Задача о геометрических числах Рамсея

М. В. ТИТОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: 57mashka@mail.ru

УДК 519.154+519.176

Ключевые слова: дистанционный граф, хроматическое число, число Рамсея.

Аннотация

В работе приводится обзор результатов, касающихся задачи о дистанционном числе Рамсея $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,d)$. Эта величина показывает, как часто граф на фиксированном количестве вершин содержит индуцированные подграфы, изоморфные дистанционным графам в пространствах определённых размерностей.

Abstract

M. V. Titova, One problem on geometric Ramsey numbers, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 171—180.

We give an overview of results on the Ramsey distance number $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,d)$. This value shows the frequency of the following event: a graph with a fixed number of vertices has an induced subgraph isomorphic to a distance graph in a space of certain dimension.

1. История задачи

Задача о дистанционных графах впервые возникла в работе [21] известного венгерского математика П. Эрдёша. Среди других фундаментальных проблем комбинаторной геометрии он формулирует задачу о нахождении наибольшего числа единичных расстояний в множестве из n точек на плоскости (см. также [32]).

Напомним определение дистанционного графа.

Определение 1. *Дистанционным графом в d-мерном евклидовом пространстве* называется граф $G=(V,E)$, в котором множество вершин составляют точки пространства $\mathbb{R}^d$ и для которого $\rho(\mathbf{x},\mathbf{y})=a$ для любых $(\mathbf{x},\mathbf{y})\in E$, где a — фиксированное положительное число, ρ — обычная евклидова метрика в $\mathbb{R}^d$.

Везде далее мы полагаем $a=1$. Отметим, что согласно данному определению вершины, отстоящие друг от друга на расстояние 1, не обязательно соединены ребром.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 171—180.

Если использовать понятие дистанционного графа, вопрос, поставленный П. Эрдёшем, будет звучать следующим образом: каково максимальное значение $|E|$ для дистанционных графов $G = (V, E)$ на плоскости при условии, что $|V| = n$?

Среди задач, которые способствовали подъёму интереса к изучению дистанционных графов, также нужно выделить следующие две классические проблемы комбинаторной геометрии: гипотеза Борсука о разбиении множеств на части меньшего диаметра (см. [1, 6, 7, 15]) и проблема Нелсона—Эрдёша—Хадвигера о раскраске метрических пространств (см. [5, 8, 12, 16, 26, 33]). Последняя проблема формулируется так: найти хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$, равное минимальному количеству цветов, в которые можно так раскрасить все точки в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^d$, чтобы между одноцветными точками не было расстояния, равного единице. Иначе говоря,

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min\{\chi\colon \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \ldots \sqcup V_\chi,\ \text{для каждого } i \text{ и любых } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i \text{ выполнено } |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \neq 1\}.$$

Известны следующие асимптотические оценки этой величины (нижняя оценка была получена в работе [4], верхняя — в работе [28]):

$$\big(1{,}239 + o(1)\big)^n \leqslant \chi(\mathbb{R}^d) \leqslant \big(3 + o(1)\big)^n. \tag{1}$$

Также известны, например, оценки на плоскости:

$$4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7.$$

С хроматическим числом $\chi(\mathbb{R}^d)$ естественным образом связано понятие дистанционного графа.

Напомним, что *хроматическим числом графа H* называется величина $\chi(H)$, равная минимальному количеству цветов, которое необходимо для такой раскраски вершин графа H, что любые вершины, соединённые ребром, раскрашены в разные цвета (см. [11]). Для любого дистанционного графа G в $\mathbb{R}^d$ верно неравенство $\chi(G) \leqslant \chi(\mathbb{R}^d)$. Теорема Эрдёша—де Брейна (см. [17]) же утверждает, что если хроматическое число графа конечно, то оно достигается на некотором его конечном подграфе, т. е. $\chi(\mathbb{R}^d) = \chi(H)$ для некоторого конечного дистанционного графа H.

Также интересны следующие исследования, посвящённые дистанционным графам. В 1959 году (см. [22]) П. Эрдёш доказал существование графов со сколь угодно большим хроматическим числом и обхватом (длиной кратчайшего цикла). Позже он развил эту задачу ([23], 1976 год), поставив вопрос: существует ли дистанционный граф на плоскости, имеющий хроматическое число 4 и не содержащий треугольников? Задача была решена уже три года спустя Н. Уормалдом в [34]. В 2000 году П. О'Доннелл доказал существование графа расстояний на плоскости с хроматическим числом 4 и наперёд заданным обхватом (см. [19, 20]). Результат примечателен тем, что ни наличие треугольников, ни присутствие циклов какой-либо малой длины, как оказалось, не является необходимым для того, чтобы граф расстояний на плоскости имел максимальное известное хроматическое число.

Другие результаты, связанные с изучением дистанционных графов, можно найти в [5, 16, 25, 29, 33].

В задаче, которая рассматривается в данной работе, для изучения свойств дистанционных графов используется теория Рамсея (см. [24, 31]). Этот подход был предложен в работе А. М. Райгородского [9], где было введено понятие дистанционного числа Рамсея $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,d)$ (нижний индекс указывает на задачу Нелсона—Эрдёша—Хадвигера) и получены нижние оценки.

Напомним определение классического числа Рамсея и приведём сразу же определение дистанционного числа Рамсея.

Определение 2. *Числом Рамсея* $R(s,t)$ называется такое минимальное натуральное число R, что для любого графа $G=(V,E)$ на R вершинах либо в G содержится s-вершинное независимое множество (т. е. множество вершин, свободное от рёбер), либо в его дополнении $\bar{G}$ до полного графа K_R на R вершинах содержится t-вершинное независимое множество.

Для классического числа Рамсея известны следующие оценки:

$$\frac{\sqrt{2}}{e}\big(1+o(1)\big)s2^{s/2} \leqslant R(s,s) \leqslant e^{-\gamma(\ln^2 s/\ln\ln s)}\cdot 4^s, \quad \gamma>0. \tag{2}$$

Нижнюю оценку можно найти в [14], верхняя получена Конлоном в [18].

Определение 3. *Дистанционным числом Рамсея* $R_{\mathrm{NEH}}(s,t,d)$ называется такое минимальное натуральное $n\in\mathbb{N}$, что для любого графа G с n вершинами верно следующее: либо он содержит индуцированный подграф на s вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^d$, либо его дополнение $\bar{G}$ до полного графа на n вершинах содержит индуцированный подграф на t вершинах, изоморфный некоторому дистанционному графу в $\mathbb{R}^d$.

Далее везде мы рассматриваем только диагональный случай (т. е. $s=t$) с целью уменьшения громоздкости изложения.

Очевидно, что любое независимое множество может быть реализовано в пространстве любой размерности в качестве (пустого) дистанционного графа. Таким образом, дистанционное число Рамсея связано с классическим числом Рамсея следующим очевидным соотношением: $R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d)\leqslant R(s,s)$. Из оценки Конлона и этого неравенства получается верхняя оценка дистанционного числа Рамсея $R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d)$:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d)\leqslant 4^s\, e^{-\gamma(\ln^2 s/\ln\ln s)}, \quad \gamma>0.$$

2. Обзор результатов

Лучшая верхняя оценка была предложена А. М. Райгородским [27].

Теорема 1. *Справедлива оценка*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \leqslant 2\left[\frac{d}{2}\right] R\left(\left\lceil\frac{s}{[d/2]}\right\rceil, \left\lceil\frac{s}{[d/2]}\right\rceil\right) \leqslant 4^{(s/[d/2])(1+o(1))}.$$

В [13] указывается, что можно улучшить оценку теоремы 1:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \leqslant R\left(\left\lceil\frac{s}{[d/2]}\right\rceil, \left\lceil\frac{s}{[d/2]}\right\rceil\right) + 2s.$$

Первые нижние оценки дистанционного числа Рамсея для растущего d были приведены в [9].

Теорема 2. *Выполняется следующее неравенство*:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant R\left(\left[\frac{s}{\chi(\mathbb{R}^d)}\right], \left[\frac{s}{\chi(\mathbb{R}^d)}\right]\right). \tag{3}$$

Теорема 3. *Пусть $s \to \infty$ и $k_0 = k_0(s)$ такое, что*

$$\binom{s}{k_0} 2^{-\binom{k_0}{2}} < 1 < \binom{s}{k_0-1} 2^{-\binom{k_0-1}{2}}.$$

Положим $k_1 = k_0 - 4$. Тогда существует такая функция $\varepsilon(s) = o(1)$, что если для некоторого n выполняется неравенство

$$e\left(2\binom{s}{2}\binom{n}{s-2} + 1\right) e^{-s^2/(2k_1^8)(1+\varepsilon(s))} < 1,$$

то для всех $d \leqslant k_1$ имеем

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant n.$$

Следствиями этих теорем, как указано в той же работе [9], являются следующие оценки дистанционного числа Рамсея.

Следствие 1. *Положим*

$$m = \left[\frac{s}{\chi(\mathbb{R}^d)}\right].$$

Для данных $s, d \in \mathbb{N}$

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) > \frac{\sqrt{2}}{4e}\big(1+o(1)\big)\, m\, 2^{m/2}. \tag{4}$$

Следствие 2. *Пусть $d = O(\ln s)$. Существует такая константа $\gamma > 0$, что выполняется неравенство*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant e^{\gamma s/(\ln^8 s)}. \tag{5}$$

Преимущества этих двух оценок зависят от асимптотического роста $d(s)$. При $d = o(\ln\ln s)$ оценка следствия 1 сильней оценки следствия 2, так как согласно имеющейся верхней оценке (1) хроматического числа

$$\chi(\mathbb{R}^d) < \big(3+o(1)\big)^d = o(\ln s),$$

следовательно,

$$\frac{s}{\ln^8 s} < \frac{s}{\ln s} = o\left(\frac{s}{2\chi(\mathbb{R}^d)}\right)$$

и

$$e^{\gamma\, s/(\ln^8 s)} = o\left(2^{s/(2\chi(\mathbb{R}^d))}\right).$$

В случае же $\ln\ln s = o(d)$ аналогичные неравенства показывают превосходство оценки следствия 2.

Следствие 1 вытекает из теоремы 2 ввиду оценки классического числа Рамсея, полученной при помощи локальной леммы Ловаса (см. [14]).

Теорема 4 (локальная лемма Ловаса). *Пусть $A_1, \ldots, A_n$ — события в произвольном вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Пусть также фиксированы числа $p \in [0,1]$ и $d \leqslant n-1$, причём $ep(d+1) \leqslant 1$. Предположим, что $P(A_i) \leqslant p$ для всех i и для любого i найдётся такое множество событий $S_i \subset \{A_1, \ldots, A_n\} \setminus A_i$, что $|S_i| \leqslant d$ и A_i не зависит от алгебры, порождённой событиями из множества $\{A_1, \ldots, A_n\} \setminus (S_i \cup \{A_i\})$. Тогда имеет место неравенство $P\left(\overline{\bigcup A_i}\right) > 0$, т. е. с положительной вероятностью ни одно из событий не имеет места.*

Следствие 2 получено из этой теоремы при помощи технических вычислений, а доказательство самой теоремы 3 опирается на вероятностный подход, использующий мартингальную технику (см. [14]).

В [10] автором были получены оценки величины $R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d)$ для случаев плоскости и пространства, улучшающие оценки (4) и (5), приведённые в работе [9].

Теорема 5. *Пусть $d = 2$. Имеет место следующее неравенство*:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant \frac{1}{4\sqrt[4]{2}e}\bigl(1+o(1)\bigr)\,k\,2^{k/8}, \tag{6}$$

где

$$k = 4\left[\frac{0{,}917s}{4}\right].$$

Теорема 6. *Пусть $d = 3$. Имеет место следующее неравенство*:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant \frac{1}{8\sqrt[8]{8}e}\bigl(1+o(1)\bigr)\,k\,2^{k/16}, \tag{7}$$

где

$$k = 8\left[\frac{\pi s}{8\cdot 3\sqrt{2}}\right].$$

Сравним эти оценки с оценкой следствия 1, которая сильнее оценки следствия 2 при малых d. Напомним, что $4 \leqslant \chi(\mathbb{R}^2) \leqslant 7$, а также что $6 \leqslant \chi(\mathbb{R}^3) \leqslant 15$ (см., например, [5]).

С учётом этих неравенств, оценки числа Рамсея (2) и того факта, что $[x] \geqslant x-1$, из оценки следствия 1 при $d=2,3$ получаем при $s\to\infty$

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,2) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{e}\bigl(1+o(1)\bigr)s/72^{s/14-1/2} = \frac{1}{7e}\bigl(1+o(1)\bigr)\, s\, 2^{s/14} \tag{8}$$

и

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,3) \geqslant \frac{\sqrt{2}}{e}\bigl(1+o(1)\bigr)\frac{s}{15}2^{s/30-1/2} = \frac{1}{15e}\bigl(1+o(1)\bigr)\, s\, 2^{s/30}. \tag{9}$$

Оценка (6) асимптотически сильнее оценки (8), поскольку в (8) показатель степени двойки имеет вид $s/14 \approx 0{,}0714s$, а в (6) аналогичный показатель равен $0{,}917s/8 \approx 0{,}1146s$. Также неравенство (7) значительно уточняет неравенство (9), ведь $s/30 \approx 0{,}0333s$, а $(\pi s)/(3\sqrt{2}\cdot 16) \approx 0{,}0462s$. При малых s соотношения между полученными результатами могут быть другими, но в данном случае рассматривается только случай $s\to\infty$.

Следующие две теоремы, полученные автором в [10], дали ещё более точные асимптотические оценки.

Теорема 7. *Пусть $d=2$. Существует такая константа $c>0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant 2^{s/2-c\,s^{1/3}\ln s}. \tag{10}$$

Теорема 8. *Пусть $d=3$. Существует такая константа $c>0$, что*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s,s,d) \geqslant 2^{s/2-c\,\beta(s)s^{1/2}\ln s}, \tag{11}$$

где $\beta(s)=2^{\alpha^2(s)}$, а $\alpha(s)$ — обратная функция Аккермана.

В оценках (10) и (11) показатель степени двойки растёт примерно как $s/2$, и это больше, чем $0{,}1146s$ и $0{,}0462s$.

Для получения оценок был снова применён вероятностный метод и локальная лемма Ловаса (теорема 4). Метод удалось применить эффективнее путём анализа свойств дистанционных графов в пространствах малых размерностей. Эти свойства сформулированы в утверждениях, которые будут приведены ниже.

При доказательстве теоремы 5 было использовано следующее утверждение (см. [30]).

Утверждение 1. *В любом дистанционном графе на плоскости, имеющем n вершин, есть четыре независимых множества суммарной мощности не менее $[0{,}917n]$.*

Для теоремы 6 использовалось обобщение этого утверждения на случай трёхмерного пространства.

Утверждение 2. *В любом дистанционном графе в $\mathbb{R}^3$, имеющем n вершин, есть восемь независимых множеств суммарной мощности не менее $\bigl[(\pi n)/(3\sqrt{2})\bigr]$.*

При доказательстве же теорем 7 и 8 использовался тот факт, что на плоскости и в трёхмерном пространстве можно ограничить число рёбер дистанционного графа некоторой функцией числа вершин, о чем говорят следующие два утверждения.

Утверждение 3. *Найдётся такая константа $c_2 > 0$ и такое $n_2 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_2$ и для любого дистанционного графа $G = (V, E)$ на плоскости, имеющего n вершин, $|E| \leqslant c_2 n^{4/3}$.*

Утверждение 4. *Найдётся такая константа $c_3 > 0$ и такое $n_3 \in \mathbb{N}$, что для всех $n > n_3$ и для любого дистанционного графа $G = (V, E)$ в $\mathbb{R}^3$, имеющего n вершин, $|E| \leqslant c_3 \beta(n) n^{3/2}$, где $\beta(n) = 2^{\alpha^2(n)}$, а $\alpha(n)$ — обратная функция Аккермана.*

Несмотря на то, что теоремы 7 и 8 дают значительно лучшие оценки по сравнению с теоремами 5 и 6, они сильнее оценок теорем 5 и 6 только в асимптотике, константа c вряд ли поддаётся конкретизации.

Также следует отметить, что метод, на котором основаны теоремы 7 и 8, в отличие от метода, использованного в теоремах 5 и 6, невозможно использовать ни при каком $d \geqslant 4$. Действительно, в пространствах $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 4$, дистанционные графы не обладают свойствами, аналогичными тем, что описаны в утверждениях 3 и 4. Так, например, уже в $\mathbb{R}^4$ для любого $m \in \mathbb{N}$ можно реализовать как дистанционный граф полный двудольный граф $K_{m,m}$.

Обобщение, а также усовершенствование метода теорем 4 и 5 на случай $3 \leqslant d \leqslant 8$ было сделано М. В. Титовой в [2]: были построены множества без расстояния единица в $\mathbb{R}^d$, $d = 3, \ldots, 8$, которые допускают размещение в $\mathbb{R}^d$ без пересечений 2^d своих копий, полученных в результате некоторых параллельных переносов. В случае $d = 3$ лучшей оценкой осталась оценка теоремы 8, однако в случаях $d = 4, \ldots, 8$ были получены новые нижние оценки.

Теорема 9. *Пусть $d \in \{4, \ldots, 8\}$. Выполняются следующие неравенства*:

$$R_{\mathrm{NEH}}(s, s, d) \geqslant \frac{1}{e \cdot 2^{(2^{d-1}-1)/2^d}} \big(1 + o(1)\big) k 2^{k/2},$$

где

$$k = [c_d s], \ c_4 = 0{,}04413, \ c_5 = 0{,}01833, \ c_6 = 0{,}00806, \ c_7 = 0{,}00352, \ c_8 = 0{,}00165.$$

Лучшие оценки дистанционного числа Рамсея $R_{\mathrm{NEH}}(s, s, d)$ для фиксированного $d \geqslant 4$ мы получили в [3]. Оценки приведены в следующей теореме.

Теорема 10. *Пусть $d \geqslant 4$ и $\gamma > 0$. Тогда существует такое $s_0 = s_0(d, \gamma)$, что при всех $s \geqslant s_0$ выполняется неравенство*

$$R_{\mathrm{NEH}}(s, s, d) \geqslant 2^{(1/(2[d/2]) - \gamma)s}.$$

Теорема 10 значительно усиливает теорему 9. Уже в размерности 4 оценка меняется с $2^{0{,}022\ldots s}$ на $2^{s/4}$. Также теорема 10 обобщает теоремы 7 и 8: если в оценку из теоремы 10 формально подставить $d = 2$ или $d = 3$, то её результат согласован с утверждениями теорем 7 и 8. Правда, в теоремах 7 и 8, в отличие от теоремы 10, зависимость величины γ от s указана явно.

Доказательство теоремы снова использует вероятностный метод. Удаётся доказать теорему о том, что число клик определённого размера в дистанционных графах в $\mathbb{R}^d$ ограничено сверху в зависимости от числа вершин и размера клики. На эту теорему теперь опирается использование локальной леммы Ловаса.

Обозначим $\mathrm{Cl}(G,r)$ множество r-клик в графе G и положим $\mathrm{cl}(G,r) = |\mathrm{Cl}(G,r)|$.

Теорема 11. *Для любого d существует такое $\varepsilon > 0$ и такое $n_0 \in \mathbb{N}$, что для всякого дистанционного графа G в $\mathbb{R}^d$ на $n \geqslant n_0$ вершинах*

$$\mathrm{cl}\left(G, \left[\frac{d}{2}\right] + 1\right) \leqslant n^{[d/2]+1-\varepsilon}.$$

Но для получения хорошей новой оценки этого ещё недостаточно, и вероятностные технологии снова используются уже внутри структуры локальной леммы.

Результаты теорем 5—10 существенно улучшают оценки, предложенные в [9]. Однако теорема 10 доказана только в случае фиксированного d. Возможно, методы теоремы 9 могут быть перенесены на случай медленно растущего d, однако есть много препятствий. Работа [9] все ещё предлагает лучшие результаты при $d \ll \log s$.

Таким образом, при фиксированном d задача теперь в некотором смысле полностью решена. Найденная нижняя оценка дистанционного числа Рамсея отличается от его верхней оценки из теоремы 1 практически так же, как нижняя оценка обычного числа Рамсея отличается от его верхней оценки: грубо говоря, из последних двух оценок нужно извлечь корень степени $[d/2]$ и получатся оценки теоремы 10.

Литература

[1] Болтянский В. Г., Гохберг И. Ц. Теоремы и задачи комбинаторной геометрии. — М.: Наука, 1965.

[2] Купавский А. Б., Райгородский А. М., Титова М. В. О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 1. — С. 111—121.

[3] Купавский А. Б., Титова М. В. Дистанционные числа Рамсея // Докл. РАН. — 2013. — Т. 449, № 3. — С. 267—270.

[4] Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 2. — С. 147—148.

[5] Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств // Успехи мат. наук. — 2001. — Т. 56, № 1. — С. 107—146.

[6] Райгородский А. М. Проблема Борсука. — М.: МЦНМО, 2006.

[7] Райгородский А. М. Вокруг гипотезы Борсука // СМФН. — 2007. — Т. 23. — С. 147—164.

[8] Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.

[9] Райгородский А. М. Об одной серии задач рамсеевского типа в комбинаторной геометрии // Докл. РАН. — 2007. — Т. 413, № 2. — С. 171—173.

[10] Райгородский А. М., Титова М. В. О дистанционных подграфах графов в пространствах малых размерностей // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и её прил. — 2011. — Т. 20. — С. 75—83.

[11] Харари Ф. Теория графов. — М.: Мир, 1973.

[12] Agarwal P. K., Pach J. Combinatorial Geometry. — Wiley–Interscience, 1995. — (Wiley–Interscience Ser. Discrete Math. Optimization).

[13] Alon N., Kupavskii A. Two notions of unit distance graphs. — To be submitted.

[14] Alon N., Spencer J. H. The Probabilistic Method. — New York: Wiley, 2000.

[15] Boltyanski V. G., Martini H., Soltan P. S. Excursions into Combinatorial Geometry. — Berlin: Springer, 1997.

[16] Brass P., Moser W., Pach J. Research Problems in Discrete Geometry. — New York: Springer, 2005.

[17] De Bruijn N. G., Erdős P. A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch., Ser. A. — 1951. — Vol. 54, no. 5. — P. 371—373.

[18] Conlon D. A new upper bound for diagonal Ramsey numbers // Ann. Math. — 2009. — Vol. 170. — P. 941—960.

[19] O'Donnell P. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. I. Graph embedding // Geombinatorics. — 2000. — Vol. 9. — P. 180—193.

[20] O'Donnell P. Arbitrary girth, 4-chromatic unit distance graphs in the plane. II. Graph description // Geombinatorics. — 2000. — Vol. 9. — P. 145—152.

[21] Erdős P. On a set of distances of n points // Am. Math. Mon. — 1946. — Vol. 53. — P. 248—250.

[22] Erdős P. Graph theory and probability // Can. J. Math. — 1959. — Vol. 11. — P. 34—38.

[23] Erdős P. Unsolved problems // Proc. Fifth Brit. Comb. Conf. (Univ. Aberdeen, Aberdeen, 1975). — Winnipeg: Util. Math. Publ., 1976.

[24] Graham R. L., Rothschild B. L., Spencer J. H. Ramsey Theory. — New York: Wiley, 1990.

[25] Hadwiger H. Ein Überdeckungssatz für den Euklidischen Raum // Portugal. Math. — 1944. — Vol. 4. — P. 140—144.

[26] Klee V., Wagon S. Old and New Unsolved Problems in Plane Geometry and Number Theory. — Math. Ass. America, 1991.

[27] Kupavskii A., Raigorodskii A., Titova M. New bounds for distance Ramsey numbers. — Submitted.

[28] Larman D. G., Rogers C. A. The realization of distances within sets in Euclidean space // Mathematika. — 1972. — Vol. 19. — P. 1—24.

[29] Raigorodskii A. M. Coloring distance graphs and graphs of diameters // Thirty Essays on Geometric Graph Theory / J. Pach, ed. — Berlin: Springer, 2013. — P. 429—460.

[30] Raigorodskii A. M., Kokotkin A. A. On large subgraphs of distance graphs having small chromatic number // Abstracts of the Talks at the Int. Conf. «Fete of Combinatorics and Computer Science», Keszthely, Hungary, August, 2008.

[31] Ramsey F. P. On a problem of formal logic // Proc. London Math. Soc. Ser. 2. — 1930. — Vol. 30. — P. 264—286.

[32] Spencer J., Szemerédi E., Trotter W. T. Unit distances in the Euclidean plane // Graph Theory and Combinatorics / B. Bollobás, ed. — London: Academic Press, 1984. — P. 293—303.

[33] Székely L.A. Erdős on unit distances and the Szemerédi—Trotter theorems // Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Ser. Budapest, J. Bolyai Math. Soc. — 2002. — Vol. 11. — P. 649—666.

[34] Wormald N. A 4-chromatic graph with a special plane drawing // Austral. Math. Soc., Ser. A. — 1979. — Vol. 28. — P. 1—8.