

Эндоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ над частично упорядоченным коммутативным кольцом без делителей нуля с $1/2$

О. И. ЦАРЬКОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: oleg_tsarkov@pochta.ru

УДК 512.55+512.64

Ключевые слова: целостные кольца, упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, эндоморфизмы.

Аннотация

Пусть R — частично упорядоченное коммутативное кольцо без делителей нуля с $1/2$, $G_n(R)$ — подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами. В работе описаны эндоморфизмы данной полугруппы при $n = 2$.

Abstract

O. I. Tsarkov, Endomorphisms of the semigroup $G_2(R)$ over partially ordered commutative rings without zero divisors and with $1/2$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 1, pp. 181–204.

Let R be a partially ordered commutative ring without zero divisors and with $1/2$. Let $G_n(R)$ be the subsemigroup of $GL_n(R)$ consisting of matrices with nonnegative elements. In the paper, we describe endomorphisms of this semigroup for $n = 2$.

1. Введение

В данной работе мы классифицируем эндоморфизмы полугруппы $GE_2^+(R)$, которая состоит из неотрицательных матриц с элементами из упорядоченного кольца R , причём все матрицы этой полугруппы в некотором смысле порождаются общеизвестными матрицами, действие эндоморфизма на которых легче рассматривать. При этом известно, что некоторые типы эндоморфизмов $GE_n^+(R)$ продолжаются до полугруппы $G_n(R)$, состоящей из всех неотрицательных матриц, что позволяет понять, какие в принципе эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, помимо тривиальных, существуют.

Существование некоторых эндоморфизмов $G_n(R)$ очевидно. Такие эндоморфизмы называются стандартными, они являются композициями эндоморфизмов следующих типов:

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 1, с. 181–204.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

- внутреннего $X \mapsto A \cdot X \cdot A^{-1}$ при $A, A^{-1} \in G_n(R)$;
- полукольцевого $X = (a_{ij}) \mapsto (\varphi(a_{ij}))$, где φ — эндоморфизм R_+ ;
- центрального $X \mapsto \lambda(X) \cdot X$ при $\lambda(X): G_n(R) \rightarrow R_+$.

Первоначальная постановка задачи касалась автоморфизмов рассматриваемых полугрупп, а не их эндоморфизмов.

В ряде работ было дано описание всех автоморфизмов $G_n(R)$ (или их вида на полугруппе $GE_n^+(R)$) для некоторых видов колец R и их упорядочений.

В [6] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы (а также антиавтоморфизмы) полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geq 2$. В [2] дано описание всех автоморфизмов полугруппы $G_n(R)$ (на полугруппе $GE_n^+(R)$), если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$. В [3] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы полугруппы из работы [2] были элементарно эквивалентны. В [4] Е. И. Бунина и П. П. Семёнов описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка больше 2 над коммутативными частично упорядоченными кольцами с $1/2$, а в [5] нашли необходимые и достаточные условия для их элементарной эквивалентности. В [1] дано описание автоморфизмов полугруппы $G_2(R)$ при условии, что R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с $1/2$, порождаемое своими обратимыми элементами.

Во всех перечисленных выше работах было существенно, что в кольце R обратима двойка или хотя бы какое-то целое число.

В [7] П. П. Семёнов описал автоморфизмы полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ при $n \geq 2$, а в [8] — эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, $n \geq 3$, в случае, когда R — линейно упорядоченное кольцо с $1/2$.

В данной работе рассматриваются эндоморфизмы в случае $n = 2$ для частично упорядоченного коммутативного кольца R без делителей нуля с обратимой двойкой.

2. Определения основных понятий

Обозначение. Пусть R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, причём мы дополнительно предполагаем, что

- если $a \in R_+^*$, то $a^{-1} \in R_+^*$;
- $1 > 0$.

Определение 1. Пусть P — подполугруппа в $G_n(R)$, порождённая

- диагональными обратимыми неотрицательными матрицами;
- неотрицательными матрицами элементарных преобразований, т. е. матрицами $B_{i,j} = E + \lambda \cdot E_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \dots, n$, $i < j$, $\lambda \in R_+$;
- матрицами перестановок $S_\sigma := (\delta_{i,\sigma(i)})$, $\sigma \in S_n$.

Определение 2. Через $G_n(R)$ обозначим подполугруппу $GL_n(R)$, состоящую из матриц с элементами из R_+ .

Замечание. Очевидно, $\mathbf{P} \subset G_n(R)$, так как порождающие элементы $\mathbf{P}$ принадлежат $G_n(R)$.

Определение 3. Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются $\mathcal{P}$ -эквивалентными, если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, 1, \dots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \bar{P}_i, Q_i, \bar{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, 1, \dots, k$, такие что $P_i A_i \bar{P}_i = Q_i A_{i+1} \bar{Q}_i$ для каждого i .

Определение 4. Через $GE_+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_n(R)$, порождаемую всеми матрицами, $\mathcal{P}$ -эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Замечание. Стоит заметить, что в некоторых частных случаях подполугруппы $G_n(R)$ и $GE_+(R)$ могут совпадать друг с другом, что в свою очередь означает, что соответствующие результаты переносятся на результаты о классификации автоморфизмов или эндоморфизмов для $G_n(R)$. Например, это верно, если R является телом или даже кольцом многочленов с конечным числом переменных над телом, что каждый может легко проверить.

3. Вспомогательные утверждения

Определение 5. Пусть $\Gamma_2(R)$ — подгруппа матриц из $G_2(R)$, обратимых в $G_2(R)$.

Лемма 1. Группа $\Gamma_2(R)$ состоит из мономиальных матриц, т. е. матриц, представимых в виде $S_\sigma D$.

Доказательство. Пусть

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix} = E_2.$$

Тогда получаем соотношения

$$\begin{cases} a_1 b_2 = 0, \\ b_1 d_2 = 0, \\ c_1 a_2 = 0, \\ d_1 c_2 = 0. \end{cases}$$

Три элемента в одной матрице не могут быть равны нулю, так что два элемента в одной и два элемента в другой равны нулю, что и требовалось доказать. $\square$

Пусть Φ — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$.

Лемма 2. Пусть $\Phi(B_{1,2}(1)) = E_2$. Тогда $\Phi(B_{2,1}(1)) = E_2$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(B_{2,1}(1)) &= \Phi(S_{(12)} B_{1,2}(1) S_{(12)}) = \\ &= \Phi(S_{(12)}) \cdot \Phi(B_{1,2}(1)) \cdot \Phi(S_{(12)}) = \Phi(S_{(12)}) \cdot \Phi(S_{(12)}^{-1}) = E_2. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 3. Если $\Phi(\text{diag}[1, 2]) = \lambda E_2$ или $\Phi(\text{diag}[2, 1]) = \lambda E_2$, то $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$.

Доказательство. Пусть $\Phi(\text{diag}[1, 2]) = \lambda E_2$. Тогда

$$\begin{aligned}\Phi(B_{1,2}(1)) &= \Phi(\text{diag}[1, 2]) \cdot \Phi(B_{1,2}(1)) \cdot \Phi\left(\text{diag}\left[1, \frac{1}{2}\right]\right) = \\ &= \Phi(B_{1,2}(2)) = \Phi(B_{1,2}^2(1)) = \Phi^2(B_{1,2}(1)).\end{aligned}$$

Поскольку $\Phi(B_{1,2}(1))$ обратима в $\text{GL}_2(R)$, имеем $\Phi(B_{1,2}(1)) = E_2$, откуда по лемме 2 следует требуемое.

Случай $\Phi(\text{diag}[2, 1]) = \lambda E_2$ разбирается аналогично. $\square$

Лемма 4. В частично упорядоченном кольце без делителей нуля из того, что $a^n = b^n$ и $a, b \in R_+$, следует, что $a = b$, т. е. корень n -й степени из положительных элементов кольца извлекается единственным образом, если извлекается.

Доказательство. Доказательство представляет собой очевидную цепочку выкладок:

$$a^n - b^n = 0 \implies (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + b^{n-1}) = 0 \implies \begin{cases} a - b = 0 \\ a^{n-1} + \dots + b^{n-1} = 0. \end{cases}$$

Равенство $a^{n-1} + \dots + b^{n-1} = 0$ не может выполняться ввиду положительности a, b . Значит, $a = b$, что и требовалось. $\square$

Замечание. В частности, получаем, что корень квадратный из положительных элементов кольца извлекается однозначно, если извлекается.

Обозначение. Для всех $s \in R_+^*$ обозначим через P_s матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ s^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Лемма 5. Пусть $A \in G_2(R)$ и $A^n = E_2$. Тогда A — это E_2 или P_s , причём образ может быть равен P_s только в случае чётного n .

Доказательство. Очевидно, $A \in G_2(R)$, так как обратная матрица A^{n-1} имеет неотрицательные коэффициенты. Тогда по лемме 1 $A = S_\sigma D$.

Если $\sigma = e$, то $A = \text{diag}[a, b]$, причём $a^n = 1 = b^n$. По лемме 4 получаем, что $a = b = 1$, значит, $A = E_2$.

Пусть $\sigma = (1\ 2)$. Тогда $A = S_{(12)} \text{diag}[a, b]$ и n не может быть нечётным, иначе n -я степень этой матрицы не будет диагональной. Получаем, что $(ab)^{n/2} = 1$, т. е. $ab = 1$. Отсюда и следует, что $\Phi(S_{(12)}) = P_b$.

Все случаи разобраны, лемма доказана. $\square$

Лемма 6. Если $\Phi(\text{diag}[1, 2]) = \lambda S_{(12)}$ или $\Phi(\text{diag}[2, 1]) = \lambda S_{(12)}$, то $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$.

Доказательство. Разберём случай $\Phi(\text{diag}[2, 1]) = \lambda S_{(12)}$ (второй случай рассматривается аналогично). Заметим, что

$$\begin{aligned}\Phi(B_{1,2}(1)) &= S_{(12)}\Phi(\text{diag}[2, 1])\Phi(B_{1,2}(1))\Phi\left(\text{diag}\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right)S_{(12)} = \\ &= S_{(12)}\Phi(B_{1,2}^2(1))S_{(12)} = S_{(12)}\Phi^2(B_{1,2}(1))S_{(12)}.\end{aligned}$$

Подставим это равенство само в себя:

$$\begin{aligned}\Phi(B_{1,2}(1)) &= S_{(12)}\Phi^2(B_{1,2}(1))S_{(12)} = \\ &= S_{(12)}(S_{(12)}\Phi^2(B_{1,2}(1))S_{(12)})^2S_{(12)} = \Phi^4(B_{1,2}(1)).\end{aligned}$$

Из обратимости $\Phi(B_{1,2}(1))$ в группе $\text{GL}_2(R)$ получаем, что $E_2 = \Phi^3(B_{1,2}(1))$, откуда по лемме 5 следует, что $\Phi(B_{1,2}(1)) = E_2$. $\square$

Лемма 7. Пусть $\Phi(S_{(12)}) = E_2$. Тогда $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$.

Доказательство. Заметим, что

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \Phi(S_{(12)}B_{2,1}(x)S_{(12)}) = \Phi(B_{2,1}(x)) \quad \text{для всех } x \in R_+.$$

Пусть $\Phi(B_{1,2}(x)) = A_x = \Phi(B_{2,1}(x))$. Имеем следующие равенства матриц:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} =: X, \quad (1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} =: Y, \quad (2)$$

$$XY = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B_{2,1}(1). \quad (3)$$

Из (1) следует, что

$$\Phi(X)A_{1/2} = \Phi\left(XB_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \Phi(B_{1,2}(1)B_{2,1}(1)) = A_1^2 = A_{1/2}^4,$$

значит,

$$\Phi(X) = A_{1/2}^3.$$

Из (2) следует, что

$$A_{1/2}\Phi(Y) = \Phi\left(B_{1,2}\left(\frac{1}{2}\right)Y\right) = \Phi(B_{2,1}(1)B_{1,2}(1)) = A_1^2 = A_{1/2}^4,$$

значит,

$$\Phi(Y) = A_{1/2}^3.$$

Из (3) следует, что

$$A_1^3 = A_{1/2}^6 = \Phi(XY) = \Phi(B_{2,1}(1)) = A_1,$$

значит,

$$A_1^2 = E_2.$$

Ясно, что $A_{1/2}^2 = A_1$, значит, $A_{1/2}^4 = E_2$. Тогда по лемме 5 имеем два случая: $A_{1/2} = S_{(12)}$ и $A_{1/2} = P_s$. В обоих случаях $A_1 = A_{1/2}^2 = E_2$, что и требовалось доказать. $\square$

Определение 6. Пусть Φ_s — сопряжение с матрицей

$$\begin{pmatrix} 0 & s \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

и Φ'_s — сопряжение с матрицей $\text{diag}[1, s]$ для некоторого $s \in R_+^*$:

$$\begin{aligned} \Phi_s \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} d & cs \\ bs^{-1} & a \end{pmatrix}, \\ \Phi'_s \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right) &= \begin{pmatrix} a & bs^{-1} \\ cs & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Лемма 8. Рассмотрим диагональные и псевдодиагональные матрицы с элементами из R_+^* . Диагональная матрица коммутирует с псевдодиагональной тогда и только тогда, когда диагональная матрица скалярна. Две псевдодиагональные матрицы коммутируют тогда и только тогда, когда отношение элементов в них одинаково.

Доказательство. Докажем сначала первое утверждение:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & ac \\ bd & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & cb \\ ad & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ac = bc, \\ bd = ad, \end{cases} \Rightarrow a = b. \end{aligned}$$

Теперь докажем второе утверждение:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} \Rightarrow ad = bc \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{d}. \quad \square \end{aligned}$$

Лемма 9. Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) \neq E_2$. Тогда $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$ с точностью до рассмотрения вместо эндоморфизма Φ его композиции с сопряжением. Кроме того, образы диагональных матриц D являются диагональными с определителем, полученным из определителя D применением некоторого эндоморфизма ψ группы $(R_+^*, \cdot)$.

Замечание. Тот факт, что диагональные матрицы переходят в диагональные, не изменяется при сопряжении.

Доказательство. По лемме 7 $\Phi(S_{(12)}) \neq E_2$. Матрица $\Phi(S_{(12)})$ в квадрате даёт единичную, поэтому по лемме 5 она либо единичная, либо P_s . Получаем, что $\Phi(S_{(12)}) = P_s$.

Если рассмотреть вместо эндоморфизма Φ его композицию с сопряжением $\Phi_{s^{-1}}$, получим

$$\Phi(S_{(12)}) = P_1 = S_{(12)}.$$

Заметим также, что условие $\Phi(B_{i,j}(1)) \neq E_2$ сохраняется при рассмотрении вместо Φ его композиции с Φ_{s-1} .

Ясно, что все диагональные матрицы переходят в матрицы из $\Gamma_2(R)$, т. е. в диагональные или псевдодиагональные.

Предположим, что хотя бы одна диагональная матрица переходит в псевдодиагональную. Заметим, что образы всех диагональных матриц коммутируют. Тогда по лемме 8 получаем, что диагональные матрицы отображаются либо в скалярные, либо в псевдодиагональные с каким-то фиксированным отношением элементов $k \in R_+^*$. Пусть для каких-то $a, b \in R_+^*$

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & ak \\ a & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда сопряжением с матрицей $S_{(12)}$ (которая переходит в себя) получим

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} b & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 0 & a \\ ak & 0 \end{pmatrix},$$

откуда следует, что $k = 1$, так как отношение «верхнего» элемента псевдодиагонального образа диагональной матрицы к «нижнему» должно быть k . Получается, что образы всех диагональных матриц скалярны или псевдоскалярны, чего не может быть по леммам 3 и 6 для матрицы $\text{diag}[2, 1]$ ввиду выполнения условия $\Phi(B_{1,2}(1)) \neq E_2$. Получаем противоречие, что и доказывает требуемое. $\square$

Лемма 10. Для любого $x \in R_+$ матрица $\Phi(B_{1,2}(x))$ имеет единичный определитель.

Доказательство. Рассмотрим соотношение, верное для любого $x \in R_+$:

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2.$$

Применим к нему эндоморфизм Φ и получим

$$\Phi(B_{1,2}(x)) \Phi \left(\text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) = \Phi \left(\text{diag} \left[\frac{1}{2}, 1 \right] \right) \Phi^2(B_{1,2}(x)).$$

Отсюда ясно, что определитель матрицы $\Phi(B_{1,2}(x))$ равен 1, что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 11. Пусть найдутся $x, y \in R_+ \setminus \{0\}$, такие что $\Phi(B_{1,2}(x)) = B_{1,2}(y)$. Тогда для любого $z \in R_+$ верно, что $\Phi(B_{1,2}(z)) = B_{1,2}(b(z))$, где b — некоторое отображение $R_+ \rightarrow R_+$.

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \Phi(B_{1,2}(z)) \Phi(B_{1,2}(x)) &= \Phi(B_{1,2}(x)) \Phi(B_{1,2}(z)) \implies \\ \implies \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \implies \\ \implies \begin{pmatrix} a & ay + b \\ c & cy + d \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a + yc & b + yd \\ c & d \end{pmatrix} \implies \begin{cases} a = a + yc, \\ ay + b = b + yd. \end{cases} \end{aligned}$$

При $y \neq 0$ получаем, что $c = 0$ и $a = d$, т. е.

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}.$$

По лемме 10 $a^2 = 1$. По лемме 4 получаем, что $a = 1$. Значит,

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

что и требовалось доказать. $\square$

Лемма 12. Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) \neq E_2$. Тогда существует такой эндоморфизм b группы $(R_+, +)$, что верно одно из трёх свойств:

- 1) $\Phi(B_{1,2}(x)) = B_{1,2}(b(x))$ и $\Phi(B_{2,1}(x)) = B_{2,1}(b(x))$;
- 2) первым свойством обладает не Φ , а его композиция с Φ_s ;
- 3) первым свойством обладает не Φ , а его композиция с $\Phi'_s = \Phi_{S_{(12)}} \Phi_s$.

Замечание. Возможно, существуют $x, y \in R_+$, такие что $b(xy) \neq b(x)b(y)$, т. е. b не обязан быть эндоморфизмом кольца R_+ .

Доказательство. По лемме 9 можно считать, что $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$ с точностью до композиции Φ_s .

Пусть $x \in R_+^*$ и

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \Phi(\text{diag}[x, 1] B_{1,2}(1) \text{diag}[x^{-1}, 1]).$$

По лемме 9 имеем

$$\Phi(\text{diag}[x, 1]) = \text{diag}[d_1, d_2],$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(1) & b(1) \cdot d_1 d_2^{-1} \\ c(1) \cdot d_2 d_1^{-1} & d(1) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(1) & b(1) \\ c(1) & d(1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} a(1) & b(1) \\ c(1) & d(1) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(x) & b(x) \\ c(x) & d(x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a^2(1) + b(1)c(1)d_1 d_2^{-1} & a(1)b(1) + b(1)d(1)d_1 d_2^{-1} \\ c(1)a(1)d_2 d_1^{-1} + c(1)d(1) & c(1)b(1)d_2 d_1^{-1} + d^2(1) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} a^2(1) + b(1)c(1)d_2 d_1^{-1} & a(1)b(1)d_1 d_2^{-1} + b(1)d(1) \\ c(1)a(1) + c(1)d(1)d_2 d_1^{-1} & c(1)b(1)d_1 d_2^{-1} + d^2(1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Можно было выбрать $x = 2$, и тогда $\text{diag}[2, 1]$ была бы не скалярной матрицей по лемме 3, т. е. $d_1 \neq d_2$ и $d_1 d_2^{-1} \neq 1 \neq d_2 d_1^{-1}$.

Из равенств матриц выше получаем, что

$$\begin{aligned} b(1)c(1)d_1d_2^{-1} &= b(1)c(1)d_2d_1^{-1} \implies \\ \implies b(1)c(1)(1 - d_2^2d_1^{-2}) &= 0 \implies b(1)c(1) = 0 \implies \begin{cases} b(1) = 0, \\ c(1) = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

ввиду отсутствия делителей нуля. Также

$$\begin{aligned} a(1)b(1) + b(1)d(1)d_1d_2^{-1} &= a(1)b(1)d_1d_2^{-1} + b(1)d(1) \implies \\ \implies (a(1)b(1) - b(1)d(1))(1 - d_1d_2^{-1}) &= 0 \implies \\ \implies a(1)b(1) = b(1)d(1) \implies \begin{cases} a(1) = d(1), \\ b(1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} c(1)a(1)d_2d_1^{-1} + c(1)d(1) &= c(1)a(1) + c(1)d(1)d_2d_1^{-1} \implies \\ \implies c(1)a(1) = c(1)d(1) \implies \begin{cases} a(1) = d(1), \\ c(1) = 0. \end{cases} \end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{cases} \Phi(B_{1,2}(1)) = \text{diag}[a(1), d(1)], \\ \Phi(B_{1,2}(1)) = \lambda B_{1,2}(\lambda^{-1}b(1)), \\ \Phi(B_{1,2}(1)) = \lambda B_{2,1}(\lambda^{-1}c(1)). \end{cases}$$

Воспользуемся дополнительными соображениями:

$$\Phi(B_{1,2}^2(1)) = \Phi\left(\text{diag}[2, 1]B_{1,2}(1)\text{diag}\left[\frac{1}{2}, 1\right]\right).$$

Отсюда следует, что

$$\begin{pmatrix} a^2(1) + b(1)c(1) & a(1)b(1) + b(1)d(1) \\ a(1)c(1) + c(1)d(1) & b(1)c(1) + d^2(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(1) & b(1) \cdot d_1d_2^{-1} \\ c(1) \cdot d_2d_1^{-1} & d(1) \end{pmatrix}.$$

Сравнивая матрицы поэлементно, получаем

$$a^2(1) + b(1)c(1) = a(1) \implies a^2(1) = a(1) \implies a(1)(a(1) - 1) = 0,$$

но $a(1)$ не может быть равно нулю, иначе образ $B_{1,2}(1)$ вырожден. Значит, $a(1) = 1$. Аналогично получаем

$$b(1)c(1) + d^2(1) = d(1) \implies d(1) = 1.$$

Дополнительно имеем

$$\begin{cases} a(1)b(1) + b(1)d(1) = b(1) \cdot d_1d_2^{-1}, \\ a(1)c(1) + c(1)d(1) = c(1) \cdot d_2d_1^{-1} \end{cases} \implies \begin{cases} 2b(1) = b(1) \cdot d_1d_2^{-1}, \\ 2c(1) = c(1) \cdot d_2d_1^{-1}. \end{cases}$$

Ясно, что $d_1 d_2^{-1}$ и $d_2 d_1^{-1}$ не могут равняться двойке одновременно, значит, одно из значений $b(1)$, $c(1)$ точно равняется нулю.

Из всего вышеизложенного и из условия леммы следует, что

$$\begin{cases} \Phi(B_{1,2}(1)) = B_{1,2}(b(1)), \\ \Phi(B_{1,2}(1)) = B_{2,1}(c(1)). \end{cases}$$

Мы рассматриваем такое отображение Φ , что $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$. Если $\Phi(B_{1,2}(1)) = B_{2,1}(c(1))$, то можно рассмотреть вместо Φ его композицию с $\Phi_{S_{(12)}}$. Формулировка леммы остаётся неизменной при таком рассмотрении, поэтому можно считать, что $\Phi(B_{1,2}(1)) = B_{1,2}(b(1))$.

Теперь рассмотрим $\Phi(B_{1,2}(x))$. Дано, что $\Phi(B_{1,2}(1)) = B_{1,2}(b(1))$, причём $b(1) \neq 0$, иначе будет единичный образ, что противоречит условию леммы. Тогда по лемме 11 получаем, что матрицы элементарных преобразований $B_{1,2}(x)$ отображаются в матрицы элементарных преобразований $B_{1,2}(b(x))$. Ясно, что $b(x+y) = b(x) + b(y)$, что следует из того, что $\Phi(B_{1,2}(x+y)) = \Phi(B_{1,2}(x)) \cdot \Phi(B_{1,2}(y))$. Из того, что $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$, очевидно следует, что $\Phi(B_{2,1}(x)) = B_{2,1}(b(x))$. $\square$

Лемма 13. Пусть G — группа, а H — такое её подмножество, что

- 1) $xy \in H$ и $yx \in H$ для всех $x \in H$ и $y \in G \setminus H$;
- 2) $xy \notin H$ для всех $x \in H$ и $y \in H$;
- 3) $xy \notin H$ для всех $x \in G \setminus H$ и $y \in G \setminus H$.

Эти свойства выполняются тогда и только тогда, когда H — смежный класс некоторой подгруппы индекса 2 в G , не совпадающий с этой подгруппой.

Доказательство. Пусть выполняются три указанных свойства. Рассмотрим любой элемент $a \in H$ и докажем, что $a^{-1}H$ — подгруппа в G .

Очевидно, что $e \notin H$, иначе соотношения $e \cdot e = e$ и $e \in H$ противоречили бы свойству 2). Тогда $a^{-1} \in H$, иначе равенство $a \cdot a^{-1} = e$ противоречило бы свойству 1). Произведение нечётного числа элементов из H попадает снова в H , поэтому $a^{-1}h_1 a^{-1}h_2 a \in H$ для всех $h_1, h_2 \in H$, следовательно, $a^{-1}h_1 a^{-1}h_2 \in a^{-1}H$ для всех $h_1, h_2 \in H$. Это доказывает замкнутость $a^{-1}H$ относительно умножения. Докажем замкнутость относительно взятия обратного.

Пусть $b \in H$. Тогда $b^{-1} \in H$, т. е. $b^{-1}a \in a^{-1}H$. Значит, всегда есть обратный к $a^{-1}b$ внутри $a^{-1}H$.

Если какой-то элемент не лежит в H , то при умножении на a он будет лежать в H , т. е. он лежал в $a^{-1}H$. Отсюда получаем, что $G = H \cup a^{-1}H$, т. е. $a^{-1}H$ — подгруппа индекса 2.

Обратная импликация очевидна. $\square$

Обозначение. Пусть H — смежный класс подгруппы в G индекса 2. Введём гомоморфизм $\text{sgn}_H: G \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +)$, такой что

$$\text{sgn}_H(g) = \begin{cases} 1, & g \in H, \\ 0, & g \notin H. \end{cases}$$

Замечание. Для sgn_H выполняются стандартные свойства знака при умножении элементов:

- произведение двух элементов одного знака положительно;
- произведение двух элементов разных знаков отрицательно.

4. Классификация эндоморфизмов

Лемма 14. Пусть эндоморфизм Φ таков, что

- 1) $\Phi(B_{1,2}(1)) \neq E_2$;
- 2) $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$;
- 3) $\Phi(B_{1,2}(x)) = \Phi(B_{1,2}(b(x)))$, где b — произвольная функция $R_+ \rightarrow R_+$;
- 4) Φ отображает диагональные матрицы в диагональные.

Тогда ограничение b на R_+^* является эндоморфизмом и $b(1) = 1$.

Доказательство. Очевидно, что b — аддитивное отображение на всем R_+ . Рассмотрим следующее равенство для $a \in R_+^*$:

$$\begin{aligned} B_{2,1}(a-1) \cdot B_{1,2}(1) \cdot B_{2,1}\left(-\frac{a-1}{a}\right) B_{1,2}(-a) &= \text{diag}\left[\frac{1}{a}, a\right] \iff \\ \iff B_{2,1}(a) \cdot B_{1,2}(1) \cdot B_{2,1}\left(\frac{1}{a}\right) &= B_{2,1}(1) \cdot \text{diag}\left[\frac{1}{a}, a\right] \cdot B_{1,2}(a) \cdot B_{2,1}(1). \end{aligned}$$

Применяя к нему Φ , получим

$$\begin{aligned} B_{2,1}(b(a)) \cdot B_{1,2}(b(1)) \cdot B_{2,1}\left(b\left(\frac{1}{a}\right)\right) &= \\ = B_{2,1}(b(1)) \cdot \Phi\left(\text{diag}\left[\frac{1}{a}, a\right]\right) \cdot B_{1,2}(b(a)) \cdot B_{2,1}(b(1)) &\implies \\ \implies \Phi\left(\text{diag}\left[\frac{1}{a}, a\right]\right) &= \\ = B_{2,1}(b(a) - b(1)) \cdot B_{1,2}(b(1)) \cdot B_{2,1}\left(b\left(\frac{1}{a}\right) - b(1)\right) \cdot B_{1,2}(-b(a)). \end{aligned}$$

Значит,

$$B_{2,1}(b(a) - b(1)) \cdot B_{1,2}(b(1)) \cdot B_{2,1}\left(b\left(\frac{1}{a}\right) - b(1)\right) \cdot B_{1,2}(-b(a)) -$$

диагональная матрица, так как по условию леммы диагональные матрицы переходят в диагональные. Вычислим эту матрицу:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(a) - b(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b(1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(1/a) - b(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \\ = \begin{pmatrix} 1 & b(1) \\ b(a) - b(1) & b(a)b(1) - b^2(1) + 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b(1/a) - b(1) & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -b(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{pmatrix} 1 + b(1)b(1/a) - b^2(1) & b(1) \\ b(a) - b(1) + b(1/a)b(a)b(1) - b(1/a)b^2(1) + & b(a)b(1) - b^2(1) + 1 \\ + b(1/a) - b(a)b^2(1) + b^3(1) - b(1) & \end{pmatrix} \times \\
&\times \begin{pmatrix} 1 & -b(a) \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} 1 + b(1)b(1/a) - b^2(1) & b(1)(1 - b(a)b(1/a)) + (b^2(1) - 1)b(a) \\ b(1)(b(1/a)b(a) - 1) + & -b(a)(b(1)(b(1/a)b(a) - 1) + \\ + (b^2(1) - 1) \times & + (b^2(1) - 1)(b(1) - b(1/a) - b(a))) + \\ \times (b(1) - b(1/a) - b(a)) & + b(a)b(1) - b^2(1) + 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Матрица диагональна, поэтому сумма её недиагональных элементов нулевая:

$$(b^2(1) - 1) \left(b(1) - b \left(\frac{1}{a} \right) \right) = 0 \implies \begin{cases} b(1) = 1, \\ b(1) = b \left(\frac{1}{a} \right). \end{cases}$$

Предположим, что $b(1) \neq 1$. Тогда $b(1/a) = b(1)$. Имеем также

$$\begin{aligned}
&b(1) \left(1 - b(a)b \left(\frac{1}{a} \right) \right) + (b^2(1) - 1)b(a) = 0 \implies \\
&\implies b(1)(1 - b(a)b(1)) + (b^2(1) - 1)b(a) = 0 \implies \\
&\implies b(1) - b(a)b^2(1) + b^2(1)b(a) - b(a) = 0 \implies b(1) - b(a) = 0.
\end{aligned}$$

Если $b(1) = b(a) = b(1/a)$, то $\Phi(\text{diag}[1/a, a])$ становится единичной, причём это происходит для всех $a \in R_+^*$ (так как предположение $b(1) \neq 1$ не зависит от a), в том числе при $a = 2$. Но тогда

$$\Phi(B_{1,2}^4(1)) = \Phi \left(\text{diag} \left[2, \frac{1}{2} \right] B_{1,2}(1) \text{diag} \left[\frac{1}{2}, 2 \right] \right) = \Phi(B_{1,2}(1)).$$

Следовательно, $\Phi^3(B_{1,2}(1)) = E_2$, и по лемме 5 получаем $\Phi(B_{1,2}(1)) = E_2$, что противоречит формулировке леммы. Таким образом, предположение было неверным, т. е. $b(1) = 1$. Тогда матрица $\Phi(\text{diag}[1/a, a])$ принимает вид

$$\begin{pmatrix} b(1/a) & 1 - b(a)b(1/a) \\ b(1/a)b(a) - 1 & -b(a)(b(1/a)b(a) - 1) + b(a) \end{pmatrix}.$$

Поскольку она диагональна, $b(1/a) = 1/b(a)$ (на самом деле это следует даже из её неотрицательности), а тогда она равна $\text{diag}[b(1/a), b(a)]$.

Имеем $\Phi(\text{diag}[1/a, a]) = \text{diag}[b(1/a), b(a)]$. Отсюда видно, что b является полноценным эндоморфизмом на R_+^* . $\square$

Лемма 15. Все матрицы из $\text{GE}_+(R)$ имеют определитель, сравнимый с нулём и обратимый.

Доказательство. Несложно получить из определения $GE_+(R)$, что любая матрица из этой подполугруппы может быть получена как произведение диагональных матриц с неотрицательными обратимыми элементами, матриц перестановок и матриц элементарных преобразований (возможно, с отрицательными коэффициентами). У каждой из матриц в этом произведении имеется сравнимый с нулём обратимый определитель, значит, то же можно сказать и об определителе их произведения, который и является определителем изначально рассматриваемой произвольной матрицы из $GE_+(R)$, что доказывает лемму. $\square$

Обозначение. Пусть $A \in GE_+(R)$. Введём следующее обозначение:

$$|\det(A)| = \begin{cases} \det(A), & \text{если } \det(A) > 0, \\ -\det(A), & \text{если } \det(A) < 0. \end{cases}$$

Замечание. Для всех $A \in GE_+(R)$ имеет место $|\det(A)| \in R_+^*$.

Замечание. В следующей лемме sgn рассматривается как гомоморфизм

$$R_{\pm}^* = R_+^* \cup R_-^* \rightarrow (\mathbb{Z}_2, +),$$

т. е.

$$\text{sgn}(a) = \begin{cases} 0, & \text{если } a > 0, \\ 1, & \text{если } a < 0. \end{cases}$$

Лемма 16. Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$. Тогда существуют эндоморфизмы ψ, ψ_1, ψ_2 группы $(R_+^*, \cdot)$, такие что на полугруппе GE_+ эндоморфизм Φ с точностью до композиции с Φ_s или Φ'_s является одним из следующих четырёх:

- $\Phi(A) = \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)],$
- $\Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)|}} \cdot (\text{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)})^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)|},$
- $\Phi(A) = \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn } \det(A)},$
- $\Phi(A) = \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)| + \text{sgn } \det(A)},$

где R_o — смежный класс любой подгруппы индекса 2 в R_+^* .

Доказательство. Для $x \in R_+^*$ верно, что

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\Phi \left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = E_2.$$

Отсюда и из равенства выше получаем, что $\Phi(B_{1,2}(x)) = E_2$ для всех $x \in R_+^*$.

Предположим, что существует элемент $x \in R_+$, такой что

$$\Phi(B_{1,2}(x)) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq E_2.$$

Рассмотрим равенство между матрицами

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2.$$

Если матрица $\text{diag}[1/2, 1]$ переходит в скалярную, то из него будет следовать, что $\Phi(B_{1,2}(x)) = E_2$, но мы предположили, что это не так. Значит, образ $\text{diag}[1/2, 1]$ не скалярный.

а) Если образ $\text{diag}[1/2, 1]$ псевдодиагональный, то, применяя Φ к соотношению выше, получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & d_1 \\ d_2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \implies \\ \implies \begin{pmatrix} bd_2 & ad_1 \\ dd_2 & cd_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1(ac + cd) & d_1(bc + d^2) \\ d_2(a^2 + bc) & d_2(ab + bd) \end{pmatrix} \implies \begin{cases} bd_2 = d_1c(a + d), \\ cd_1 = d_2b(a + d), \\ ad_1 = d_1(d^2 + bc), \\ dd_2 = d_2(a^2 + bc). \end{cases} \end{aligned}$$

Сокращая последние два равенства на d_1 и d_2 соответственно и вычитая из одного другое, получаем

$$a - d = d^2 - a^2 \implies (a - d)(a + d + 1) = 0 \implies a = d.$$

Кроме того,

$$\begin{cases} bd_2 = d_1c(a + d), \\ cd_1 = d_2b(a + d) \end{cases} \implies bc = bc(a + d).$$

Если $bc \neq 0$, то $a + d = 1$. Следовательно, $a = d = 1/2$. Также известно, что $a = d^2 + bc$. Поэтому $bc = 1/2$. Тогда

$$\det \Phi(B_{1,2}(x)) = ad - bc = -\frac{1}{4},$$

что противоречит лемме 10.

Если же $bc = 0$, то одно из чисел b и c нулевое. Вспомним, что

$$\begin{cases} bd_2 = d_1c(a + d), \\ cd_1 = d_2b(a + d) \end{cases}$$

и что d_1, d_2 — ненулевые числа. Значит, оба числа b, c равны 0.

Далее,

$$\begin{cases} ad_1 = d_1(d^2 + bc), \\ dd_2 = d_2(a^2 + bc) \end{cases} \implies \begin{cases} a = d^2, \\ d = a^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = a^4, \\ d = a^2 \end{cases} \implies \begin{cases} a = 1, \\ d = 1. \end{cases}$$

Получили, что $\Phi(B_{1,2}(x)) = E_2$, что противоречит нашему предположению.

б) Пусть образ $\text{diag}[1/2, 1]$ диагонален. Все диагональные матрицы по лемме 1 переходят только в диагональные или псевдодиагональные. Предположим, что какая-то диагональная матрица перешла в псевдодиагональную. Тогда из её

коммутируемости с образом $\text{diag}[1/2, 1]$ следует, что образ $\text{diag}[1/2, 1]$ скалярен, но это не так. Следовательно, все диагональные матрицы переходят в диагональные. Применяя Φ к соотношению выше, получаем

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} ad_1 & bd_2 \\ cd_1 & dd_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1(a^2 + bc) & d_1(ab + bd) \\ d_2(ac + cd) & d_2(bc + d^2) \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} d_1a = d_1(a^2 + bc), \\ d_2d = d_2(d^2 + bc), \\ d_2b = d_1b(a + d), \\ d_1c = d_2c(a + d). \end{cases}$$

Перемножая последние два равенства, получаем

$$d_1^2bc(a + d) = d_2^2bc(a + d).$$

Поскольку мы знаем, что образ $\text{diag}[1/2, 1]$ не скалярный, т. е. $d_1 \neq d_2$, получаем по лемме 4, что $d_1^2 \neq d_2^2$. Значит,

$$bc(a + d) = 0 \Rightarrow \begin{cases} b = 0, \\ c = 0, \\ \begin{cases} a = 0, \\ d = 0. \end{cases} \end{cases}$$

Если $a = 0 = d$, то

$$\begin{cases} d_2b = d_1b(a + d), \\ d_1c = d_2c(a + d) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} d_2b = 0, \\ d_1c = 0. \end{cases}$$

Но этого не может быть, ведь $d_1, d_2 \neq 0$ и, поскольку в матрице

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

уже $a = 0 = d$, то b, c тоже не равны нулю. Получаем, что

$$\begin{cases} b = 0, \\ c = 0. \end{cases}$$

Дополнительно получаем, что

$$\begin{cases} d_1a = d_1(a^2 + bc), \\ d_2d = d_2(d^2 + bc) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = a^2, \\ d = d^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1, \\ d = 1. \end{cases}$$

Тогда c и b не могут одновременно быть равны 0, так как мы предположили ранее, что $\Phi(B_{1,2}(x)) \neq E_2$.

Случай $c \neq 0, b = 0$ сводится к случаю $c = 0, b \neq 0$ рассмотрением вместо Φ его композиции с сопряжением матрицей $S_{(12)}$.

Получаем, что $c = 0, b \neq 0$, т. е. $\Phi(B_{1,2}(x)) = B_{1,2}(b)$, причём $b \neq 0$. Кроме того, $d_2b = d_1b(a + d)$, следовательно, $d_2 = 2d_1$.

Ранее мы уже установили, что $\Phi(\text{diag}[1/2, 1]) = \Phi(\text{diag}[1, 1/2])$, так как у них одинаковый определитель и они получаются друг из друга элементарными преобразованиями с обратимыми коэффициентами, образ которых единичен.

Рассмотрим соотношение

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Применяя к нему Φ , получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^2 \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 & 0 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} d_1 & 2bd_2 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} d_1 & bd_1 \\ 0 & d_2 \end{pmatrix} \Rightarrow d_1 = 2d_2. \end{aligned}$$

Значит, $d_1 = 2d_2 = 2 \cdot 2d_1$, и тогда $d_1 = 0$, чего не может быть.

Во всех случаях пришли к противоречию, значит, предположение о том, что существует $x \in R_+$, такой что $\Phi(B_{1,2}(x)) \neq E_2$, неверно.

Получаем, что все матрицы элементарных преобразований переходят в единичную.

По лемме 5, так как $\Phi(S_{(12)})$ — матрица порядка 2, имеем две возможности.

I. $\Phi(S_{(1,2)}) = E_2$. Рассмотрим два случая.

1. Пусть все образы диагональных матриц диагональны. Образ диагональной матрицы зависит лишь от определителя, значит, существуют эндоморфизмы R_+^* ψ_1 и ψ_2 , такие что $\Phi(\text{diag}[a, b]) = \text{diag}[\psi_1(ab), \psi_2(ab)]$. Покажем, что эндоморфизм Φ на $\text{GE}_+(R)$ имеет вид

$$\Phi(A) = \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)].$$

Если матрица A диагональная, то по определению ψ_1, ψ_2 формула верна.

Очевидно также, что эта формула верна и для матрицы перестановки $S_{(12)}$, так как её определитель равен -1 , а образ — E_2 .

Эта формула верна и для матрицы элементарного преобразования, так как её определитель равен 1, а образ — E_2 .

Поскольку формула верна для этих матриц и сохраняется при умножении матриц, то она верна и для всех матриц из GE_+ , так как их можно представить в виде произведения диагональных матриц, матриц элементарных преобразований и матрицы $S_{(12)}$.

2. Пусть некоторые диагональные матрицы переходят в псевдодиагональные, т. е. найдутся $a, b \in R_+^*$, такие что

$$\Phi(\text{diag}[a, b]) = \text{diag}[c, d]S_{(12)}.$$

Пусть ψ — эндоморфизм группы $(R_+^*, \cdot)$, такой что диагональная матрица с определителем a переходит в матрицу определителя $\psi(a)$.

Пусть R_o — множество определителей из R_+^* , диагональные матрицы с которыми отображаются в псевдодиагональные матрицы. Тогда все свойства, требуемые в лемме 13, выполнены для R_o , откуда следует, что R_o — подгруппа индекса 2 в $(R_+^*, \cdot)$.

По лемме 8 диагональные матрицы коммутируют с псевдодиагональными, когда они скалярные, а псевдодиагональные матрицы коммутируют друг с другом тогда и только тогда, когда отношение их элементов одинаково. Пусть у всех псевдодиагональных матриц в образе это отношение равно k .

Покажем, что

$$\Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o} |\det(A)|}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o} |\det(A)|}.$$

Если матрица A диагональная, то при $|\det A| \notin R_o$ выполнено $\operatorname{sgn}_{R_o} |\det A| = 0$ и получается скалярная матрица определителя $\psi(|\det A|)$, как и должно быть. При $|\det A| \in R_o$ выполнено $\operatorname{sgn}_{R_o} |\det A| = 1$ и получается псевдодиагональная матрица с отношением элементов k , как и должно быть.

Пусть $A = S_{(12)}$. В силу того что $1 \notin R_o$, получаем, что $\operatorname{sgn}_{R_o} |\det(A)| = 0$. Кроме того, $\psi(1) = 1$, значит, по формуле $\Phi(S_{(12)})$ равняется E_2 , что соответствует действительности.

Эта формула верна и для матрицы элементарного преобразования, так как её определитель равен 1 и, значит, $\operatorname{sgn} \det(A) = 0$, и как раз получается, что $\Phi(A) = E_2$.

Поскольку формула верна для этих матриц и сохраняется при умножении матриц, то она верна и для всех матриц из GE_+ , так как их можно представить в виде произведения диагональных матриц, матриц элементарных преобразований и матрицы $S_{(12)}$.

II. $\Phi(S_{(1,2)}) = P_s$. Будем считать, что $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$, так как мы рассматриваем Φ с точностью до композиции с Φ_s .

Элементарными преобразованиями с обратимыми коэффициентами можно получить из $\operatorname{diag}[a, b]$ матрицу $\operatorname{diag}[b, a]$. Поскольку образ таких матриц элементарных преобразований единичный, то образы матриц $\operatorname{diag}[a, b]$ и $\operatorname{diag}[b, a]$ совпадают, следовательно, справедливо следующее:

$$\begin{aligned} \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) = \Phi(\operatorname{diag}[b, a]) &\implies \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) = S_{(12)} \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) S_{(12)} \implies \\ &\implies \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) S_{(12)} = S_{(12)} \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) \implies \Phi(\operatorname{diag}[a, b]) = \begin{pmatrix} x & y \\ y & x \end{pmatrix} \end{aligned}$$

для некоторых $x, y \in R_+$, т. е. образы всех диагональных матриц являются симметричными матрицами.

Посмотрим, при каких условиях симметричная матрица может иметь обратную матрицу, также являющуюся симметричной. Имеем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ y_1 & x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 & y_2 \\ y_2 & x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &\implies \\ \implies x_1 y_2 + y_1 x_2 = 0 &\implies \begin{cases} x_1 y_2 = 0, \\ y_1 x_2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \begin{bmatrix} x_1 = 0, \\ y_2 = 0, \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} x_2 = 0, \\ y_1 = 0. \end{bmatrix} \end{cases} \end{aligned}$$

Поскольку образы диагональных обратимых матриц обязаны иметь обратные матрицы, также лежащие в образе, то получаем, что образы всех диагональных матриц либо скалярны, либо псевдоскалярны.

Имеется два подслучая.

1. Пусть все образы диагональных матриц диагональны. Пусть ψ — эндоморфизм группы $(R_+^*, \cdot)$, такой что диагональная матрица с определителем a переходит в скалярную матрицу $\psi(a)$. Покажем, что эндоморфизм Φ имеет вид

$$\Phi(A) = \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn det}(A)}.$$

Если матрица A диагональная, то действительно $\Phi(A) = \psi(|\det(A)|)$. Кроме того, $\text{sgn det}(A) = 0$, так как определитель неотрицателен. Таким образом, для диагональных матриц формула для Φ верна.

Очевидно также, что эта формула верна и для матрицы перестановки $S_{(12)}$, так как её определитель равен -1 , т. е. $\psi(|\det(A)|) = 1$, и $\text{sgn det}(A) = 1$.

Эта формула верна и для матрицы элементарного преобразования, так как её определитель равен 1 , значит, $\text{sgn det}(A) = 0$, и как раз получается, что $\Phi(A) = E_2$.

Поскольку формула верна для этих матриц и сохраняется при умножении матриц, то она верна и для всех матриц из GE_+ , так как их можно представить в виде произведения диагональных матриц, матриц элементарных преобразований и матрицы $S_{(12)}$.

2. Пусть некоторые диагональные матрицы переходят в псевдодиагональные: найдутся $a, b \in R_+^*$, такие что

$$\Phi(\text{diag}[a, b]) = \lambda S_{(12)}.$$

Пусть R_o — множество определителей из R_+^* , диагональные матрицы с которыми отображаются в псевдодиагональные матрицы. Тогда все свойства, требуемые в лемме 13, выполнены для R_o , откуда следует, что R_o — подгруппа индекса 2 в $(R_+^*, \cdot)$.

Пусть ψ — эндоморфизм группы $(R_+^*, \cdot)$, такой что диагональная матрица с определителем a переходит в скалярную матрицу $\psi(a)$.

Покажем, что эндоморфизм имеет вид

$$\Phi(A) = \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn}_{R_o} |\det A| + \text{sgn det}(A)}.$$

Если матрица A диагональная, то $\text{sgn det}(A) = 0$, $\text{sgn}_{R_o} \det(A)$ как раз зависит от того, является ли образ данной диагональной матрицы скалярным или псевдоскалярным, поэтому всё сходится.

Если матрица $A = S_{(12)}$, то $\psi(|\det(A)|) = 1$, $\operatorname{sgn} \det(A) = 1$. В силу того что $1 \notin R_o$, справедливо $\operatorname{sgn}_{R_o} |\det(A)| = 0$, откуда следует, что $\Phi(S_{(12)}) = S_{(12)}$, что действительно так.

Если матрица A является матрицей элементарного преобразования, то $\psi(|\det(A)|) = 1$, $\operatorname{sgn} \det(A) = 0$. Тогда $\operatorname{sgn}_{R_o} |\det(A)| = 0$. Получаем, что $\Phi(A) = E_2$, как и должно быть.

Аналогично случаю 1 делаем вывод, что такая формула для эндоморфизма верна для всех матриц из $\operatorname{GE}_+(R)$. $\square$

Лемма 17. Пусть в некоторой группе G имеются несколько смежных классов R_i к подгруппам индекса 2. Тогда существует такая подгруппа индекса 2 и её смежный класс R , что

$$\operatorname{sgn}_R = \operatorname{sgn}_{R_1} + \dots + \operatorname{sgn}_{R_n}.$$

Замечание. Поскольку под sgn понимается отображение в $\mathbb{Z}_2$, то под суммой также подразумевается групповая операция в $\mathbb{Z}_2$.

Доказательство. Пусть R состоит из тех элементов G , для которых

$$\operatorname{sgn}_{R_1} + \dots + \operatorname{sgn}_{R_n} \neq 0.$$

Тогда очевидно, что R — смежный класс подгруппы индекса 2, так как если имеются элементы a_1, a_2, b_1 и b_2 , такие что

$$\operatorname{sgn}_{R_1}(a_{1,2}) + \dots + \operatorname{sgn}_{R_n}(a_{1,2}) \neq 0$$

и

$$\operatorname{sgn}_{R_1}(b_{1,2}) + \dots + \operatorname{sgn}_{R_n}(b_{1,2}) = 0,$$

то по свойству

$$\operatorname{sgn}_{R_i}(ab) = \operatorname{sgn}_{R_i}(a) + \operatorname{sgn}_{R_i}(b)$$

легко получаем, что $a_1 a_2 \notin R$, $a_1 b_2 \in R$, $b_1 b_2 \notin R$. Тогда по лемме 13 R — смежный класс подгруппы индекса 2 в G .

Само равенство

$$\operatorname{sgn}_R = \operatorname{sgn}_{R_1} + \dots + \operatorname{sgn}_{R_n}$$

непосредственно следует из определения R . $\square$

Лемма 18. Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$. Тогда существуют эндоморфизмы ψ, ψ_1, ψ_2 группы $(R_+^*, \cdot)$, такие что на GE_+ Φ является одним из следующих двух:

- $\Phi(A) = \operatorname{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)],$
- $\Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)},$

где R_o — смежный класс любой подгруппы индекса 2 в $R_\pm^*$.

Доказательство. Для доказательства этого факта с помощью леммы 16 достаточно показать следующее:

- 1) все четыре типа эндоморфизма, описанные в лемме 16, содержатся среди описанных в данной лемме;

- 2) отображения, описанные в данной лемме, являются эндоморфизмами;
 3) отображения, описанные в данной лемме, при композиции с сопряжениями Φ_s и Φ'_s переходят в отображения, которые тоже описаны в этой лемме.

Из пунктов 1) и 3) и из леммы 16 будет следовать, что все существующие эндоморфизмы с условием $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$ описаны в этой лемме. Из 2) будет следовать, что в описании нет ничего лишнего.

Докажем утверждение 1). Рассмотрим отображения

$$\begin{aligned}\Phi_1(A) &= \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)], \\ \Phi_2(A) &= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)|}} \cdot (\text{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)})^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)|}, \\ \Phi_3(A) &= \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn det}(A)}, \\ \Phi_4(A) &= \psi(|\det(A)|) \cdot S_{(12)}^{\text{sgn}_{R_o}|\det(A)| + \text{sgn det}(A)}.\end{aligned}$$

Эндоморфизм Φ_1 содержится в формулировке данной леммы в явном виде.

Рассмотрим эндоморфизм Φ_2 . В нём под R_o подразумевается смежный класс к подгруппе индекса 2 в R_+^* . Вместо него определим R'_o в группе $R_\pm^*$ следующим образом: элемент $a \in R_\pm^*$ лежит в R'_o тогда и только тогда, когда $|a| \in R_o$. Тогда

$$\text{sgn}_{R'_o}(\det(A)) = \text{sgn}_{R_o}|\det(A)|$$

и Φ_2 примет вид второго описанного в лемме эндоморфизма.

Рассмотрим Φ_3 . Обычный sgn в $R_\pm^*$ можно тоже рассмотреть как знак относительно смежного класса подгруппы индекса 2, а именно относительно отрицательных чисел. При таком sgn и при $k = 1$ непосредственно получаем, что Φ_3 тоже записывается в виде эндоморфизма, указанного в формулировке данной леммы.

Рассмотрим, наконец, Φ_4 . Преобразуем sgn_{R_o} и sgn так, как описано выше, чтобы они стали знаками над $R_\pm^*$. Сумма двух sgn по лемме 17 можно преобразовать к одному sgn . Остаётся снова положить $k = 1$ и получить, что Φ_4 тоже преобразуется к виду, указанному в данной лемме.

Докажем утверждение 2). Пусть Φ определяется по формуле

$$\Phi(A) = \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)].$$

Тогда то, что он является эндоморфизмом, очевидно.

Пусть Φ определяется по формуле

$$\Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\text{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)})^{\text{sgn}_{R_o}(\det A)}.$$

Рассмотрим две матрицы A, B и проверим, что

$$\Phi(AB) = \Phi(A)\Phi(B).$$

Разберём три случая.

1. Пусть $\det(A), \det(B) \notin R_o$. Тогда $\det(AB) \notin R_o$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \sqrt{\psi(|\det(A)|)}, \\ \Phi(B) &= \sqrt{\psi(|\det(B)|)}, \\ \Phi(AB) &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|)},\end{aligned}$$

и требуемое верно.

2. Пусть $\det(A) \notin R_o, \det(B) \in R_o$. Тогда $\det(AB) \in R_o$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \sqrt{\psi(|\det(A)|)}, \\ \Phi(B) &= \sqrt{\psi(|\det(B)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}}, \\ \Phi(AB) &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}},\end{aligned}$$

и требуемое верно.

3. Пусть $\det(A), \det(B) \in R_o$. Тогда $\det(AB) \in R_o$. Имеем

$$\begin{aligned}\Phi(A) &= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}}, \\ \Phi(B) &= \sqrt{\psi(|\det(B)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}}, \\ \Phi(AB) &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|)}.\end{aligned}$$

Проверим, что требуемое равенство выполняется:

$$\begin{aligned}& \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}} \sqrt{\psi(|\det(B)|) \cdot k \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}} = \\ &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|) \cdot k^2 \cdot \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)} \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}} = \\ &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|) \cdot k^2 \cdot S_{(12)} \text{diag}[1, k^{-1}] \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)}} = \\ &= \sqrt{\psi(|\det(AB)|) \cdot k \cdot k^{-1}} = \sqrt{\psi(|\det(AB)|)}.\end{aligned}$$

Докажем утверждение 3). Пусть Φ определяется по формуле

$$\Phi(A) = \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)].$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_s \Phi(A) &= \text{diag}[\psi_2(|\det(A)|), \psi_1(|\det(A)|)], \\ \Phi'_s \Phi(A) &= \text{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)],\end{aligned}$$

эндоморфизмы такого вида содержатся в условии леммы.

Пусть Φ определяется по формуле

$$\Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)})^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))}.$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Phi_s \Phi(A) &= P_s \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)})^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))} P_s = \\ &= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (P_s \text{diag}[k^{-1}, 1] S_{(12)} P_s)^{\text{sgn}_{R_o}(\det(A))} =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[s, k^{-1}s^{-1}]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} (k^{-1}s^{-1})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} \times \\
&\times (\operatorname{diag}[s^2k, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot (k^{-1}s^{-2})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[s^2k, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)},
\end{aligned}$$

т. е. $\Phi_s \Phi(A)$ имеет такой же вид с точностью до замены k на $k^{-1}s^{-2}$. Аналогично

$$\begin{aligned}
\Phi'_s \Phi(A) &= P'_s \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} P'_s = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (P'_s \operatorname{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)} P'_s)^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}s^{-1}, s]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))} s^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}s^{-2}, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)} = \\
&= \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot (ks^2)^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}s^{-2}, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)},
\end{aligned}$$

т. е. $\Phi_s \Phi(A)$ имеет такой же вид с точностью до замены k на ks^2 .

Все три пункта доказаны. $\square$

Теорема 1. Пусть Φ — эндоморфизм полугруппы $G_2(R)$, где R — частично упорядоченное коммутативное кольцо без делителей нуля с $1/2$. Тогда ограничение Φ на $\operatorname{GE}_2^+(R)$ имеет один из видов

$$\begin{aligned}
&— \Phi(A) = \operatorname{diag}[\psi_1(|\det(A)|), \psi_2(|\det(A)|)], \\
&— \Phi(A) = \sqrt{\psi(|\det(A)|) \cdot k^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det(A))}} \cdot (\operatorname{diag}[k^{-1}, 1]S_{(12)})^{\operatorname{sgn}_{R_o}(\det A)}, \text{ где } R_o — \\
&\text{смежный класс любой подгруппы индекса 2 в } R_{\pm}^*, \psi, \psi_1, \psi_2 — \text{эндомор-} \\
&\text{физмы группы } (R_{\pm}^*, \cdot), \\
&— \begin{cases} \Phi(B_{i,j}(x)) = B_{i,j}(b(x)), \\ \Phi(\operatorname{diag}[x, y]) = \operatorname{diag}[\sqrt{\psi(xy)b(xy^{-1})}, \sqrt{\psi(xy)b(yx^{-1})}], \\ \Phi(S_{(12)}) = S_{(12)} \end{cases}
\end{aligned}$$

с точностью до композиции с Φ_s или Φ'_s , где ψ — эндоморфизм $R_{\pm}^*$, b — эндоморфизм $(R_{\pm}, +)$, в ограничении на $R_{\pm}^*$ являющийся полноценным эндоморфизмом, причём верно, что для любого $x \in R_{\pm}^*$ найдётся $z \in R_{\pm}^*$, такой что $\psi(x)b(x) = z^2$.

Замечание. Последние два случая задают «стандартный» эндоморфизм в случае, например, когда R порождено обратимыми элементами. В случае когда из всех элементов извлекаются корни, домножение на $\sqrt{\psi(\det(D))}$ можно выделить как композицию с центральным эндоморфизмом, и тогда эндоморфизм будет тоже «стандартным».

Известно, что при ψ и b , тождественных на $R_{\pm}^*$, такое задание может являться эндоморфизмом $\operatorname{GE}_2^+(R)$, даже если b не является аддитивным на всём $R_{\pm}$, а может и не продолжиться до него в зависимости от кольца R .

Таким образом, хотя указанные соотношения в последних двух случаях, конечно же, говорят, как задаётся эндоморфизм на $GE_2^+(R)$, так как любая матрица может быть представлена в виде произведения диагональных матриц, матриц перестановок, матриц элементарных преобразований и матриц, обратных им, но для некоторых колец R может оказаться, что не для всех ψ, b встретится эндоморфизм, имеющий такое ограничение на $GE_2^+(R)$.

Доказательство. Нужно разобрать два случая.

Случай $\Phi(B_{i,j}(1)) = E_2$ разобран в лемме 18.

Пусть $\Phi(B_{i,j}(1)) \neq E_2$. Согласно лемме 11 рассмотрим эндоморфизм Φ либо его композицию с Φ_s или с Φ'_s , обозначим это через Φ' .

Из лемм 11 и 9 получаем следующие свойства:

- 1) $\Phi'(D) = D'$, где $\det(D') = \psi(\det(D))$, D, D' — диагональные матрицы с положительными обратимыми элементами;
- 2) $\Phi'(B_{i,j}(x)) = B_{i,j}(b(x))$;
- 3) $\Phi'(S_{(12)}) = S_{(12)}$.

По лемме 14 получаем, что b , ограниченный на R_+^* , является полноценным эндоморфизмом. Кроме того,

$$\Phi(\text{diag}[x^2, y^2]) = \Phi(\text{diag}[xy, xy] \text{diag}[xy^{-1}, yx^{-1}]) = \psi(xy) \text{diag}[b(xy^{-1}), b(yx^{-1})].$$

Известно, что $\Phi(\text{diag}[x, y])$ тоже диагональная матрица, дающая в квадрате эту, значит,

$$\Phi(\text{diag}[x, y]) = \text{diag}[\sqrt{\psi(xy)b(xy^{-1})}, \sqrt{\psi(yx)b(yx^{-1})}].$$

Корень в R_+ существует не для всех чисел, но в данном случае обязан существовать, и он единствен по лемме 4. Существование таких корней равносильно условию, что для любого $x \in R_+^*$ найдётся $z \in R_+^*$, такой что $\psi(x)b(x) = z^2$, что следует из факта, что из чисел $\psi(y)b(y)$ и $\psi(y)b(y^{-1})$ либо одновременно извлекается корень, либо одновременно не извлекается (они отличаются домножением на $b(y^2) = b^2(y)$). $\square$

Автор выражает благодарность Е. И. Буниной за постановку задачи, постоянное внимание к работе и помощь в улучшении изложения материала.

Литература

- [1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.
- [2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.

- [3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39—53.
- [4] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 69—100.
- [5] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 75—85.
- [6] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // *Мат. сб.* — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.
- [7] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // *Мат. сб.* — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.
- [8] Семёнов П. П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2011/2012. — Т. 17, вып. 5. — С. 165—178.