевой l-идеал является l-первичным в L.*

Доказательство. Заметим, что по теореме 2.3.4 и определению изоморфизма алгебр l-алгебры L и $L/\{0\}$ l-изоморфны. Следовательно, l-алгебра L является l-первичной в том и только в том случае, когда l-первична l-алгебра $L/\{0\}$, а это по определению 3.2.1 возможно тогда и только тогда, когда нулевой l-идеал $\{0\}$ является l-первичным в L. □

Предложение 3.2.2. *l-алгебра L над частично упорядоченным полем F является l-первичной тогда и только тогда, когда для любых l-идеалов U и V в L из $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.*

Доказательство. Необходимым и достаточным условием l-первичности l-алгебры L является по предложению 3.2.1 l-первичность нулевого l-идеала в L, что возможно согласно пункту б) теоремы 3.2.1 тогда и только тогда, когда для любых l-идеалов U и V в L из $UV \subseteq \{0\}$ следует, что $U \subseteq \{0\}$ или $V \subseteq \{0\}$. □

Ввиду предложения 3.2.2 можно сформулировать следующее определение l-первичной l-алгебры, эквивалентное определению 3.2.1.

Определение 3.2.3. l-алгебра L над частично упорядоченным полем F называется l-первичной l-алгеброй, если для любых её двух l-идеалов U и V из $UV = 0$ следует, что $U = 0$ или $V = 0$.

Далее рассмотрим понятие минимального над l-идеалом l-первичного идеала l-алгебры и опишем основные свойства, связывающие данное понятие с введённым выше понятием насыщенной системы.

Определение 3.2.4. l-первичный идеал P l-алгебры L над частично упорядоченным полем F называется минимальным над l-идеалом I из L l-первичным идеалом, если $P \supseteq I$ и не существует такого l-первичного идеала P', что $P \supset P' \supseteq I$. Минимальные l-первичные идеалы — это минимальные над нулевым идеалом l-первичные идеалы.

Теорема 3.2.2. *Пусть I — l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем F, M — насыщенная система и $I \cap M = \varnothing$. Тогда*

а) *множество $\mathcal{P}$ таких l-идеалов J, что $J \supseteq I$ и $J \cap M = \varnothing$, индуктивно, при этом максимальные элементы в $\mathcal{P}$ являются l-первичными идеалами в L, содержащими I;*

б) *множество $\mathcal{M}$ всех таких насыщенных систем M', что $M \subseteq M'$ и $M' \cap I = \varnothing$, индуктивно, при этом максимальные элементы в $\mathcal{M}$ — это дополнения в L к минимальным l-первичным идеалам, содержащим I.*

Доказательство. Докажем утверждение а). Множество $\mathcal{P}$, рассмотренное в условии теоремы, непусто, так как $I \in \mathcal{P}$. Если

$$J_1 \subset J_2 \subset \ldots \subset J_n \subset \ldots -$$

возрастающая цепочка l-идеалов $J_n \in \mathcal{P}$, то $J = \bigcup J_n$ является по лемме 2.2.3 l-идеалом, при этом ясно, что $J \supseteq I$ и $J \cap M = \varnothing$, т. е. $\mathcal{P}$ — индуктивное множество. По лемме Цорна существуют максимальные элементы $P \in \mathcal{P}$. Покажем, что элементы P — l-первичные идеалы, т. е. L/P — l-первичная l-алгебра.

Так как P — l-идеал, то по следствию 2.3.2 фактор-алгебра L/P является l-алгеброй относительно естественного порядка. Если $\bar{U}$, $\bar{V}$ — l-идеалы из L/P, удовлетворяющие условию $\bar{U}\bar{V} = \{P\}$, то по теореме 2.3.5 им соответствуют l-идеалы U, V в L. Кроме того, из $\bar{U}\bar{V} = \{P\}$ следует, что $UV \subseteq P$.

Если $U \nsubseteq P$ и $V \nsubseteq P$, то $U + P \supset P$, $V + P \supset P$. Отсюда ввиду максимальности l-идеала P относительно условия $P \cap M = \varnothing$ получаем, что существуют элементы $x \in (U+P) \cap M$ и $y \in (V+P) \cap M$. Так как M — насыщенная система, то найдётся такой элемент $t \in I_x I_y$, что $t \in M$, при этом $t \notin P$ в силу равенства $P \cap M = \varnothing$. С другой стороны, из того, что $x \in (U+P)$, $y \in (V+P)$, следует, что $I_x \subseteq U + P$, $I_y \subseteq V + P$, откуда с учётом соотношения $UV \subseteq P$ получаем, что $t \in P$, противоречие.

Таким образом, $U \subseteq P$ или $V \subseteq P$. Если $U \subseteq P$, то $\bar{U} = P$. Аналогично из $V \subseteq P$ следует $\bar{V} = P$. Значит, L/P является по определению 3.2.3 l-первичной l-алгеброй, а P — l-первичным идеалом.

Докажем утверждение б). Множество $\mathcal{M}$, рассмотренное в условии теоремы, непусто, так как $M \in \mathcal{M}$. Ясно, что объединение $\tilde{M} = \bigcup M_i$ возрастающей цепочки $M_1 \subset M_2 \subset \ldots \subset M_n \subset \ldots$ насыщенных систем, таких что $M_i \supseteq M$ и $M_i \cap I = \varnothing$, является насыщенной системой, причём $\tilde{M} \cap I = \varnothing$. Значит, $\mathcal{M}$ — индуктивное множество. Если M^* — максимальный элемент в $\mathcal{M}$, который существует по лемме Цорна, то для I и M^* в силу пункта а) найдётся l-первичный идеал P, такой что $P \supseteq I$ и $P \cap M^* = \varnothing$. Тогда $\hat{M} = L \setminus P$ является по следствию 3.2.1 насыщенной системой. Так как $P \cap M^* = \varnothing$, то $M^* \subseteq L \setminus P = \hat{M}$, а $P \supseteq I$ влечёт $\hat{M} \cap I = \hat{M} \cap P = \varnothing$. Так как система M^* максимальна, из соотношений $\hat{M} \supseteq M^* \supseteq M$ и $\hat{M} \cap I = \varnothing$ следует, что $\hat{M} \in \mathcal{M}$ и $\hat{M} = M^*$. Итак, $M^* = L \setminus P$, где P — l-первичный идеал.

Если P' — l-первичный идеал и $P \supseteq P' \supseteq I$, то $L \setminus P \subseteq L \setminus P'$, при этом $L \setminus P$ и $L \setminus P'$ являются по следствию 3.2.1 насыщенными системами, не пересекающимися с I. Отсюда ввиду максимальности насыщенной системы $M^* = L \setminus P$ в $\mathcal{M}$ получаем, что $L \setminus P = L \setminus P'$, и поэтому $P = P'$. Таким образом, P является по определению 3.2.4 минимальным l-первичным над I l-идеалом. □

Теорема 3.2.3. *В любой l-алгебре над частично упорядоченным полем каждый l-первичный идеал содержит минимальный l-первичный идеал.*

Доказательство. Для любого l-первичного идеала J l-алгебры L по следствию 3.2.1 $M = L \setminus J$ — насыщенная система и $M \cap \{0\} = \varnothing$. Переходя с помощью теоремы 3.2.2 к максимальной насыщенной системе $M^* = L \setminus P$, для которой P — минимальный l-первичный идеал, $M \subseteq M^*$ и $M^* \cap \{0\} = \varnothing$, получаем, что $P \subseteq L \setminus M^* \subseteq L \setminus M = J$. Таким образом, $P \subseteq J$. □

3.3. l-первичный радикал l-алгебры

Определение 3.3.1. l-первичным радикалом $l\text{-rad}_K(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F называется пересечение всех l-первичных идеалов l-алгебры L.

Теорема 3.3.1. *Любая конечномерная линейно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра A над линейно упорядоченным полем F совпадает со своим l-первичным радикалом.*

Доказательство. Согласно теореме 2.4.2 все l-идеалы в A образуют центральную систему. Рассмотрим произвольный скачок $A_n \subset A_{n+1}$ этой системы.

Рассмотрим l-идеал A_n и фактор-алгебру A/A_n. По теореме 2.3.7 l-идеалу $A_{n+1} \supset A_n$ из A при естественном гомоморфизме соответствует l-идеал $\bar{A}_{n+1} = \{x + A_n \mid x \in A_{n+1}\} \neq A_n$ в A/A_n. Так как система идеалов алгебры A является центральной, то $A_{n+1}A_{n+1} \subseteq A_n$. Отсюда следует, что $\bar{A}_{n+1}$ — ненулевой l-идеал в A/A_n, для которого $\bar{A}_{n+1}\bar{A}_{n+1} = A_n$. Поэтому l-идеал A_n не является l-первичным идеалом в A. Аналогично рассуждая и учитывая, что рассматриваемая центральная система идеалов содержит все l-идеалы алгебры A, получаем, что ни один l-идеал в A, кроме самой алгебры A, не является l-первичным. Следовательно, $l\text{-rad}_K(A) = A$. □

Далее рассмотрим свойства l-первичного радикала l-алгебр, дадим его поэлементное описание. Начнём с описания строения l-первичного радикала l-алгебр над частично упорядоченными полями.

Теорема 3.3.2. *l-первичный радикал $l\text{-rad}_K(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F совпадает с пересечением минимальных l-первичных идеалов.*

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 3.2.3. □

Описание l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченным полем дано в теореме 3.3.3.

Теорема 3.3.3. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, $l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}_K(L)$;

1′) *a принадлежит пересечению всех минимальных l-первичных l-идеалов в L*;

2) *любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2}$, содержит нуль*;

3) *в любой последовательности $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_1 = a$, $a_{i+1} \in I^2_{a_i}$, начиная с некоторого места все элементы равны нулю.*

Доказательство. Эквивалентность 1) $\Longleftrightarrow$ 1′) следует из теоремы 3.3.2.

Покажем, что справедлива импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существует элемент $a \in l\text{-rad}_K(L)$, не удовлетворяющий условию 2). Тогда найдётся неисчезающая последовательность $\{a_n \in L \setminus \{0\} \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2}$.

По лемме Цорна существует максимальный l-идеал P относительно свойства $P \cap \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$. Покажем, что P — l-первичный идеал. Рассмотрим l-идеалы I_1, I_2 в L, такие что $I_1 \nsubseteq P$ и $I_2 \nsubseteq P$. Для этих l-идеалов справедливы включения $I_1 + P \supset P$ и $I_2 + P \supset P$, из которых ввиду максимальности l-идеала P следует существование элементов a_i, a_j последовательности $\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, таких что $a_j \in I_1 + P$ и $a_i \in I_2 + P$. Пусть для определённости $i \geqslant j$. Для элемента a_j имеем $I_{a_j} \subseteq I_1 + P$, и следовательно, $I_{(I_{a_j})^2} \subseteq I_1 + P$. Так как $a_{j+1} \in I_{(I_{a_j})^2}$, то $a_{j+1} \in I_1 + P$. Повторяя рассуждения для элемента a_{j+1}, имеем $a_{j+2} \in I_1 + P$. За конечное число шагов получим, что $a_i \in I_1 + P$.

Таким образом, $a_i \in (I_2+P) \cap (I_1+P)$, и поэтому $(I_{a_i})^2 \subseteq (I_1+P)(I_2+P) = I_1 I_2 + P$. Тогда $a_{i+1} \in I_{(I_{a_i})^2} \subseteq I_{I_1 I_2 + P}$. Поскольку $a_{i+1} \notin P$, то $I_{I_1 I_2 + P} \nsubseteq P$. Если $I_1 I_2 + P \subseteq P$, то $I_{I_1 I_2 + P} \subseteq I_P = P$, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $I_1 I_2 + P \nsubseteq P$, поэтому $I_1 I_2 \nsubseteq P$.

Из доказанного выше по условию б) теоремы 3.2.1 следует l-первичность l-идеала P. Так как $a \notin P$, где P — l-первичный идеал, то по определению 3.3.1 получаем, что $a \notin l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Следовательно, справедлива импликация 1) $\Longrightarrow$ 2).

Покажем, что справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 3). Рассмотрим произвольную последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ вида $a_1 = a$, $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$. Для каждого элемента данной последовательности выполнено соотношение $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2 \subseteq I_{(I_{a_i})^2}$, поэтому последовательность удовлетворяет условию 2) и, следовательно, содержит нуль.

Осталось доказать, что справедлива импликация 3) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует элемент $r \in L$, $r \notin l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$, удовлетворяющий условию 3). Поскольку $r \notin l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$, то $r_1 = r \notin P$ для некоторого l-первичного идеала P. Если $(I_{r_1})^2 \subseteq P$, то по условию г) теоремы 3.2.1 получаем, то $r_1 \in P$, противоречие. Следовательно, $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поэтому существует элемент $r_2 \in (I_{r_1})^2$, такой что $r_2 \in L \setminus P$. Рассуждая аналогично, построим последовательность $\{r_n \in L \setminus P \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $r_1 = r$ и $r_{i+1} \in (I_{r_i})^2$. Поскольку все члены этой последовательности принадлежат $L \setminus P$, то $r_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, r не удовлетворяет условию 3), что противоречит выбору элемента r. □

Следствие 3.3.1. *Для l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем F справедливо включение $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) \subseteq \mathrm{rad}(L)$.*

Доказательство. Для элемента $a \in l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ рассмотрим последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in (a_i)^2$. Согласно замечанию 2.2.1 для членов данной последовательности выполняется соотношение $a_{i+1} \in [(a_i), (a_i)] \subseteq [I_{a_i}, I_{a_i}]$. Так как $a \in l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$, то по пункту 2) теоремы 3.3.3 рассматриваемая последовательность содержит нуль. Известно, что первичный радикал $\mathrm{rad}(L)$ алгебры Ли L над полем F совпадает со множеством всех таких её элементов x, для каждого из которых любая последовательность $\{x_i \in L \mid i \in \mathbb{N}\}$ вида $x_1 = x$ и $x_{i+1} \in (x_i)^2$ обращается в нуль начиная с некоторого номера (см. [31, теорема 2.3.1]). Отсюда по доказанному выше получаем, что $a \in \mathrm{rad}(L)$. □

Описание l-первичного радикала l-алгебры над направленным полем дано в теореме 3.3.4.

Теорема 3.3.4. *Пусть L — l-алгебра над направленным полем F, $l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда для элемента $a \in L$ следующие условия эквивалентны*:

1) $a \in l\text{-rad}_K(L)$;
2) *любая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} = x_i y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i|a_i|$, $0 \leqslant y_i \leqslant \beta_i|a_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in F$, содержит нуль.*

Доказательство. Покажем, что справедлива импликация 1) $\Longrightarrow$ 2). Пусть существует элемент $a \in l\text{-rad}_K(L)$, не удовлетворяющий условию 2). Тогда найдётся неисчезающая последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} = x_i y_i$, где $0 \leqslant x_i \leqslant \alpha_i|a_i|$, $0 \leqslant y_i \leqslant \beta_i|a_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in F$. Так как $a_i \in I_{a_i}$ и l-идеал I_{a_i} выпуклый, то по лемме 2.2.1 получаем, что $x_i, y_i \in I_{a_i}$ и $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$. Тогда последовательность $\{a_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$ удовлетворяет условию 3) теоремы 3.3.3 и, значит, содержит нуль в силу условия $a \in l\text{-rad}_K(L)$, противоречие. Следовательно, верна импликация 1) $\Longrightarrow$ 2).

Покажем, что справедлива импликация 2) $\Longrightarrow$ 1). Пусть существует элемент $r \in L$, удовлетворяющий условию 2) и не удовлетворяющий условию 1), т. е. $r_1 = r \notin P$ для некоторого l-первичного идеала P из L. Так как $r_1 \notin P$, то $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поскольку иначе по условию г) теоремы 3.2.1 выполнялось бы соотношение $r_1 \in P$. Следовательно, $(I_{r_1})^2 \nsubseteq P$, поэтому существуют такие элементы $x, y \in I_{r_1}$, что $xy \notin P$. Так как по свойству (III) из леммы 1.1.1 $x = x^+ + x^-$ и $y = y^+ + y^-$, то $xy = x^+y^+ + x^+y^- + x^-y^+ + x^-y^-$. Поскольку $xy \notin P$, то хотя бы одно из слагаемых суммы не принадлежит P. В случае когда $x^+y^+ \notin P$, имеем $x^+, y^+ \geqslant 0$. Если же $x^+y^- \notin P$, то $-(x^+y^-) = x^+(-y^-) \notin P$, при этом $x^+, -y^- \geqslant 0$. Аналогично $(-x^-)y^+ \notin P$ или $(-x^-)(-y^-) \notin P$. Таким образом, можно считать, что в P не содержится элемент bc, где $b, c \geqslant 0$ и $b, c \in I_{r_1}$. При этом для $b, c \in I_{r_1}$ по предложению 2.2.5 имеем $b = |b| \leqslant \alpha_1|r_1|$ и $c = |c| \leqslant \beta_1|r_1|$, где $\alpha_1, \beta_1 \in F$.

Таким образом, получен элемент $r_2 = bc \notin P$, для которого $0 \leqslant b \leqslant \alpha_1|r_1|$, $0 \leqslant c \leqslant \beta_1|r_1|$ и $\alpha_1, \beta_1 \in F$. Рассуждая аналогично, построим последовательность $\{r_n \in L \setminus P \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $r_1 = r$ и $r_{i+1} = b_i c_i$, где $0 \leqslant b_i \leqslant \alpha_i|r_i|$, $0 \leqslant c_i \leqslant \beta_i|r_i|$ и $\alpha_i, \beta_i \in F$. Поскольку все члены этой последовательности принадлежат $L \setminus P$, то $r_n \neq 0$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Следовательно, r не удовлетворяет условию 2), противоречие. □

Приведём примеры вычислений первичного и l-первичного радикалов с использованием теорем 3.3.3 и 3.3.4 для l-алгебр Ли.

Пример 3.3.1. Пусть L — решёточно упорядоченная алгебра Ли над линейно упорядоченным полем F, рассмотренная в примере 2.1.4.

Вычислим l-первичный радикал l-алгебры Ли L. По теореме 3.3.4 $l\text{-rad}_K(L)$ совпадает со множеством таких элементов $r \in L$, для которых любая последовательность $\{r_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $r_1 = r$, $r_{i+1} = [b_i, c_i]$ и $0 \leqslant b_i \leqslant \alpha_i|r_i|$,

$0 \leqslant c_i \leqslant \beta_i |r_i|$ для некоторых $\alpha_i, \beta_i \in F$, обращается в нуль начиная с некоторого номера.

Используя алгоритм нахождения точной верхней грани для произвольных элементов l-алгебры Ли L, описанный в примере 2.1.4, для любого элемента

$$x = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i e_i \in L$$

получаем, что

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{если } \alpha_1 > 0 \text{ или } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 > 0, \\ -x, & \text{если } \alpha_1 < 0 \text{ или } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 < 0, \\ |\alpha_3| e_3 + |\alpha_4| e_4, & \text{если } \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = 0. \end{cases}$$

Пусть $r_1 = r \in L$. Рассмотрим элементы

$$b_2 = \sum_{i=1}^{4} \beta_{2i} e_i, \quad c_2 = \sum_{i=1}^{4} \gamma_{2i} e_i$$

из L, такие что $0 \leqslant b_2 \leqslant \alpha_{b2} |r_1|$, $0 \leqslant c_2 \leqslant \alpha_{c2} |r_1|$ для некоторых $\alpha_{b2}, \alpha_{c2} \in F$. Тогда

$$r_2 = [b_2, c_2] = (\beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21}) e_4$$

и, следовательно,

$$|r_2| = |\beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21}| e_4.$$

Возьмём $r_3 = [b_3, c_3]$, где $0 \leqslant b_3 \leqslant \alpha_{b3} |r_2|$, $0 \leqslant c_3 \leqslant \alpha_{c3} |r_2|$ для некоторых $\alpha_{b3}, \alpha_{c3} \in F$ и

$$b_3 = \sum_{i=1}^{4} \beta_{3i} e_i, \quad c_3 = \sum_{i=1}^{4} \gamma_{3i} e_i.$$

Учитывая правило задания отношения порядка на L, для $b_3 \in L$ имеем

$$\left[\begin{array}{l} 0 < \beta_{31}, \\ \beta_{31} = 0 \text{ и } 0 < \beta_{32}, \\ \beta_{31} = \beta_{32} = 0 \text{ и } 0 \leqslant \beta_{33}, \beta_{34} \end{array} \right.$$

и

$$\left[\begin{array}{l} \beta_{31} < 0, \\ \beta_{31} = 0 \text{ и } \beta_{32} > 0, \\ \beta_{31} = \beta_{32} = 0,\ \beta_{33} \leqslant 0 \text{ и } \beta_{34} \leqslant \alpha_{b3} |\beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21}|. \end{array} \right.$$

Отсюда следует

$$\begin{cases} \beta_{31} = \beta_{32} = \beta_{33} = 0, \\ 0 \leqslant \beta_{34} \leqslant \alpha_{b3} |\beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21}|. \end{cases}$$

Таким образом, $b_3 = \beta_{34} e_4$, где $0 \leqslant \beta_{34} \leqslant \alpha_{b3} |\beta_{21}\gamma_{22} - \beta_{22}\gamma_{21}|$. Аналогично получаем, что $c_3 = \gamma_{34} e_4$, и поэтому $r_3 = [b_3, c_3] = [\beta_{34} e_4, \gamma_{34} e_4] = 0$.

Итак, для каждого элемента $r \in L$ любая последовательность $\{r_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, где $r_1 = r$, $r_{i+1} = [b_i, c_i]$ и $0 \leqslant b_i \leqslant \alpha_i|r_i|$, $0 \leqslant c_i \leqslant \beta_i|r_i|$, обращается в нуль начиная с номера $i = 3$. Следовательно, $l\text{-rad}_K(L) = L$.

Кроме этого, по следствию 3.3.1 для алгебры L имеет место включение $l\text{-rad}_K(L) \subseteq \mathrm{rad}(L)$. Тогда получаем, что $\mathrm{rad}(L) = L$.

Пример 3.3.2. Для линейно упорядоченной алгебры Ли B над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$, рассмотренной в примере 2.1.2, по теореме 3.3.1 получаем, что $l\text{-rad}_K(B) = B$. Так как по следствию 3.3.1 справедливо включение $l\text{-rad}_K(B) \subseteq \mathrm{rad}(B)$, то $\mathrm{rad}(B) = B$.

Полученные равенства $\mathrm{rad}(L) = L$ и $l\text{-rad}_K(L) = L$, в частности, свидетельствуют о том, что l-алгебры Ли в примерах 3.3.1 и 3.3.2 не являются ни первичными алгебрами Ли, ни l-первичными l-алгебрами Ли.

Пример 3.3.3. Рассмотрим алгебру Ли

$$L = \sum_{i=1}^{\infty} L_i,$$

являющуюся кардинальной суммой l-алгебр Ли L_i, где $L_i \cong B$ — линейно упорядоченная алгебра Ли над линейно упорядоченным полем $\mathbb{R}$ из примера 2.1.2. В алгебре B для базисных элементов e_1, e_2, e_3 выполнено

$$e_1 > e_2 > e_3, \quad [e_1, e_2] = e_3. \tag{5}$$

Кроме того, будем считать, что каждый элемент из базиса в L_{i-1} больше любого элемента из базиса L_i ($i = 2, 3, \ldots$). Тогда на L будет задано отношение линейного порядка, для которого выполняются условия 1) и 2) из определения 2.1.4. Так как операции на L заданы покоординатно, то выполнено условие $3'$) из определения 2.1.4. Таким образом, алгебра L линейно упорядоченная по Копытову.

Пусть $f \neq 0$ и $g \neq 0$ — произвольные элементы из L. Тогда для l-идеалов I_f и I_g по теореме 2.4.4 получаем, что $I_f \subseteq I_g$ или $I_g \subseteq I_f$. Пусть для определённости $I_f \subseteq I_g$. Поскольку алгебра L бесконечномерна, то в идеале I_f найдутся три базисных вектора, удовлетворяющих условию (5). Следовательно, третий из найденных векторов содержится в $[I_f, I_g]$, и поэтому $[I_f, I_g] \neq 0$. Отсюда по следствию 3.2.1 следует, что нулевой l-идеал в L является l-первичным, и поэтому $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$.

3.4. l-полупервичные l-алгебры

Определение 3.4.1. l-алгебра L над частично упорядоченным полем F называется l-полупервичной, если для любого l-идеала $I \neq \{0\}$ из L верно соотношение $I^2 \neq \{0\}$.

Определение 3.4.2. l-идеал J l-алгебры L над частично упорядоченным полем F называется l-полупервичным, если фактор-алгебра L/J является l-полупервичной.

Рассмотрим свойства, которыми обладают l-полупервичные идеалы решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр.

Предложение 3.4.1. *Каждый l-первичный l-идеал l-алгебры над частично упорядоченным полем является l-полупервичным идеалом.*

Доказательство. Если P — l-первичный идеал l-алгебры L, то по определению 3.2.1 фактор-алгебра L/P l-первична, поэтому ввиду определения 3.2.3 $UV \neq \{P\}$ для любых ненулевых l-идеалов U и V в L/P. Отсюда, в частности, следует, что $U^2 \neq \{P\}$ для любого $U \neq \{P\}$ в L/P. Следовательно, L/P является по определению 3.4.1 l-полупервичной алгеброй. □

Лемма 3.4.1. *Если $\{J_\alpha \mid \alpha \in \Gamma\}$ является множеством всех l-полупервичных l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем F, то $T = \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} J_\alpha$ также является l-полупервичным l-идеалом в L.*

Доказательство. Покажем, что L/T — l-полупервичная алгебра. Рассмотрим произвольный l-идеал $\bar{J} \neq T$ в l-алгебре L/T. По теореме 2.3.5 ему соответствует l-идеал $J = \{x \in L \mid x + T \in \bar{J}\}$ l-алгебры L, при этом $J \supseteq T$. Если $J = T$, то, используя теорему 2.3.7, получаем $\bar{J} = T$, что противоречит выбору l-идеала $\bar{J}$. Таким образом, $J \supset T$.

Если $J \subseteq J_\alpha$ для любого $\alpha \in \Gamma$, то $J \subseteq \bigcap\limits_{\alpha\in\Gamma} J_\alpha = T$, что противоречит доказанному выше. Следовательно, $J \nsubseteq J_\alpha$ для некоторого J_α, откуда получаем, что $J + J_\alpha \supset J_\alpha$. Считая, что $J + J_\alpha = \{a + J_\alpha \in L/J_\alpha \mid a \in J\}$ — множество смежных классов в l-полупервичной алгебре L/J_α, и учитывая, что J является l-идеалом в L, по теореме 2.3.7 получаем, что $J + J_\alpha$ — l-идеал в L/J_α, соответствующий l-идеалу J. Итак, $J + J_\alpha \neq J_\alpha$ — ненулевой l-идеал в l-полупервичной алгебре L/J_α, следовательно, по определению 3.4.1 имеем, что $(J + J_\alpha)^2 \nsubseteq J_\alpha$. Поэтому существует элемент $x \in L$, такой что $x \in (J + J_\alpha)^2 \subseteq J^2 + J_\alpha$ и $x \notin J_\alpha$. Значит, найдутся элементы $a, b \in J$, удовлетворяющие условию $ab \notin J_\alpha$. Отсюда следует, что $J^2 \nsubseteq J_\alpha$, и поэтому $J^2 \nsubseteq T$.

Допустим, что $(\bar{J})^2 = T$. Тогда $J^2 \subseteq T$, что противоречит доказанному выше. Таким образом, L/T является по определению 3.4.1 l-полупервичной алгеброй, а l-идеал T — l-полупервичным l-идеалом. □

Покажем, что необходимым и достаточным условием l-полупервичности l-алгебры является равенство нулю её l-первичного радикала. Для доказательства этого факта нам понадобятся несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 3.4.2. *Решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра L над частично упорядоченным полем F является l-полупервичной тогда и только тогда, когда для всех $a \in L$ из равенства $(I_a)^2 = 0$ следует, что $a = 0$.*

Доказательство. Пусть l-алгебра L l-полупервична. Предположим, что для некоторого $a \in L$ справедливо равенство $(I_a)^2 = 0$. Из него по определению 3.4.1 l-полупервичной l-алгебры следует равенство $I_a = 0$. Значит, $a = 0$.

Пусть теперь для всех $a \in L$ из $(I_a)^2 = 0$ следует $a = 0$. Рассмотрим произвольный l-идеал I, удовлетворяющий условию $I^2 = 0$, и произвольный элемент

$b \in I$. Тогда $I_b \subseteq I$, и поэтому $(I_b)^2 \subseteq I^2 = 0$. Следовательно, $b = 0$. Так как элемент b l-идеала I был произвольным, то $I = 0$. Таким образом, L является по определению 3.4.1 l-полупервичной. □

Лемма 3.4.3. *Если J — l-полупервичный идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем F, то для каждого элемента $b \notin J$ существует l-первичный идеал P, такой что $P \supseteq J$ и $b \notin P$.*

Доказательство. Рассмотрим элемент $b_1 = b$. Допустим, что $(I_{b_1})^2 \subseteq J$. По теореме 2.3.7 найдётся l-идеал $\bar{I}_{b_1}$ в L/J, соответствующий l-идеалу I_{b_1}. Так как $(I_{b_1})^2 \subseteq J$, то $(\bar{I}_{b_1})^2 \subseteq J$. Отсюда ввиду l-полупервичности фактор-алгебры L/J по определению 3.4.1 имеем $\bar{I}_{b_1} = J$. Следовательно, $I_{b_1} = J$, и поэтому $b_1 \in J$, что противоречит условию $b \notin J$. Значит, $(I_{b_1})^2 \nsubseteq J$.

Пусть $b_2 \in (I_{b_1})^2 \setminus J$. Так как $b_2 \notin J$, то рассуждениями, аналогичными изложенным выше, приходим к тому, что $(I_{b_2})^2 \nsubseteq J$. Выберем элемент $b_3 \in (I_{b_2})^2 \setminus J$ и т. д. Построим последовательность $\{b_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, начинающуюся с элемента $b_1 = b$, ни один элемент $b_i \in (I_{b_{i+1}})^2$ которой не принадлежит l-идеалу J, т. е. $b_i \notin J$.

Рассмотрим максимальный l-идеал P, такой что $P \supseteq J$ и P не содержит ни один элемент построенной последовательности. Он существует согласно лемме Цорна. Покажем, что l-идеал P является l-первичным в L. Для этого нужно доказать, что фактор-алгебра L/P l-первична, поэтому рассмотрим такие l-идеалы $\bar{U}$, $\bar{V}$ в L/P, что $\bar{U} \neq P$, $\bar{V} \neq P$. Им по теореме 2.3.5 соответствуют l-идеалы U, V в L. Если $U = \{a \in L \mid a + P \in \bar{U}\} \subseteq P$, то $\bar{U} \subseteq P$, что противоречит выбору l-идеала $\bar{U} \neq P$. Таким образом, $U \nsubseteq P$ и аналогично $V \nsubseteq P$. Следовательно, $U + P \supset P$ и $V + P \supset P$. Отсюда ввиду максимальности l-идеала P относительно свойства $P \cap \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = \varnothing$ следует, что существуют такие элементы b_k и b_t рассматриваемой последовательности, что $b_k \in U + P$ и $b_t \in V + P$. Пусть для определённости $k \leqslant t$. Так как $b_k \in U + P$, то $b_{k+1} \in (I_{b_k})^2 \subseteq (U + P)^2 \subseteq U + P$, поэтому $b_{k+1} \in U + P$. Аналогично получаем, что $b_t \in U + P$. Следовательно, $b_{t+1} \in (I_{b_t})^2 \subseteq (U + P)(V + P) \subseteq UV + P$. Так как $b_{t+1} \notin P$, то $UV \nsubseteq P$. Применяя далее теорему 2.3.7, имеем $\bar{U}\bar{V} \nsubseteq P$. По определению 3.2.3 фактор-алгебра L/P является l-первичной l-алгеброй, что влечёт l-первичность l-идеала P. □

Лемма 3.4.4. *Если J — l-полупервичный l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем F и l-идеал A из L строго содержит J, то в L существует такой l-первичный l-идеал P, что $P \supseteq J$ и $P \nsupseteq A$.*

Доказательство. Так как $A \supset J$, то $A \setminus J \neq \varnothing$, поэтому найдётся элемент $b \in A$, такой что $b \notin J$. По лемме 3.4.3 в L существует такой l-первичный l-идеал P, что $P \supseteq J$ и $b \notin P$. Так как $b \notin P$ и $b \in A$, то $P \nsupseteq A$. □

Необходимое и достаточное условие l-полупервичности решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры сформулировано в следующей теореме.

Теорема 3.4.1. *l-алгебра L над частично упорядоченным полем F является l-полупервичной тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = \{0\}$ и $a \in L$, $a \neq 0$, — произвольный элемент l-алгебры L. Поскольку $a \neq 0$, то $a \notin l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ и по теореме 3.3.3 существует последовательность $\{a_i \in L \mid i \in \mathbb{N}\}$, в которой $a_1 = a$ и $a_{i+1} \in (I_{a_i})^2$, при этом $a_i \neq 0$ для любого $i \in \mathbb{N}$. Так как $a_2 \in (I_a)^2$ и $a_2 \neq 0$, то $(I_a)^2 \neq 0$. Следовательно, для любого $a \in L$, $a \neq 0$, выполнено соотношение $(I_a)^2 \neq 0$. По лемме 3.4.2 l-алгебра L l-полупервична.

Обратно, пусть L — l-полупервичная l-алгебра. Рассмотрим нулевой l-идеал $\{0\}$ в L. Учитывая l-изоморфизм между l-алгебрами L и $L/\{0\}$, существование которого следует из теоремы 2.3.4, а также l-полупервичность l-алгебры L, получаем, что $L/\{0\}$ является l-полупервичной l-алгеброй.

Возьмём произвольный элемент $b \in L$, $b \neq 0$. По лемме 3.4.3 для l-полупервичной алгебры $L/\{0\}$ и элемента $b \neq 0$ найдётся такой l-первичный l-идеал P, что $b \notin P$. Отсюда по определению l-первичного радикала заключаем, что $b \notin l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Так как никакой ненулевой элемент l-алгебры L не содержится в $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$, то $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = \{0\}$. □

Теорема 3.4.2. *Если первичный радикал l-алгебры Ли L над частично упорядоченным полем равен нулю, то равен нулю и её l-первичный радикал.*

Доказательство. Если первичный радикал алгебры Ли L равен нулю, то по [31, теорема 2.3.2] L является полупервичной алгеброй Ли, т. е. не содержит ненулевых абелевых идеалов. Полупервичная l-алгебра Ли L является l-полупервичной, так как если в L нет ненулевых абелевых идеалов, то в L нет и ненулевых абелевых l-идеалов. По теореме 3.4.1 l-алгебра Ли L имеет нулевой l-первичный радикал. □

Таким образом, для полупервичной l-алгебры Ли L выполнено равенство $\mathrm{rad}(L) = l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = \{0\}$, и следовательно, $a \in l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ тогда и только тогда, когда $|a| \in \mathrm{rad}(L)$.

3.5. Свойства l-первичных радикалов l-алгебр

Данный раздел содержит описание свойств l-первичного радикала произвольной решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L. В частности, описаны свойства l-первичного радикала фактор-алгебры L/R l-алгебры L по её l-первичному радикалу $R = l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Для доказательства утверждений данного раздела необходимо следующее утверждение.

Предложение 3.5.1. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F, I и J — l-первичные l-идеалы в L и $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = R$ — l-первичный радикал l-алгебры L. Тогда для канонического гомоморфизма ε из L на L/R выполняется соотношение $\varepsilon(I \cap J) = \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$.*

Доказательство. Ясно, что $\varepsilon(I \cap J) \subseteq \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$. Докажем обратное включение. Если $x \in \varepsilon(I) \cap \varepsilon(J)$, то существуют элементы $a \in I$ и $b \in J$, такие что $x = \varepsilon(a)$ и $x = \varepsilon(b)$, где $\varepsilon(a) = a + R$ и $\varepsilon(b) = b + R$. Отсюда следует, что

$a - b \in R$, и значит, $a - b \in I$ и $a - b \in J$ по определению 3.3.1 l-первичного радикала. Поэтому $a, b \in (I \cap J)$ и $x \in \varepsilon(I \cap J)$, а это влечёт включение $\varepsilon(I) \cap \varepsilon(J) \subseteq \varepsilon(I \cap J)$. □

Замечание 3.5.1. Утверждение и доказательство предложения 3.5.1 может быть перенесено на любое количество l-первичных l-идеалов решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры.

Предложение 3.5.2. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F и $R = l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал. Тогда существует взаимно-однозначное соответствие между l-первичными l-идеалами из L и l-первичными l-идеалами фактор-алгебры L/R.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon\colon L \to L/R$ — канонический l-эпиморфизм l-алгебры L на фактор-алгебру $L_1 = L/R$. Рассмотрим произвольный l-первичный идеал P_1 l-алгебры L_1. По теореме 2.3.5 полный прообраз P l-идеала P_1 при l-гомоморфизме ε является l-идеалом в L. Покажем, что P — l-первичный идеал l-алгебры L. Рассмотрим l-идеалы U и V в L/P, для которых верны соотношения $U \neq P$ и $V \neq P$, т. е. $U \supset P$ и $V \supset P$. Применяя к l-алгебрам L и L_1 теорему 2.3.6, получим, что для l-идеала P_1 из L_1 и его полного прообраза P существует l-изоморфизм φ между L/P и L_1/P_1. Значит, по предложению 2.3.5 l-идеалам U и V из L/P соответствуют l-идеалы U_1 и V_1 в L_1/P_1. Если $U_1 = P_1$, то из $U_1 = \varphi(U) = P_1$ следует равенство $U = P$, что противоречит выбору l-идеала U. Поэтому $U_1 \neq P_1$ и аналогично $V_1 \neq P_1$. Отсюда ввиду l-первичности идеала P_1 по условию б) теоремы 3.2.1 следует, что $U_1V_1 \neq P_1$. Предположив, что $UV = P$, получим, что $U_1V_1 = \varphi(UV) = \varphi(P) = P_1$, противоречие. Следовательно, $UV \neq P$. Отсюда по условию б) теоремы 3.2.1 получаем, что P — l-первичный l-идеал в L.

Аналогично с использованием предложения 2.3.4 и теорем 2.3.7, 2.3.6 и 3.2.1 можно показать, что образ P_1' любого l-первичного l-идеала P' l-алгебры L при каноническом l-гомоморфизме ε является l-первичным l-идеалом в L/R. □

Следующая теорема даёт описание l-первичного радикала фактор-алгебры решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры по её l-первичному радикалу.

Теорема 3.5.1. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F и $R = l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал, то $l\text{-rad}_K(L/R) = \{0\}$.*

Доказательство. Рассмотрим

$$R_1 = l\text{-rad}_K(L_1) = \bigcap_{P_1 \in \mathcal{P}_1} P_1,$$

где $L_1 = L/R$ и $\mathcal{P}_1$ — множество всех l-первичных идеалов из L_1. По предложению 3.5.2 каждый l-первичный идеал P_1 соответствует некоторому l-первичному l-идеалу P из L, где $\varepsilon(P) = P_1$. Следовательно,

$$R_1 = \bigcap_{P_1 = \varepsilon(P)} P_1.$$

Так как по предложению 3.5.2 множества l-первичных идеалов в l-алгебрах L и L/R связаны взаимно-однозначным соответствием, то

$$R_1 = \bigcap_{P \in \mathcal{P}} \varepsilon(P)$$

(здесь $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов из L). Отсюда, используя предложение 3.5.1, получаем, что

$$R_1 = \varepsilon\biggl(\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P\biggr) = \varepsilon(R) = 0$$

в L/R. Следовательно, $l\text{-rad}_K(L/R) = \{0\}$. □

Следствие 3.5.1. *Если L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F и $R = l\text{-rad}_K(L)$ — её l-первичный радикал, то l-алгебра L/R является l-полупервичной алгеброй.*

Доказательство. По теореме 3.5.1 имеем $l\text{-rad}_K(L/R) = \{0\}$, откуда по теореме 3.4.1 следует l-полупервичность l-алгебры L/R. □

Теорема 3.5.2. *Если $\varphi\colon A \to B$ — l-гомоморфизм l-алгебр A и B над частично упорядоченным полем F, то*

$$\varphi\bigl(l\text{-rad}_K(A)\bigr) \subseteq l\text{-rad}_K\bigl(\varphi(A)\bigr).$$

Доказательство. Покажем, что существует взаимно-однозначное соответствие между l-первичными l-идеалами из A и l-первичными l-идеалами из $\varphi(A)$. Если P — l-первичный l-идеал в алгебре A, то множество

$$\bar{P} = \{x + \operatorname{Ker}\varphi \mid x \in P\}$$

является по теореме 2.3.7 l-идеалом фактор-алгебры $A/\operatorname{Ker}\varphi$. Поскольку по теореме 2.3.9 алгебры $A/\operatorname{Ker}\varphi$ и $\varphi(A)$ l-изоморфны, то согласно предложению 2.3.5 l-идеалу $\bar{P}$ из $A/\operatorname{Ker}\varphi$ соответствует l-идеал

$$P_1 = \{\varphi(x) \mid x + \operatorname{Ker}\varphi \in \bar{P}\} = \{\varphi(x) \mid x \in P\}$$

в $\varphi(A)$.

Аналогично если P_1 — произвольный l-первичный l-идеал из $\varphi(A)$, то по предложению 2.3.4, применённому к l-эпиморфизму $\varphi\colon A \to \varphi(A)$, получаем, что множество $P = \{x \in A \mid \varphi(x) \in P_1\}$ является l-идеалом в A.

В каждом из рассмотренных случаев по теореме 2.3.6 имеем l-изоморфизм между фактор-алгебрами A/P и $\varphi(A)/P_1$, благодаря которому получаем, что l-идеал P является l-первичным в A тогда и только тогда, когда в $\varphi(A)$ является l-первичным l-идеал P_1.

Для

$$\varphi\bigl(l\text{-rad}_K(A)\bigr) = \varphi\biggl(\bigcap_{P \in \mathcal{P}} P\biggr)$$

(здесь $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов из A) имеем

$$\varphi\Big(\bigcap_{P\in\mathcal{P}} P\Big) \subseteq \bigcap_{P\in\mathcal{P}} \varphi(P).$$

Так как по доказанному выше $\varphi(P)$ — l-первичный идеал в $\varphi(A)$ и каждый l-первичный идеал в $\varphi(A)$ является образом некоторого l-первичного идеала из A, то

$$\bigcap_{P\in\mathcal{P}} \varphi(P) = l\text{-}\mathrm{rad}_K\big(\varphi(A)\big).$$

Таким образом,

$$\varphi\big(l\text{-}\mathrm{rad}_K(A)\big) \subseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K\big(\varphi(A)\big). \qquad \square$$

Предложение 3.5.3. *l-первичный радикал $R = l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F является наибольшим l-идеалом в L, удовлетворяющим условию $l\text{-}\mathrm{rad}_K(R) = R$.*

Доказательство. Ясно, что $l\text{-}\mathrm{rad}_K(R) = R$. Пусть I — l-идеал в L, для которого $l\text{-}\mathrm{rad}_K(I) = I$. Тогда I является l-первичным идеалом в L. С другой стороны,

$$l\text{-}\mathrm{rad}_K(I) = \bigcap_{P\in\mathcal{P}} P,$$

где $\mathcal{P}$ — множество всех l-первичных идеалов в I. Следовательно, в I нет l-первичных идеалов, отличных от I. Отсюда получаем, что $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = I \cap \mathcal{P}_1$, где $\mathcal{P}_1$ — множество l-первичных идеалов J в L, таких что $J \nsubseteq I$. Поэтому $I \subseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. $\square$

Из теорем 3.5.1, 3.5.2 и предложения 3.5.3 следует, что l-первичный радикал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем F является радикалом в смысле Куроша—Амицура (см., например, [2, гл. 2, § 1]).

3.6. l-радикал l-алгебры

При изучении первичного радикала ассоциативных алгебр важную роль играет нижний ниль-радикал (см. [2]). При рассмотрении возможности обобщения понятия нижнего ниль-радикала на случай решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченных алгебр возникла необходимость введения понятия и изучения свойств l-радикала l-алгебры аналогично тому, как это делается для l-колец.

Определение 3.6.1. l-идеал J решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L над частично упорядоченным полем называется l-разрешимым l-идеалом, если в L существует цепочка l-идеалов

$$J \supset J_1 \supset J_2 \supset \ldots \supset J_k = \{0\},$$

в которой фактор-алгебры J_i/J_{i+1} — алгебры с нулевым умножением.

Пример 3.6.1. Рассмотрим решёточно упорядоченную алгебру Ли L над линейно упорядоченным полем F, введённую в примере 2.1.4. Для данной алгебры имеем $L^0 = L$, $L^1 = [L, L]$, $L^2 = \big[L, [L, L]\big] = \{0\}$. Следовательно, l-алгебра Ли L является нильпотентной и, значит, разрешимой. Используя рассуждения примера 2.1.4 и предложение 2.2.4, можно показать, что $[L, L]$ — l-идеал в L. По определению 3.6.1 l-алгебра Ли L l-разрешима.

Пример 3.6.2. Пусть B — линейно упорядоченная алгебра Ли из примера 2.1.2. Нетрудно показать, что $B^2 = [B, B^1] = \big[B, [B, B]\big] = \{0\}$, т. е. B является нильпотентной и поэтому разрешимой алгеброй Ли. Используя линейность порядка на B и предложение 2.2.4, можно показать, что l-алгебра Ли B l-разрешима.

Так же как при построении нижнего ниль-радикала в ассоциативных алгебрах, обозначим через $\mathfrak{N}(L)$ сумму всех l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L и будем называть $\mathfrak{N}(L)$ *l-радикалом* l-алгебры L над частично упорядоченным полем по аналогии с тем, как это делается в l-кольцах (см. [25]). Таким образом, $\mathfrak{N}(L)$ — идеал, порождённый множеством $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ всех l-разрешимых l-идеалов из L, который по теореме 2.2.3 и определению 2.2.3 является l-идеалом в L и состоит из всевозможных конечных сумм вида $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$, где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$ и $\alpha_k \in I$.

Рассмотрим свойства l-разрешимых l-идеалов l-алгебр над частично упорядоченными полями, в частности связь l-полупервичности l-алгебры с наличием в этой l-алгебре l-разрешимых l-идеалов.

Лемма 3.6.1. *Каждый ненулевой l-разрешимый l-идеал I l-алгебры L над частично упорядоченным полем F содержит ненулевой l-идеал, умножение в котором нулевое.*

Доказательство. По определению 3.6.1 для I найдётся ряд l-идеалов

$$I \supseteq I_1 \supseteq \ldots \supseteq I_{k-1} \supseteq I_k = \{0\}$$

l-алгебры L, в котором каждая фактор-алгебра I_j / I_{j+1} — алгебра с нулевым умножением. В частности, в фактор-алгебре $I_{k-1}/\{0\}$ умножение нулевое. Следовательно, ненулевой l-идеал I_{k-1} искомый, так как $I_{k-1} \subseteq I$. □

Благодаря доказанной лемме можно сформулировать определение l-полупервичной l-алгебры, эквивалентное данному ранее определению 3.4.1.

Определение 3.6.2. Решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченная алгебра L над частично упорядоченным полем F называется l-полупервичной, если она не содержит ненулевых l-разрешимых l-идеалов.

Используя полученное в разделе 3.3 поэлементное описание l-первичного радикала l-алгебры, можно доказать следующее свойство l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L.

Предложение 3.6.1. *Каждый l-разрешимый l-идеал l-алгебры L над частично упорядоченным полем содержится в l-первичном радикале $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ l-алгебры L.*

Доказательство. Пусть A — l-разрешимый l-идеал решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебры L. Тогда по определению 3.6.1 в L существует цепочка идеалов

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \ldots \supset A_{k-1} \supset A_k = \{0\},$$

в которой A_{i+1} является l-идеалом для A_i, а A_i/A_{i+1} — алгебры с нулевым умножением. Тогда для фактор-алгебры A_i/A_{i+1} получаем, что $(A_i)^2 \subseteq A_{i+1}$.

Рассмотрим произвольный элемент $x \in A$ и покажем, что $x \in l\text{-rad}_K(L)$. Для этого возьмём произвольную последовательность $\{x_n \in L \mid n \in \mathbb{N}\}$, в которой $x_1 = x$ и $x_{i+1} \in (I_{x_i})^2$. Так как $x_1 \in A$ и A является l-идеалом в L, то $I_{x_1} \subseteq A$. По доказанному выше заключаем, что $(I_{x_1})^2 \subseteq A^2 \subseteq A_1$. Следовательно, для $x_2 \in (I_{x_1})^2$ имеем $x_2 \in A_1$. Поскольку для l-идеала A_1 справедливо включение $I_{x_2} \subseteq A_1$, а по доказанному выше $A_1^2 \subseteq A_2$, то $x_3 \in (I_{x_2})^2 \subseteq A_2$. Продолжая подобным образом, получим, что $x_k \in A_{k-1}$ и $x_{k+1} \in A_k = \{0\}$. Таким образом, рассматриваемая последовательность содержит нуль, что по теореме 3.3.3 влечёт, что $x \in l\text{-rad}_K(L)$. Следовательно, $A \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. □

Из доказанного предложения вытекает следующее утверждение, описывающее взаимосвязь l-радикала и l-первичного радикала l-алгебры.

Следствие 3.6.1. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем выполняется включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$.*

Доказательство. Пусть $\{J_\alpha \mid \alpha \in I\}$ — множество всех l-разрешимых идеалов l-алгебры L. По предложению 3.6.1 получаем, что $J_\alpha \subseteq l\text{-rad}_K(L)$ для каждого $\alpha \in I$. Поэтому любая конечная сумма вида $x_{\alpha_1} + x_{\alpha_2} + \ldots + x_{\alpha_k}$, где $x_{\alpha_k} \in J_{\alpha_k}$, принадлежит l-первичному радикалу $l\text{-rad}_K(L)$. Отсюда по определению l-радикала l-алгебры L следует, что $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. □

С использованием теоремы 2.3.6 об изоморфизмах доказывается следующее свойство l-радикала l-алгебр.

Предложение 3.6.2. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем F и $\mathfrak{N}(L)$ — её l-радикал. l-идеал P l-алгебры L является l-первичным в L тогда и только тогда, когда l-идеал $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ является l-первичным идеалом в $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$.*

Доказательство. Если P является произвольным l-первичным идеалом l-алгебры L, то по следствию 3.6.1 имеем включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L) \subseteq P$, из которого следует, что $\mathfrak{N}(L)$ является l-идеалом в P. Поэтому можно рассмотреть фактор-алгебру $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L) = \{a + \mathfrak{N}(L) \mid a \in P\}$, которая является по теореме 2.3.7 l-идеалом в $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$, при этом $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ является по следствию 2.3.2 l-алгеброй над частично упорядоченным полем F.

Докажем, что фактор-алгебры L/P и $\bar{L}/\bar{P} = \big(L/\mathfrak{N}(L)\big)/\big(P/\mathfrak{N}(L)\big)$ изоморфны. Для этого рассмотрим l-алгебры L и $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ над частично упорядоченным полем F и их l-идеалы P и $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ соответственно. Из теоремы 2.3.4 известно, что существует естественный l-эпиморфизм ε l-алгебры L на фактор-алгебру $\bar{L}$, при котором согласно теоремам 2.3.5 и 2.3.7 l-идеал P

из L является полным прообразом l-идеала $\bar{P} = P/\mathfrak{N}(L)$ из $\bar{L}$. Исходя из всего вышесказанного, по теореме 2.3.6 можно сделать вывод об l-изоморфности фактор-алгебр L/P и $\bar{L}/\bar{P} = \big(L/\mathfrak{N}(L)\big)/\big(P/\mathfrak{N}(L)\big)$.

Так как фактор-алгебры L/P и $\bar{L}/\bar{P}$ l-изоморфны, то из l-первичности одной из них следует l-первичность другой. Отсюда, применяя определение l-первичного идеала, получим, что l-идеал P является l-первичным в L тогда и только тогда, когда l-идеал $\bar{P}$ является l-первичным идеалом в $\bar{L}$. □

Докажем необходимое и достаточное условие совпадения l-радикала и l-первичного радикала l-алгебры над частично упорядоченным полем, сформулированное в теореме 3.6.1.

Теорема 3.6.1. *l-радикал $\mathfrak{N}(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем равен l-первичному радикалу $l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$ l-алгебры L тогда и только тогда, когда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$, т. е. $\bar{L} = L/\mathfrak{N}(L)$ не содержит ненулевых l-разрешимых l-идеалов. Следовательно, $\mathfrak{N}(L)$ является по определениям 3.4.2 и 3.6.2 l-полупервичным l-идеалом в L. Согласно следствию 3.6.1 $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Допустим, что $\mathfrak{N}(L) \subsetneqq l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Тогда из леммы 3.4.4 следует существование в L l-первичного l-идеала P, такого что $P \supseteq \mathfrak{N}(L)$ и $P \not\supseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. При этом по определению l-первичного радикала l-алгебры L имеем, что $P \supseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$. Полученное противоречие показывает, что $\mathfrak{N}(L) = l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}(L) = l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)$, где

$$l\text{-}\mathrm{rad}_K(L) = \bigcap_{\beta} P_\beta \,—$$

пересечение всех l-первичных l-идеалов P_β l-алгебры L. Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\overline{\bigcap_{\beta} P_\beta} = \Big(\bigcap_{\beta} P_\beta\Big)/\mathfrak{N}(L) = \bigcap_{\beta} \big(P_\beta/\mathfrak{N}(L)\big) = \bigcap_{\beta} \bar{P}_\beta.$$

Отсюда, учитывая предложение 3.6.2, получаем, что $\bar{P}_\beta$ пробегает множество всех l-первичных идеалов в l-алгебре $\bar{L}$. Следовательно, $\overline{l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)} = l\text{-}\mathrm{rad}_K(\bar{L})$. По следствию 3.6.1 верно включение $\mathfrak{N}(\bar{L}) \subseteq l\text{-}\mathrm{rad}_K(\bar{L})$.

Если $\mathfrak{N}(\bar{L}) \neq \{\bar{0}\}$, то $l\text{-}\mathrm{rad}_K(\bar{L}) \supseteq \mathfrak{N}(\bar{L}) \neq \{\bar{0}\}$, поэтому $l\text{-}\mathrm{rad}_K(\bar{L}) \supset \{\bar{0}\}$. По доказанному выше это означает, что $\overline{l\text{-}\mathrm{rad}_K(L)} \supset \{\bar{0}\}$, т. е.

$$\Big(\bigcap_{\beta} P_\beta\Big)/\mathfrak{N}(L) \supset \{\bar{0}\},$$

при этом по следствию 3.6.1 имеет место включение

$$\mathfrak{N}(L) \subseteq \bigcap_{\beta} P_\beta.$$

Отсюда в свою очередь следует, что

$$\bigcap_{\beta} P_\beta \supset \mathfrak{N}(L).$$

Полученное соотношение противоречит данному по условию теоремы равенству $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}_K(L)$. Значит, $\mathfrak{N}(\bar{L}) = \{\bar{0}\}$, т. е. $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \{0\}$. □

Следствие 3.6.2. *l-радикал $\mathfrak{N}(L)$ l-алгебры L над частично упорядоченным полем F равен нулю тогда и только тогда, когда $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$.*

Доказательство. Пусть $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$. Отсюда, используя включение $\mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$, которое имеет место по следствию 3.6.1, получаем, что $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$.

Обратно, пусть $\mathfrak{N}(L) = \{0\}$. Тогда l-алгебры $L/\mathfrak{N}(L)$ и L изоморфны. Следовательно, $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}(L)\big) = \mathfrak{N}(L) = \{0\}$. Отсюда по теореме 3.6.1 получаем равенство $\mathfrak{N}(L) = l\text{-rad}_K(L)$, из которого вытекает, что $l\text{-rad}_K(L) = \{0\}$. □

3.7. Свойства нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебр

Данный раздел содержит описание свойств нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры над частично упорядоченными и направленными полями. В частности, указаны условия его совпадения с l-первичным радикалом l-алгебры.

С помощью трансфинитной индукции построим цепь l-идеалов l-алгебры L над частично упорядоченным полем

$$\mathfrak{N}_0(L) \subseteq \mathfrak{N}_1(L) \subseteq \ldots \subseteq \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) \subseteq \ldots, \tag{6}$$

определяя для каждого порядкового числа α идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ следующим образом.

1. $\mathfrak{N}_0 = \{0\}$.
2. Предположим, что идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ построен для всех $\alpha < \mu$ и определим $\mathfrak{N}_\mu(L)$ следующим образом:
   а) если μ — предельное порядковое число, то $\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup\limits_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L)$;
   б) если $\alpha+1$ не является предельным порядковым числом, то $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$ — это такой l-идеал l-алгебры L, содержащий l-идеал $\mathfrak{N}_\alpha(L)$, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)/\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\alpha(L)\big)$.

   В частности, $\mathfrak{N}_1(L)/\{0\} = \mathfrak{N}(L/\{0\})$, поэтому $\mathfrak{N}_1(L) = \mathfrak{N}(L)$ — сумма всех l-разрешимых l-идеалов l-алгебры L.

Покажем, что построенная цепь l-идеалов стабилизируется.

Предложение 3.7.1. *Для любой l-алгебры L над частично упорядоченным полем существует такое порядковое число $\tau = \tau(L)$, что цепь* (6) *стабилизируется на шаге τ.*

Доказательство. Покажем сначала, что если цепь (6) приостановится на некотором шаге, то она стабилизируется на этом шаге, т. е. для любого порядкового числа α верна импликация

$$\text{если } \mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L), \text{ то } \mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L) \text{ для всех } \beta \geqslant \alpha. \tag{7}$$

Действительно, пусть $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$. Тогда для $\beta = \alpha$ и $\beta = \alpha + 1$ равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ верно.

Допустим, что это равенство уже доказано для всех $\alpha \leqslant \beta < \gamma$. Если γ предельное, то из индуктивного предположения вытекает согласно правилу задания идеалов цепи (6), что

$$\mathfrak{N}_\gamma(L) = \bigcup_{\beta<\gamma} \mathfrak{N}_\beta(L) = \bigcup_{\alpha\leqslant\beta<\gamma} \mathfrak{N}_\beta(L) = \mathfrak{N}_\alpha(L).$$

т. е. равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ осталось верным и при $\beta = \gamma$. Если γ не предельное, то $\gamma = \delta + 1$ для некоторого порядкового числа δ и $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\delta(L)$ по индуктивному предположению. Но тогда из правила задания идеалов цепи (6) легко вытекает, что $\mathfrak{N}_{\alpha+1}(L) = \mathfrak{N}_{\delta+1}(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Так как $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_{\alpha+1}(L)$, то $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$.

По индукции равенство $\mathfrak{N}_\alpha(L) = \mathfrak{N}_\beta(L)$ справедливо для всех $\beta \geqslant \alpha$, что и доказывает импликацию (7).

Учитывая (7), возьмём любое порядковое число τ, такое что мощность отрезка $\{\alpha \mid 0 \leqslant \alpha \leqslant \tau\}$ строго больше мощности множества L. Покажем, что для этого τ цепь (6) стабилизируется на шаге τ.

Допустим противное. Тогда в силу (7) получаем, что $\mathfrak{N}_\tau(L) \neq \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$. Ещё раз применяя (7), получаем, что $\mathfrak{N}_\beta(L) \subset \mathfrak{N}_{\beta+1}(L)$ для любого $\beta \geqslant \tau$. Учитывая это, выбираем для любого $\beta \leqslant \tau$ элемент $r_\beta \in \mathfrak{N}_{\beta+1}(L) \setminus \mathfrak{N}_\beta(L)$. Ясно, что все элементы r_β различны и потому множество $\{r_\beta \mid 0 \leqslant \beta \leqslant \tau\}$ выбранных элементов имеет такую же мощность, как и отрезок $\{\beta \mid 0 \leqslant \beta \leqslant \tau\}$. Но по построению указанный отрезок имеет мощность, строго большую мощности множества L. Таким образом, множество L имеет подмножество с мощностью, строго большей мощности всего множества L. Полученное противоречие доказывает предложение. $\square$

Определение 3.7.1. Нижним слабо разрешимым l-радикалом l-алгебры L над частично упорядоченным полем называется l-идеал

$$\mathfrak{B}(L) = \bigcup_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L),$$

построенный по l-идеалам $\mathfrak{N}_\alpha(L)$ из цепи (6).

Опишем взаимосвязь l-радикала и нижнего слабо разрешимого l-радикала l-алгебры L.

Предложение 3.7.2. *Пусть L — l-алгебра над частично упорядоченным полем и $\mathfrak{B}(L)$ — её нижний слабо разрешимый l-радикал. Тогда $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{B}(L)\big) = 0$ и фактор-алгебра $L/\mathfrak{B}(L)$ является l-полупервичной.*

Доказательство. По предложению 3.7.1 существует такое порядковое число τ, для которого $\mathfrak{B}(L) = \mathfrak{N}_\tau(L)$. Отсюда по правилу построения цепи идеалов (6) получаем, что $\mathfrak{N}_\tau(L) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)$, и поэтому

$$\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\tau(L)\big) = \mathfrak{N}_{\tau+1}(L)/\mathfrak{N}_\tau(L) = \mathfrak{N}_\tau(L)/\mathfrak{N}_\tau(L) = 0,$$

т. е. фактор-алгебра $L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ не имеет ненулевых l-разрешимых l-идеалов. Следовательно, фактор-алгебра $L/\mathfrak{B}(L) = L/\mathfrak{N}_\tau(L)$ является по определению 3.6.2 l-полупервичной l-алгеброй. □

В теореме 3.7.1 сформулированы условия совпадения в произвольной l-алгебре L над направленным полем l-первичного радикала $l\text{-rad}_K(L)$ и нижнего слабо разрешимого l-радикала $\mathfrak{B}(L)$.

Теорема 3.7.1. *В любой решёточно $\mathcal{K}$-упорядоченной алгебре L над направленным полем F нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}(L)$ совпадает с l-первичным радикалом $l\text{-rad}_K(L)$.*

Доказательство. По следствию 3.6.1 $\mathfrak{N}_1(L) = \mathfrak{N}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. Предположим, что $\mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. Докажем, что $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. Пусть существует такой элемент $a \in \mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)$, что $a \notin l\text{-rad}_K(L)$. Тогда по правилу задания идеалов цепи (6) получаем, что

$$a + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \mathfrak{N}_{\gamma+1}(L)/\mathfrak{N}_\gamma(L) = \mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big),$$

при этом по следствию 3.6.1 верно включение $\mathfrak{N}\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big) \subseteq l\text{-rad}_K\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$. Таким образом, $a+\mathfrak{N}_\gamma(L) \in l\text{-rad}_K\big(L/\mathfrak{N}_\gamma(L)\big)$, и следовательно, по теореме 3.3.3 содержит нуль $0 + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ любая последовательность $\{a_j + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid j \in \mathbb{N}\}$, для которой $a_1 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = a + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ и $a_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in (I_{a_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)})^2$.

Для элемента $a \notin l\text{-rad}_K(L)$ из теоремы 3.3.3 следует существование необнуляющейся последовательности $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$, в которой $b_1 = a$ и $b_{i+1} \in (I_{b_i})^2$. Тогда $b_1 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = a + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ и, так как $(I_{b_i})^2 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \big(I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L)\big)^2$, то $b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big(I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L)\big)^2$.

Покажем, что $I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$. По предложению 2.2.5 идеал $I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$ состоит из элементов $x + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ фактор-алгебры $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$, для которых верно неравенство $|x + \mathfrak{N}_\gamma(L)| \leqslant \gamma_x|b_i + \mathfrak{N}_\gamma(L)|$ для некоторого элемента $\gamma_x \in F$. Учитывая замечание 2.3.1, имеем

$$I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)} = \{x + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid |x| + \mathfrak{N}_\gamma(L) \leqslant \gamma_x|b_i| + \mathfrak{N}_\gamma(L)\}.$$

Для каждого элемента l-идеала

$$I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \{x + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid x \in I_{b_i}\}$$

по предложению 2.2.5 имеет место неравенство $|x| \leqslant \gamma_x|b_i|$, из которого по правилу задания отношения порядка на фактор-алгебре $L/\mathfrak{N}_\gamma(L)$ следует, что $|x + \mathfrak{N}_\gamma(L)| = |x| + \mathfrak{N}_\gamma(L) \leqslant \gamma_x|b_i| + \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Отсюда по доказанному выше заключаем, что $I_{b_i} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}$. Значит, $b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \big(I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\big)^2$.

Итак, построена последовательность $\{b_j + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in L/\mathfrak{N}_\gamma(L) \mid j \in \mathbb{N}\}$, элементы которой удовлетворяют следующим условиям: $b_1 + \mathfrak{N}_\gamma(L) = a + \mathfrak{N}_\gamma(L)$ и $b_{i+1} + \mathfrak{N}_\gamma(L) \in \left(I_{b_i+\mathfrak{N}_\gamma(L)}\right)^2$. Такая последовательность по доказанному выше должна обращаться в нуль, т. е. существует $n \in \mathbb{N}$, такое что $b_n + \mathfrak{N}_\gamma(L) = \mathfrak{N}_\gamma(L)$ и, значит, $b_n \in \mathfrak{N}_\gamma(L)$. Так как по предположению индукции $\mathfrak{N}_\gamma(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$, то $b_n \in l\text{-rad}_K(L)$. По теореме 3.3.3 отсюда следует, что содержит нуль любая последовательность $\{c_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$, для которой $c_1 = b_n$ и $c_{k+1} \in (I_{c_k})^2$. Поскольку по доказанному выше последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ не содержит нуль, то $b_n \neq 0$. Следовательно, существует такой индекс $m \geqslant 2$, что $c_m = 0$.

Рассмотрим в качестве элемента c_2 элемент $b_{n+1} \in (I_{b_n})^2$ из последовательности $\{b_j \in L\}$, в качестве $c_3 \in (I_{c_2})^2 = (I_{b_{n+1}})^2$ возьмём b_{n+2} и т. д. По доказанному выше существует такой номер $m \geqslant 2$, что $c_m = b_{n+m-1} = 0$. Получаем противоречие с тем, что последовательность $\{b_j \in L \mid j \in \mathbb{N}\}$ нуль не содержит.

Значит, $a \in l\text{-rad}_K(L)$. Поэтому $\mathfrak{N}_{\gamma+1}(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$. Таким образом, с помощью трансфинитной индукции получим:

$$\mathfrak{N}_\mu(L) = \bigcup_{\alpha<\mu} \mathfrak{N}_\alpha(L) \subseteq l\text{-rad}_K(L)$$

для предельного числа μ. Тогда нижний слабо разрешимый l-радикал $\mathfrak{B}(L) = \bigcup\limits_{\alpha\geqslant 0} \mathfrak{N}_\alpha(L)$ также содержится в l-первичном радикале.

Допустим, что $\mathfrak{B}(L) \subsetneqq l\text{-rad}_K(L)$. Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{B}(L)$ является по предложению 3.7.2 и определению 3.4.1 l-полупервичным идеалом в L, по лемме 3.4.4 получим, что существует l-первичный идеал P в L, для которого $P \supseteq \mathfrak{B}(L)$ и $P \not\supseteq l\text{-rad}_K(L)$. Но любой l-первичный идеал содержит $l\text{-rad}_K(L)$, противоречие. Таким образом, $\mathfrak{B}(L) = l\text{-rad}_K(L)$. $\square$

Литература

[1] Агалаков С. А., Штерн А. С. Свободные произведения линейно упорядочиваемых алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1982. — Т. 23, № 3. — С. 5—9.

[2] Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М. Радикалы алгебр и структурная теория. — М.: Наука, 1979.

[3] Бахтурин Ю. А. Тождества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.

[4] Биркгоф Г. Теория решёток. — М.: Наука, 1984.

[5] Бурбаки Н. Группы и алгебры Ли. Главы I—III. — М.: Мир, 1976.

[6] Голод Е. С. О ниль-алгебрах и финитно-аппроксимируемых p-группах // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1964. — Т. 28, № 2. — С. 273—276.

[7] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: Изд. иностр. лит., 1961.

[8] Джекобсон Н. Алгебры Ли. — М.: Мир, 1964.

[9] Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И. Основы теории групп. — М.: Наука, 1972.

[10] Копытов В. М. Упорядочение алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1972. — Т. 11, № 3. — С. 295—325.

[11] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные алгебры Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 3. — С. 595—607.

[12] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[13] Кочетова Ю. В. О некоторых свойствах идеалов решёточно упорядоченных алгебр Ли // Вестн. СамГУ. Естественнонауч. сер. Математика. — 2007. — Т. 57, № 7. — С. 73—83.

[14] Кочетова Ю. В. О нижнем слабо разрешимом l-радикале решёточно упорядоченных алгебр Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 8. — С. 137—149.

[15] Кочетова Ю. В. Первичные и полупервичные решёточно упорядоченные алгебры Ли // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 7. — С. 137—143.

[16] Кочетова Ю. В. Первичный радикал решёточно упорядоченных алгебр Ли // Успехи мат. наук. — 2008. — Т. 63, № 5. — С. 191—192.

[17] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах частично упорядоченных алгебр Ли // Избранные вопросы алгебры: Сб. статей, посвящ. памяти Н. Я. Медведева. — Барнаул: Изд-во Алт. ун-та, 2007. — С. 131—142.

[18] Кочетова Ю. В., Ширшова Е. Е. О линейно упорядоченных линейных алгебрах // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 1. — С. 53—63.

[19] Курош А. Г. Радикалы колец и алгебр // Мат. сб. — 1953. — Т. 33, № 1. — С. 13—26.

[20] Курош А. Г. Теория групп. — М.: Наука, 1967.

[21] Ламбек И. Кольца и модули. — М.: Мир, 1971.

[22] Медведев Н. Я. О продолжении порядков алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1977. — Т. 18, № 2. — С. 469—471.

[23] Медведев Н. Я. О решётках многообразий решёточно упорядоченных групп и алгебр Ли // Алгебра и логика. — 1977. — Т. 16, № 1. — С. 40—45.

[24] Медведев Н. Я. К теории решёточно упорядоченных колец // Мат. заметки. — 1987. — Т. 41, № 4. — С. 484—489.

[25] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных колец // Сб. работ по алгебре. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1989. — С. 178—184.

[26] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал решёточно упорядоченных групп // Вестн. Моск. ун-та. — 1990. — № 2. — С. 84—86.

[27] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Первичный радикал Ω-групп и Ω-l-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1405—1413.

[28] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичные радикалы AO-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 197—206.

[29] Михалёв А. В., Ширшова Е. Е. Первичный радикал pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 193—199.

[30] Парфёнов В. А. О слабо разрешимом радикале алгебр Ли // Сиб. мат. журн. — 1971. — Т. 12, № 1. — С. 171—176.

[31] Пихтильков С. А. Структурная теория специальных алгебр Ли. — Тула: Изд-во Тульск. гос. пед. ун-та им. Л. Н. Толстого, 2005.

[32] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[33] Хамфрис Дж. Введение в теорию алгебр Ли и их представлений. — М.: МЦНМО, 2003.

[34] Шаталова М. А. l_A- и l_I-кольца // Сиб. мат. журн. — 1966. — Т. 7, № 6. — С. 1383—1399.

[35] Шаталова М. А. К теории радикалов в структурно упорядоченных кольцах // Мат. заметки. — 1968. — Т. 4, № 6. — С. 639—648.

[36] Ширшов А. И. О базах свободной алгебры Ли // Алгебра и логика. — 1962. — Т. 1, № 1. — С. 14—19.

[37] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдорешёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы: Межвуз. сб. науч. тр. Ивановск. гос. ун-та. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[38] Щукин К. К. RI-разрешимый радикал группы // Мат. сб. — 1960. — Т. 52, № 4. — С. 1021—1031.

[39] Baer R. Radicals ideals // J. Math. — 1943. — Vol. 65. — P. 537—568.

[40] Birkhoff G., Pierce R. S. Lattice-ordered rings // An. Acad. Brasil. Ci. — 1956. — Vol. 28. — P. 41—69.

[41] Levitzki J. Prime ideals and the lower radical // Amer. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 25—29.

[42] McCoy N. H. Prime ideals in general rings // Amer. J. Math. — 1949. — Vol. 71. — P. 823—833.