Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых нередуцированных p-групп

М. А. РОЙЗНЕР
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: mroizner@gmail.com

УДК 512.541.6+510.67

Ключевые слова: элементарная эквивалентность, эквивалентность в логике второго порядка, абелевы p-группы, группы автоморфизмов.

Аннотация

Рассмотрим абелевы p-группы ($p \geqslant 3$) A_1 и A_2 с ненулевыми делимыми частями. В данной работе доказано, что группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_1$ и $\operatorname{Aut} A_2$ элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда группы A_1 и A_2 эквивалентны в логике второго порядка.

Abstract

M. A. Roizner, A criterion of elementary equivalence of automorphism groups of reduced Abelian p-groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 159—170.

We consider Abelian p-groups ($p \geqslant 3$) A_1 and A_2 with nonzero divisible parts. In this paper, we prove that the automorphism groups $\operatorname{Aut} A_1$ and $\operatorname{Aut} A_2$ are elementarily equivalent if and only if the groups A_1 and A_2 are equivalent in second-order logic.

1. Введение

В данной работе рассматриваются элементарные свойства (т. е. свойства, выразимые в языке первого порядка) групп автоморфизмов абелевых p-групп ($p \geqslant 3$), не являющихся редуцированными.

Впервые вопросы связи элементарных свойств некоторых моделей с элементарными свойствами производных моделей были рассмотрены в 1961 г. А. И. Мальцевым [10]. Было доказано, что группы $G_n(K)$ и $G_m(L)$ ($G = \mathrm{GL}, \mathrm{SL}, \mathrm{PGL}, \mathrm{PSL}$, $n, m \geqslant 3$, K, L — поля характеристики 0) элементарно эквивалентны тогда и только тогда, когда $m = n$ и поля K и L элементарно эквивалентны.

Продолжение эта теория получила в 1992 г., когда с помощью конструкции ультрапроизведения и теоремы об изоморфизме [8] К. И. Бейдар и А. В. Михалёв [14] нашли общий подход к проблемам элементарной эквивалентности

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 159—170.

различных алгебраических структур и обобщили теорему Мальцева для случая, когда K и L являются телами и ассоциативными кольцами.

Продолжением исследований в этой области явились работы Е. И. Буниной 1998—2010 гг. (см. [1—4]), где результаты А. И. Мальцева были распространены на унитарные линейные группы над телами и ассоциативными кольцами с инволюцией, а также на группы Шевалле над полями и локальными кольцами.

В 2000 г. В. Толстых [20] рассмотрел связь свойств второго порядка для тел и свойств первого порядка групп автоморфизмов бесконечномерных пространств над этими телами. В 2003 г. Е. И. Буниной и А. В. Михалёвым [6] была рассмотрена связь свойств второго порядка ассоциативных колец и свойств первого порядка категорий модулей, колец эндоморфизмов, групп автоморфизмов и проективных пространств модулей бесконечного ранга над этими кольцами.

Известная теорема Бэра—Капланского 2 утверждает, что периодическая абелева группа определяется своим кольцом эндоморфизмов: если две группы имеют изоморфные кольца эндоморфизмов, то сами группы также изоморфны. Аналогичные теоремы 3 и 4 об изоморфности групп автоморфизмов абелевых p-групп были доказаны Х. Лептином и В. Либертом для $p \geqslant 5$ и $p \geqslant 3$ соответственно (случай $p = 2$ всё ещё остаётся открытым).

В [5] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв установили связь между свойствами второго порядка абелевой p-группы и свойствами первого порядка её кольца эндоморфизмов.

Данная работа является продолжением работ [7, 11, 18] об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп. В данной работе мы получаем критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов для случая, когда группы имеют ненулевые делимые части и $p \geqslant 3$. Мы выражаем теорию второго порядка самой абелевой группы в языке первого порядка её группы автоморфизмов.

2. Предварительные сведения

Абелева группа A называется *n-ограниченной*, если $nA = 0$. Группа называется *ограниченной*, если она n-ограниченная для некоторого натурального n. Если такого n не существует, то такая группа называется *неограниченной*.

Будем говорить, что элемент a группы A *делится* на натуральное число n (обозначение $n \mid a$), если уравнение $nx = a$ $(a \in A)$ имеет решение в группе A. Группа D называется *делимой*, если $n \mid a$ для всех $a \in D$ и всех натуральных чисел n. Группы $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ служат примерами делимых групп. Группа A называется *редуцированной*, если она не имеет ненулевых делимых подгрупп.

Теорема 1 [12]. *Всякая группа A является прямой суммой делимой группы D и редуцированной группы G,*

$$A = D \oplus G.$$

Подгруппа D здесь определена однозначно и называется делимой частью группы A, подгруппа G определена однозначно с точностью до изоморфизма.

Подгруппа G группы A называется *сервантной*, если уравнение $nx = g \in G$, имеющее решение во всей группе A, имеет решение и в G. Подгруппа G сервантна в группе A тогда и только тогда, когда

$$\forall n \in \mathbb{Z}\ nG = G \cap nA.$$

Подгруппа B группы A называется *p-базисной*, если выполнены следующие три условия:

1) подгруппа B является прямой суммой циклических p-групп и бесконечных циклических групп;
2) B — сервантная подгруппа группы A;
3) фактор-группа A/B является p-делимой группой.

Всякая группа для любого простого числа p содержит p-базисные подгруппы [12].

В дальнейшем для нас будут важны p-группы и их p-базисные подгруппы. Если A — p-группа и q — простое число, отличное от p, то группа A имеет лишь одну q-базисную подгруппу, равную 0. Поэтому в случае p-групп мы будем называть p-базисные подгруппы просто *базисными*.

Так как базисная подгруппа B имеет базис, а фактор-группа A/B — прямая сумма групп, изоморфных группе $\mathbb{Z}(p^\infty)$ (т. е. A/B также имеет систему образующих, которую легко описать), то естественно объединить эти системы образующих и таким путём получить систему образующих группы A.

Запишем

$$B = \bigoplus_{i\in I} \langle a_i \rangle \quad \text{и} \quad A/B = \bigoplus_{j\in J} C_j^*, \quad \text{где} \quad C_j^* = \mathbb{Z}(p^\infty).$$

Если прямое слагаемое C_j^* порождается смежными классами $c_{j1}^*, \dots, c_{jn}^*, \dots$ по подгруппе B, для которых $pc_{j1}^* = 0$, $pc_{j,n+1}^* = c_{jn}^*$ $(n = 1, 2, \dots)$, то в группе A можно выбрать элементы $c_{jn} \in c_{jn}^*$ того же порядка, что и c_{jn}^*. Тогда получим систему соотношений

$$pc_{j1} = 0,\ pc_{j,n+1} = c_{jn} + b_{jn} \quad (n \geqslant 1,\ b_{jn} \in B),$$

где элемент b_{jn} должен иметь порядок не выше p^n, так как $\mathrm{o}(c_{jn}) = p^n$.

Систему элементов $\{a_i, c_{jn}\}_{i\in I,\ j\in J,\ n\in\omega}$ мы будем называть *квазибазисом* группы A.

Предложение 1 [12]. *Если $\{a_i, c_{jn}\}$ — квазибазис p-группы A, то любой элемент $a \in A$ можно записать в виде*

$$a = s_1 a_{i_1} + \ldots + s_m a_{i_m} + t_1 a_{j_1 n_1} + \ldots + t_r a_{j_r n_r}, \tag{1}$$

где s_i и t_j — целые числа, ни одно t_j не делится на p и индексы $i_1, \dots, i_m$, так же как и индексы $j_1, \dots, j_r$, все различны. Запись (1) единственна в том смысле, что в ней однозначно определены члены sa_i и tc_{jn}.

Теорема 2 (Р. Бэр [13], И. Капланский [15]). *Если A и C — периодические группы, кольца изоморфизмов которых изоморфны, то группы A и C изоморфны.*

Теорема 3 (Х. Лептин [16]). *Если $p \geqslant 5$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.*

Теорема 4 (В. Либерт [17]). *Если $p \geqslant 3$ и A, C — некоторые p-группы с изоморфными группами автоморфизмов, то группы A и C изоморфны.*

Две модели называются *элементарно эквивалентными*, если совпадают их *элементарные теории*, т. е. множества предложений первого порядка, выполнимых в этих моделях.

Язык второго порядка определяется так же, как язык первого порядка, с тем лишь отличием, что в нём добавлены предикатные переменные. Именно, если P^l — предикатная переменная, а $t_1, \ldots, t_l$ — термы, то знакосочетание $P^l(t_1, \ldots, t_l)$ является формулой, а если φ — формула, то знакосочетание $(\forall\, P^l(v_1, \ldots, v_l)\ \varphi)$ также является формулой и вхождение переменной P^l в неё является связанным. Выполнимость произвольной формулы φ в модели U с универсумом A определяется естественным образом так, что предикатным переменным вида P^l ставятся в соответствие произвольные подмножества множества A^l. *Теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка (обозначение $\mathrm{Th}_2(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка*, если их теории второго порядка совпадают.

Важным примером для нас будет групповой язык. Мы будем считать, что в нём нет функциональных и константных символов и есть единственный трёхместный предикатный символ Q^3, отвечающий за умножение. Вместо $Q^3(x_1, x_2, x_3)$ мы будем писать $x_1 = x_2 \cdot x_3$ или, если речь идёт об абелевых группах, $x_1 = x_2 + x_3$. В качестве примера предложения второго порядка можно привести предложение, выражающее простоту группы:

$$\forall\, P^1\ \Big(P(1) \wedge \forall\, x\, \forall\, y\ \big(P(x) \wedge P(y) \Rightarrow P(x \cdot y^{-1})\big)\Big) \wedge \forall\, x\, \forall\, y\ \big(P(x) \Rightarrow P(y \cdot x \cdot y^{-1})\big) \Rightarrow \\ \Rightarrow \big(\forall\, x\ P(x) \vee \forall\, x\ (P(x) \Rightarrow x = 1)\big).$$

Пусть $\varkappa$ — некоторое кардинальное число. Выполнимость формулы φ в модели U с универсумом A с ограничением $\varkappa$ определяется так же, как и обычная выполнимость в логике второго порядка с тем лишь отличием, что предикатным переменным вида P^l ставятся в соответствие произвольные подмножества множества A^l мощности не больше $\varkappa$. *$\varkappa$-ограниченной теорией второго порядка* модели U называется множество выполнимых в ней предложений второго порядка с ограничением $\varkappa$ (обозначение $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$). Две модели *эквивалентны в логике второго порядка, ограниченной $\varkappa$*, если совпадают их $\varkappa$-ограниченные теории второго порядка. Заметим, что если $\varkappa \geqslant |A|$, то теории $\mathrm{Th}_2(U)$ и $\mathrm{Th}_2^{\varkappa}(U)$ совпадают. Если же $\varkappa < \infty$, то эквивалентность в ограниченной логике второго порядка равносильна элементарной эквивалентности.

Подробности об элементарной эквивалентности, эквивалентности в логике второго порядка и в ограниченной логике второго порядка можно найти, например, в [5].

В [7] Е. И. Бунина и М. А. Ройзнер ввели некоторые формулы для работы с инволюциями (автоморфизмами порядка 2). Приведём их здесь.

Инволюции ε соответствует разложение группы A в прямую сумму: $A = A_\varepsilon^+ \oplus A_\varepsilon^-$, где $A_\varepsilon^+ = \{a \in A \mid \varepsilon a = a\}$ и $A_\varepsilon^- = \{a \in A \mid \varepsilon a = -a\}$.

Формула $\mathrm{Extreme}(\varepsilon)$ означает, что автоморфизм ε является экстремальной инволюцией, т. е. инволюцией, для которой одно из слагаемых A_ε^+ и A_ε^- неразложимо. Неразложимое слагаемое экстремальной инволюции ε мы будем обозначать через A_ε, а оставшееся слагаемое — через $A_\varepsilon^\perp$. *Порядком* экстремальной инволюции ε будем называть порядок слагаемого A_ε.

По инволюции ξ мы не сможем отличить в языке первого порядка группы A_ξ^+ и A_ξ^-, поэтому мы будем иметь дело с парами (ξ,ε), для которых $\mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi$. Для таких пар либо $A_\varepsilon \subset A_\xi^+$, либо $A_\varepsilon \subset A_\xi^-$, подгруппа A_ε и будет нам указывать на нужную из групп A_ξ^+ и A_ξ^- (обозначим её через $A_{(\xi,\varepsilon)}$). Свойство быть парой мы будем обозначать формулой

$$\mathrm{Pair}(\xi,\varepsilon) \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \xi^2 = 1 \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon) \wedge \xi\varepsilon = \varepsilon\xi.$$

Вместо выражений $\forall\,\xi\,\forall\,\varepsilon\,\big(\mathrm{Pair}(\xi,\varepsilon) \Rightarrow (\ldots)\big)$ и $\exists\,\xi\,\exists\,\varepsilon\,\big(\mathrm{Pair}(\xi,\varepsilon)\wedge(\ldots)\big)$ мы будем писать соответственно $\forall\,(\xi,\varepsilon)$ и $\exists\,(\xi,\varepsilon)$.

В [7, с. 7, 8, 10, 24] также были введены следующие формулы:

1) $\varepsilon \in \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 \Longleftrightarrow A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_1} \oplus A_{\varepsilon_2}$ и $A_\varepsilon^\perp \supset A_{\varepsilon_1}^\perp \cap A_{\varepsilon_2}^\perp$ для экстремальных инволюций ε, ε_1, ε_2, таких что $\varepsilon_1\varepsilon_2 = \varepsilon_2\varepsilon_1$;
2) $\varepsilon_2 \in (\xi_1,\varepsilon_1) \Longleftrightarrow A_{\varepsilon_2} \subset A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$ для экстремальной инволюции ε_2 и пары (ξ_1,ε_1);
3) $(\xi_1,\varepsilon_1) \subset (\xi_2,\varepsilon_2) \Longleftrightarrow A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \subset A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$;
4) $(\xi_1,\varepsilon_1) = (\xi_2,\varepsilon_2) \Longleftrightarrow A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} = A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$;
5) $(\xi_1,\varepsilon_1) \cap (\xi_2,\varepsilon_2) = (\xi_3,\varepsilon_3) \Longleftrightarrow A_{(\xi_3,\varepsilon_3)} = A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \cap A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$;
6) $(\xi_1,\varepsilon_1) \oplus (\xi_2,\varepsilon_2) = (\xi_3,\varepsilon_3) \Longleftrightarrow A_{(\xi_3,\varepsilon_3)} = A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \oplus A_{(\xi_2,\varepsilon_2)}$;
7) $\overline{(\xi_1,\varepsilon_1)} = (\xi_2,\varepsilon_2) \Longleftrightarrow A_{(\xi_1,\varepsilon_1)} \oplus A_{(\xi_2,\varepsilon_2)} = A$.

Формула $f(\varepsilon_1) = \varepsilon_2$ для экстремальных инволюций ε_1, ε_2 и произвольного автоморфизма f означает, что $f(A_{\varepsilon_1}) = A_{\varepsilon_2}$. Но такая ситуация возможна только тогда, когда порядки слагаемых A_{ε_1} и A_{ε_2} совпадают, поэтому удобно ввести обозначение для соответствия неразложимых слагаемых разных порядков:

$$\varepsilon_1 \overset{f}{\mapsto} \varepsilon_2 \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \mathrm{Extreme}(\varepsilon_1) \wedge \mathrm{Extreme}(\varepsilon_2) \wedge f(\varepsilon_1) \in \varepsilon_1 \oplus \varepsilon_2 \wedge f(\varepsilon_1) \neq \varepsilon_1 \wedge f(\varepsilon_1) \neq \varepsilon_2.$$

Формула $\mathrm{ord}(\varepsilon_1) < \mathrm{ord}(\varepsilon_2)$ означает, что порядок экстремальной инволюции ε_1 меньше порядка экстремальной инволюции ε_2. Аналогично вводятся остальные операции сравнения порядков.

Ранее были получены следующие результаты об элементарной эквивалентности групп автоморфизмов абелевых p-групп.

Теорема 5 (Е. И. Бунина, М. А. Ройзнер [7]). *Пусть A, A' — p-группы, $p \geqslant 3$. Если $\operatorname{Aut} A \equiv \operatorname{Aut} A$, то группы A и A' обладают эквивалентными в логике второго порядка базисными подгруппами и делимыми частями.*

Теорема 6 (М. А. Ройзнер [11]). *Пусть A и A' — редуцированные абелевы p-группы с базисными подгруппами B и B' соответственно, $p \geqslant 3$. Тогда если $\operatorname{Aut} A \equiv \operatorname{Aut} A'$, то $\operatorname{Th}_2^{|B|}(A) = \operatorname{Th}_2^{|B'|}(A')$.*

Нам понадобится следующая теорема о мощности базисной подгруппы.

Теорема 7 (Л. Я. Куликов [9]). *Если B — базисная подгруппа редуцированной p-группы A, то $|A| \leqslant |B|^{\omega}$.*

В этой статье мы будем считать, что A — абелева p-группа с ненулевой делимой частью D: $A = G \oplus D$, $D \neq 0$, $B \subset G$ — базисная подгруппа. Из теоремы 7 следует, что либо $|G| = |B|$, либо $|B| < |G| \leqslant 2^{\omega}$. В [11] в логике первого порядка группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A$ выражена теория второго порядка группы G, ограниченная мощностью $|B|$. В [7] выражена теория второго порядка делимой части D. Следовательно, в случае $|G| = |B|$ выразимость теории второго порядка всей группы A уже доказана. Поэтому далее мы будем считать, что $|B| < |G| \leqslant 2^{\omega}$.

3. Интерпретация фактор-группы G/B

В [18] было показано, как выделить базисную подгруппу B и ввести на ней структуру. А именно, были введены формулы, задающие для неразложимого слагаемого A_ε условие принадлежности группе B, и было выделено множество автоморфизмов $\{g_{ij}\}$, таких что

$$g_{ij}(b_i) = b_i + b_j \quad \text{и} \quad g|_{\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m} = \mathrm{id},$$

где

$$B = \bigoplus_i B_i, \quad B_i = \langle b_i \rangle \text{ — неразложимые слагаемые.}$$

Следуя [18], мы будем говорить, что автоморфизм f_a интерпретирует элемент $a \in A$, если существует некоторый элемент b_i, такой что

$$f_a(b_i) = b_i + a \quad \text{и} \quad f_a|_{\bigoplus\limits_{m\neq i} B_m} = \mathrm{id}.$$

Множество автоморфизмов, интерпретирующих элементы группы G, обозначим через F_G.

В [7] выражена теория второго порядка группы B.

Для начала мы хотим выделить произвольное прямое квазициклическое слагаемое

$$\mathbb{Z}_{p^\infty} \cong \bar{G} \subset G/B.$$

Чтобы задать такое слагаемое, достаточно задать его квазибазис — последовательность элементов

$$\bar{g}_1, \bar{g}_2, \bar{g}_3, \ldots \in \bar{G}, \quad \text{где} \quad p\bar{g}_1 = B, \quad p\bar{g}_2 = \bar{g}_1, \quad p\bar{g}_3 = \bar{g}_2, \ldots,$$

которая может быть задана последовательностью представителей

$$g_1 \in \bar{g}_1, \quad g_2 \in \bar{g}_2, \quad g_3 \in \bar{g}_3, \ldots, \quad \text{где} \quad pg_1 \in B, \quad pg_2 \in g_1 + B, \quad pg_3 \in g_2 + B, \ldots.$$

Эта последовательность уже однозначно задаётся одним автоморфизмом $f_{\bar{G}}$, для которого некоторая «возрастающая цепочка» порождающих базисных элементов

$$b_1, b_2, b_3, \ldots \in B \quad (\operatorname{ord}(b_1) < \operatorname{ord}(b_2) < \operatorname{ord}(b_3) < \ldots)$$

переходит в последовательность

$$g_1, g_2, g_3, \ldots : f_{\bar{G}}(b_i) = b_i + g_i, \; i = 1, 2, \ldots.$$

Будем считать эту цепочку $b_1, b_2, b_3, \ldots$ одинаковой для всех слагаемых и заранее фиксированной. Условие

$$pg_1 \in B, \; pg_2 \in g_1 + B, \; pg_3 \in g_2 + B, \ldots$$

для автоморфизма $f_{\bar{G}}$ задаётся непосредственно:

$$\forall\, b_i \; \exists\, b \in B \; (p(f_{\bar{G}}(b_i) - b_i) = b) \vee \exists\, b_j \; \exists\, b \in B \; (p(f_{\bar{G}}(b_i) - b_i) - (f_{\bar{G}}(b_j) - b_j) = b).$$

Кроме того, два таких автоморфизма считаются эквивалентными, если они кодируют одну и ту же последовательность $g_1 + B, g_2 + B, g_3 + B, \ldots$ (т. е. одну и ту же последовательность $g_1, g_2, g_3, \ldots$ с точностью до элементов базисной подгруппы).

Таким образом, можно считать, что мы выделили множество таких автоморфизмов $F_{G/B}$, кодирующих квазициклические слагаемые $\bar{G} \in G/B$, и отношение эквивалентности $=_{G/B}$ на них.

Также с помощью интерпретации логики первого порядка группы G несложно записать условие $g + B \in \bar{G}$ для произвольного элемента $g \in G$, интерпретируемого автоморфизмом f_g, и квазициклического слагаемого $\bar{G} \in G/B$, задаваемого автоморфизмом $f_{\bar{G}}$. Будем записывать это условие как $f_g \in f_{\bar{G}}$.

Нам также понадобятся гомоморфизмы из фактор-группы G/B в делимую часть D. Гомоморфизм $f' \colon G/B \to D$ можно однозначно задать автоморфизмом $f \in \operatorname{Aut} A$, таким что $f(g) = g + f'(g + B)$ для $g \in G$. Множество всех таких автоморфизмов f, соответствующих гомоморфизмам $f' \colon G/B \to D$, задаётся двумя условиями: во-первых, f тождествен на B и на D, во-вторых, $f(g) - g \in D$ для любого элемента $g \in G$. Обозначим множество таких автоморфизмов через $\operatorname{Hom}_{G/B,D}$. Утверждение следующей леммы проверяется непосредственно.

Лемма 1. *Пусть автоморфизм f_g интерпретирует элемент $g \in G$. Тогда автоморфизм $f^{-1} f_g^{-1} f f_g$ интерпретирует элемент $f'(g + B) \in D$.*

Доказательство. Имеем

$$f^{-1}f_g^{-1}ff_g(b_i) = f^{-1}f_g^{-1}f(b_i+g) = f^{-1}f_g^{-1}\bigl(b_i+g+f'(g+B)\bigr) = \\ = f^{-1}\bigl(b_i+f'(g+B)\bigr) = b_i+f'(g+B).$$

Пусть элемент g' лежит в прямом дополнении к $\langle b\rangle$ и $f(g') = g'+d$, где $d \in D$. Тогда

$$f^{-1}f_g^{-1}ff_g(g') = f^{-1}f_g^{-1}f(g') = f^{-1}f_g^{-1}(g'+d) = f^{-1}(g'+d) = g'. \qquad \square$$

С помощью леммы 1 выразим сложение гомоморфизмов из $\mathrm{Hom}(G/B, D)$. Для гомоморфизмов $f_1', f_2', f_3' \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$ верно $f_1'+f_2' = f_3'$ тогда и только тогда, когда

$$f_1 +_{\mathrm{Hom}} f_2 = f_3 \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, f_g \in F_G\ f_1^{-1}f_g^{-1}f_1f_gf_2^{-1}f_g^{-1}f_2f_g = f_3^{-1}f_g^{-1}f_3f_g,$$

где через F_G обозначено множество всех автоморфизмов, интерпретирующих элементы $g \in G$. Таким образом, мы выразили теорию первого порядка группы гомоморфизмов $\mathrm{Hom}(G/B, D)$.

Теперь мы можем выразить независимость системы квазициклических слагаемых. Условие независимости системы $F \subset F_{G/B}$ определяется следующим образом: для любого квазициклического слагаемого $\bar{g}$ из этой системы и любых гомоморфизмов $h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$ существует гомоморфизм $h \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$, совпадающий с h_1 на $\bar{g}$ и с h_2 на остальных квазициклических слагаемых этой системы:

$$\mathrm{Independ}_F \overset{\mathrm{def}}{\Longleftrightarrow} \forall\, f_{\bar{g}} \in F\ \forall\, h_1, h_2 \in \mathrm{Hom}_{G/B,D}\ \ \exists\, h \in \mathrm{Hom}_{G/B,D} \\ \Bigl(\forall\, f_g \in f_{\bar{g}}\ (h^{-1}f_g^{-1}hf_g = h_1^{-1}f_g^{-1}h_1f_g) \wedge \\ \wedge \forall\, f_{\bar{g}'} \in F\ \bigl(f_{\bar{g}'} \neq f_{\bar{g}} \Rightarrow \forall\, f_g \in f_{\bar{g}'}\ (h^{-1}f_g^{-1}hf_g = h_2^{-1}f_g^{-1}h_2f_g)\bigr)\Bigr).$$

Таким образом, помимо множества автоморфизмов $F_{G/B}$, кодирующих квазициклические слагаемые $\bar{G} \in G/B$, мы задали множество автоморфизмов $\mathrm{Hom}_{G/B,D}$, интерпретирующих гомоморфизмы из $\mathrm{Hom}(G/B, D)$, и операцию сложения $+_{\mathrm{Hom}}$. Также мы ввели формулу $\mathrm{Independ}_F$, выражающую независимость квазициклических слагаемых, задаваемых системой автоморфизмов $F \subset F_{G/B}$.

4. Разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые

Мы хотим выделить в $F_{G/B}$ множество автоморфизмов, которые зададут разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые. Для этого нам понадобится теорема Шелаха [19]. В [7, с. 8—11] был доказан вариант теоремы Шелаха для случая, когда Ω — множество наборов автоморфизмов, некоторым способом кодирующих эндоморфизмы группы $A = \bigoplus_{\mu} \mathbb{Z}_{p^l}$ $(l \in \mathbb{N})$.

Теорема 8. *Существует формула $\tilde{\varphi}(\ldots)$, удовлетворяющая следующему условию. Пусть $\{f_i\}_{i\in\mu}$ — множество элементов из Ω. Тогда можно найти такой вектор $\bar{g}$, что формула $\tilde{\varphi}(f, \bar{g})$ истинна в Ω тогда и только тогда, когда $f = f_i$ для некоторого $i \in \mu$.*

Для того чтобы воспользоваться теоремой Шелаха в случае множества $F_{G/B}$, нужно интерпретировать отображения множества независимых автоморфизмов из $F_{G/B}$ в себя. Пусть задано некоторое такое отображение f. Тогда можно построить два таких гомоморфизма $h_1', h_2' \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$, при которых для каждой пары автоморфизмов $f_1 \in F_{G/B}$ и $f_2 \in F_{G/B}$ соответствующие им последовательности элементов G/B имеют один и тот же образ в D тогда и только тогда, когда $f(f_1) = f_2$ (это возможно благодаря ограничению по мощности $|G| \leqslant 2^{\omega}$, $|D| \geqslant \omega$, т. е. различных образов в D достаточно). Пусть h_1 и h_2 — автоморфизмы, интерпретирующие согласно предыдущем разделу гомоморфизмы h_1' и h_2' соответственно. Тогда свойство $f(f_1) = f_2$ может быть задано формулой $h_1^{-1} f_1^{-1} h_1 f_1 = h_2^{-1} f_2^{-1} h_2 f_2$. Отображение f может быть задано автоморфизмами h_1 и h_2.

Таким образом, мы получили теорему 8 для случая $\Omega = F_{G/B}$. Теперь с помощью этой теоремы можно выделить максимальное независимое множество в $F_{G/B}$. Вектор $\bar{g}$ задаёт максимальное независимое множество тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Independ}_{\tilde{\varphi}(\cdot,\bar{g})} \wedge \forall\, f_g \in F_{G/B}\big(\neg\tilde{\varphi}(f_g, \bar{g}) \Rightarrow \neg\mathrm{Independ}_{\tilde{\varphi}(\cdot,\bar{g})\cup\{f_g\}}\big).$$

Это множество и будет задавать разложение фактор-группы G/B на прямые слагаемые.

5. Интерпретация логики второго порядка группы A

Для фактор-группы G/B выделено разложение на прямую сумму квазициклических слагаемых, выражены гомоморфизмы в делимую часть и отображения множества независимых квазициклических слагаемых. Это позволяет отождествить G/B с делимой частью группы A в следующем смысле.

Рассмотрим два случая. Пусть $|G/B| \leqslant |D|$. Тогда существует подгруппа группы D, которую можно отождествить с G/B с помощью изоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$. В [7] было показано, как в случае $|D| \geqslant |B|$ выразить на группе D теорию второго порядка групп D и B. Так как группа G/B отождествлена с подгруппой группы D, то на группе D можно выразить теорию второго порядка групп D, B и G/B. Следовательно, на группе D можно интерпретировать теорию второго порядка всей группы A. Опишем эту интерпретацию.

Разложим группу D в прямую сумму:

$$D = D_D \oplus D_B \oplus D_{G/B} \oplus D_o,$$
$$\text{где } \ |D_D| = |D_o| = |D| = |A|, \ \ |D_B| = |B|, \ \ |D_{G/B}| = |G/B|.$$

Зададим разложения групп D_D, D_B и $D_{G/B}$ на прямые неразложимые слагаемые (циклические и квазициклические). Эти разложения будут однозначно соответствовать разложениям групп D, B и G/B на неразложимые слагаемые соответственно.

Каждый элемент группы A однозначно задаётся тройкой

$$\langle d, \bar{g}, b, \rangle \ \text{ где } \ d \in D, \ \ \bar{g} \in G/B, \ \ b \in B,$$

причём сложение элементов соответствует покоординатному сложению таких троек. Мы будем кодировать элементы d, $\bar{g}$, b и последовательности таких элементов специальными автоморфизмами.

Разложим группу D_o в прямую сумму:

$$D_o = \bigoplus_{i \in |A|} D_i,$$

где каждое слагаемое D_i является прямой суммой счётного числа квазициклических слагаемых:

$$D_i = \bigoplus_{j \in \omega} D_{ij}.$$

Мы зададим множество кодирующих автоморфизмов, каждый из которых на каждом слагаемом D_i будет задавать одну тройку $\langle d, \bar{g}, b \rangle$ следующим образом. Разложим элемент b по базису:

$$b = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \ldots + k_l b_l.$$

Тогда кодирующий автоморфизм будет прибавлять к k_1 слагаемым D_{ij} неразложимое слагаемое из D_B, соответствующее слагаемому $\langle b_1 \rangle$, к k_2 слагаемым — неразложимое слагаемое, соответствующее слагаемому $\langle b_2 \rangle$, и т. д. Аналогично кодируются элементы d и $\bar{g}$ с помощью коэффициентов перед порождающими из квазибазиса. На оставшихся неразложимых слагаемых $D_{ij} \subset D_i$ кодирующий автоморфизм будет тождественным. Для проверки, когда два автоморфизма кодируют одну и ту же тройку и когда один автоморфизм кодирует сумму троек, кодируемых двумя другими, задаются специальные формулы.

Продолжим рассмотрение интерпретации логики второго порядка. Каждому предложению ϕ логики второго порядка группы A соответствует эквивалентное предложение ψ логики первого порядка группы $\operatorname{Aut} A$, полученное по определённому алгоритму. В этом алгоритме все предметные переменные заменяются на кодирующие их автоморфизмы, а k-местные предикатные переменные заменяются на k автоморфизмов $f_1, \ldots, f_k$, кодирующих элементы на каждом прямом слагаемом D_i. Набор $(x_1, \ldots, x_k)$ принадлежит этому предикату, если существует прямое слагаемое D_i, на котором автоморфизм f_i кодирует элемент x_i для каждого $i = 1, \ldots, k$.

Подробнее интерпретация теории второго порядка и точные формулы «сложения» и «равенства» кодирующих автоморфизмов описаны в [7].

Пусть теперь $|G/B| > |D|$. Тогда в группе G/B существует подгруппа, которую можно отождествить с D с помощью изоморфизма $h \in \mathrm{Hom}(G/B, D)$. В этом случае теория второго порядка группы A может быть выражена на группе G/B аналогично предыдущему случаю (все необходимые операции на группе G/B уже выражены).

Таким образом, теория второго порядка группы A выражена.

6. Критерий элементарной эквивалентности

Мы уже доказали, что для абелевых групп с делимой частью из элементарной эквивалентности групп автоморфизмов следует эквивалентность второго порядка самих групп. Обратно, пусть группы A_1 и A_2 эквивалентны в логике второго порядка. В [5] было доказано, что в этом случае элементарно эквивалентны кольца $\mathrm{End}\, A_1$ и $\mathrm{End}\, A_2$. А так как теория первого порядка группы автоморфизмов прямым образом выражается через теорию первого порядка кольца эндоморфизмов, то группы $\mathrm{Aut}\, A_1$ и $\mathrm{Aut}\, A_2$ также элементарно эквивалентны. Таким образом, вдобавок к критерию элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных групп (теорема 6) мы получили следующий критерий.

Теорема 9. *Пусть A и A' — абелевы p-группы с ненулевыми делимыми частями, $p \geqslant 3$. Тогда*

$$\mathrm{Aut}\, A \equiv \mathrm{Aut}\, A' \iff A \equiv_2 A'.$$

Автор выражает благодарность профессору А. В. Михалёву и д. ф.-м. н. Е. И. Буниной за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

Литература

[1] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над кольцами и телами // Успехи мат. наук. — 1998. — Т. 53, № 2. — С. 137—138.

[2] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность унитарных линейных групп над полями // Фундамент. и прикл. мат. — 1998. — Т. 4, вып. 4. — С. 1265—1278.

[3] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 157—158.

[4] Бунина Е. И. Элементарная эквивалентность групп Шевалле над локальными кольцами // Мат. сб. — 2010. — Т. 201, № 3. — С. 3—20.

[5] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность колец эндоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 135—224.

[6] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарные свойства категорий модулей над кольцом, колец эндоморфизмов и групп автоморфизмов модулей // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 51—134.

[7] Бунина Е. И., Ройзнер М. А. Элементарная эквивалентность групп автоморфизмов абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, вып. 7. — С. 81—112.

[8] Кейслер Г., Чэн Ч. Ч. Теория моделей. — М.: Мир, 1977.

[9] Куликов Л. Я. Обобщённые примарные группы. I, II // Тр. ММО. — 1952. — Т. 1. — С. 247—326; 1953. — Т. 2. — С. 85—167.

[10] Мальцев А. И. Об элементарных свойствах линейных групп // Проблемы математики и механики. — 1961. — С. 110—132.

[11] Ройзнер М. А. Критерий элементарной эквивалентности групп автоморфизмов редуцированных абелевых p-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 157—163.

[12] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974.

[13] Baer R. Automorphism rings of primary Abelian operator groups // Ann. Math. — 1943. — Vol. 44. — P. 192—227.

[14] Beidar C. I., Mikhalev A. V. On Malcev's theorem on elementary equivalence of linear groups // Contemp. Math. — 1992. — Vol. 131. — P. 29—35.

[15] Kaplansky I. Infinite Abelian Groups. — Ann Arbor: Univ. of Michigan Press, 1954; 1969.

[16] Leptin H. Abelsche p-Gruppen und ihre Automorphismengruppen // Math. Z. — 1960. — B. 73. — S. 235—253.

[17] Liebert W. Isomorphic automorphism groups of primary Abelian groups. II // Contemp. Math. — 1989. — Vol. 87. — P. 51—59.

[18] Roizner M. A. Elementary equivalence of the automorphism groups of reduced Abelian p-groups. — 2007. — arXiv:math.GR/1207.1951v1.

[19] Shelah S. Interpreting set theory in the endomorphism semi-group of a free algebra or in the category // Ann. Sci. Univ. Clermont Math. — 1976. — Vol. 13. — P. 1—29.

[20] Tolstykh V. Elementary equivalence of infinite-dimensional classical groups // Ann. Pure Appl. Logic. — 2000. — Vol. 105. — P. 103—156.