Отношение Штейнера поверхностей Адамара кривизны не больше $k < 0$

Е. А. ЗАВАЛЬНЮК
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: zav_evg@mail.ru

УДК 514.177.2+515.122.23

Ключевые слова: пространство Александрова, поверхность Александрова, поверхность Адамара, отношение Штейнера, дерево Штейнера.

Аннотация

В данной работе исследуются поверхности Адамара кривизны не больше k, являющиеся частным случаем поверхностей Александрова. В частности, показано, что полный угол в точках такой поверхности не меньше, чем 2π. Также получено точное значение отношения Штейнера в случае неограниченной поверхности при отрицательном k.

Abstract

E. A. Zavalnyuk, Steiner ratio for the Hadamard surfaces of curvature at most $k < 0$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 35—51.

In this paper, the Hadamard surfaces of curvature at most k are investigated, which are a particular case of Alexandrov surfaces. It was shown that the total angle at the points of an Hadamard surface is not less than 2π. The Steiner ratio of an Hadamard surface was obtained for the case where the surface is unbounded and $k < 0$.

1. Введение

Данная работа посвящена изучению отношения Штейнера поверхностей Адамара. Напомним необходимые определения и результаты. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. Пусть $G = (V, E)$ — связный граф с вершинами в пространстве X, т. е. $V \subset X$. Длиной ребра такого графа будем называть расстояние в X между его концами, а *длиной графа* G — сумму длин всех его рёбер.

Пусть $M \subset X$ — конечное множество. Рассмотрим всевозможные связные графы $G = (M, E)$, имеющие M в качестве множества своих вершин. Среди них найдётся (возможно, не единственный) граф, имеющий наименьшую длину. Такой граф всегда является деревом и называется *минимальным остовным деревом* для M. Множество всех минимальных остовных деревьев для M обозначается через $\mathrm{MST}(M)$, а их длина — через $\rho\big(\mathrm{MST}(M)\big)$.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 35—51.

Рассмотрим теперь всевозможные связные графы $G = (V, E)$, где $M \subset V \subset \subset X$. Они соединяют множество M, вообще говоря, посредством дополнительных точек пространства X. Пусть ω_0 — точная нижняя грань длин таких графов. Если существует связный граф $G_0 = (V_0, E_0)$, соединяющий M и имеющий длину ω_0, то он является деревом и называется *деревом Штейнера* для множества M. Множество всех деревьев Штейнера для M мы будем обозначать через $\mathrm{SMT}(M)$, а их длину — через $\rho\bigl(\mathrm{SMT}(M)\bigr)$.

Имеет место очевидное свойство: $\rho\bigl(\mathrm{SMT}(M)\bigr) \leqslant \rho\bigl(\mathrm{MST}(M)\bigr)$. Действительно, если разрешить дополнительные вершины, то длина затягивающего множество M графа может лишь уменьшиться. Величина, характеризующая, насколько короче окажется длина соединяющего M графа, если разрешить дополнительные вершины, называется *отношением Штейнера* для M и определяется следующим образом:

$$\mathrm{sr}(M) = \frac{\rho\bigl(\mathrm{SMT}(M)\bigr)}{\rho\bigl(\mathrm{MST}(M)\bigr)}.$$

Рассмотрим теперь всевозможные конечные множества в X, и пусть $\mathrm{sr}(X)$ — точная нижняя грань их отношений Штейнера. Величина $\mathrm{sr}(X)$ называется *отношением Штейнера* метрического пространства X. Таким образом,

$$\mathrm{sr}(X) = \inf_{M \subset X,\, 1 < |M| < \infty} \mathrm{sr}(M) = \inf_{M \subset X,\, 1 < |M| < \infty} \frac{\rho\bigl(\mathrm{SMT}(M)\bigr)}{\rho\bigl(\mathrm{MST}(M)\bigr)}.$$

Для произвольного метрического пространства (X, ρ) справедлива следующая оценка на его отношение Штейнера:

$$\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{sr}(X) \leqslant 1. \tag{1}$$

Верхняя оценка, как мы уже заметили, вытекает из определения дерева Штейнера. Нижняя оценка была доказана Э. Муром. А. О. Иванов и А. А. Тужилин показали, что для любого $s \in [1/2, 1]$ существует метрическое пространство, отношение Штейнера которого равно s (см. [5]).

Существует немного классов пространств, для которых удалось точно вычислить отношение Штейнера, хотя часто удаётся найти некоторые оценки. Для евклидовой плоскости нетрудно получается верхняя оценка $\mathrm{sr}(\mathbb{R}^2) \leqslant \sqrt{3}/2$, равная отношению Штейнера вершин равностороннего треугольника. В 1968 г. Э. Гильберт и Г. Поллак в [14] сформулировали гипотезу о том, что отношение Штейнера евклидовой плоскости в точности равно $\sqrt{3}/2$. С тех пор были получены некоторые нижние оценки, близкие к $\sqrt{3}/2$, однако точного значения не удалось установить до сих пор (см. [19]). В [20] установлено, что отношение Штейнера для двумерной сферы такое же, как для евклидовой плоскости. В [6] показано, что если X — произвольное связное n-мерное риманово многообразие, то $\mathrm{sr}(X) \leqslant \mathrm{sr}(\mathbb{R}^n)$. В частности, $\mathrm{sr}(X) \leqslant \sqrt{3}/2$ при $n \geqslant 2$. В [15] получена нижняя оценка на отношение Штейнера n-мерного евклидова пространства: $\mathrm{sr}(\mathbb{R}^n) \geqslant 1/\sqrt{3}$. Верхние оценки на $\mathrm{sr}(\mathbb{R}^n)$ для разных n можно найти в [12].

В [13] получены оценки, а в некоторых случаях и точные значения, для отношения Штейнера плоскостей Банаха—Минковского $\mathcal{L}^2$. А именно, $\mathrm{sr}(\mathcal{L}^2) \geqslant 2/3$, причём если единичный шар B на $\mathcal{L}^2$ представляет собой параллелограмм, то в формуле имеет место равенство. Д. Цислик [11] получил ряд оценок для отношения Штейнера пространств Банаха—Минковского большей размерности. Кроме того, он установил, что значение отношения Штейнера для филогенетических пространств равно $1/2$ (см. [12]). З. Н. Овсянников установил, что значение отношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с метрикой Хаусдорфа также равно $1/2$, (см. [8]). Ещё одним примером пространств, отношение Штейнера которых равно $1/2$, являются двумерные римановы многообразия постоянной отрицательной гауссовой кривизны. Этот результат был получен в 2006 г. в [16]. В настоящей работе установлено, что значение отношения Штейнера также равно $1/2$ для определённого класса поверхностей Адамара. А именно, доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть* (S, d) — *неограниченная поверхность Адамара кривизны не больше* $k < 0$. *Тогда отношение Штейнера* $\mathrm{sr}(S)$ *поверхности* S *равно* $1/2$.

Поверхности Адамара обобщают поверхности постоянной отрицательной кривизны, а также являются частным случаем пространств Александрова. В аспекте деревьев Штейнера и отношения Штейнера пространства Александрова стали изучаться недавно. В частности, в 2013 г. было установлено, что в пространствах Александрова с кривизной, ограниченной снизу, деревья Штейнера локально устроены так же, как на плоскости: угол между смежными рёбрами в общей вершине больше или равен $2\pi/3$ (см. [17]). В 2014 г. было установлено, что «принцип 120 градусов» справедлив и в пространствах Александрова с кривизной, ограниченной сверху [3].

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента Российской Федерации поддержки ведущих научных школ Российской Федерации (проект НШ-581.2014.1), гранта РФФИ (проект 13-01-00664а), гранта правительства Российской Федерации для привлечения ведущих учёных в российские образовательные учреждения (договор № 11.G34.31.0053).

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору А. О. Иванову за постановку задачи и внимание к работе, а также профессору А. А. Тужилину и всем участникам семинара «Экстремальные сети», проходящего на механико-математическом факультете МГУ, за их полезные замечания и предложения.

2. Общие сведения

Говорят, что метрика d метрического пространства (X, d) называется *внутренней*, если расстояние $d(a, b)$ между произвольными точками $a, b \in X$ равно точной нижней грани длин всех кривых в X, соединяющих a и b. Если при этом для каждой пары $a, b \in X$ существует кривая в X, длина которой равна $d(a, b)$, то метрика d называется *строго внутренней*.

Пусть a, b — точки пространства (X, d) со строго внутренней метрикой и $l = d(a, b)$. *Кратчайшей* в пространстве X с началом в a и концом в b называется изометричное отображение $\gamma\colon [0, l] \to X$, для которого $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$. Такое отображение существует по определению строго внутренней метрики. *Отрезком* $[ab]$ мы будем называть образ отрезка $[0, l]$ при отображении γ, а *треугольником* — объединение трёх отрезков, попарно соединяющих три различные точки. Когда будет ясно, о какой метрике идёт речь, расстояние между точками a и b мы будем обозначать через $|ab|$. *Кривой* в X будем называть непрерывное отображение некоторого отрезка $[\alpha, \beta]$ в X.

Открытой (*замкнутой*) *ε-окрестностью* точки x пространства (X, d) со строго внутренней метрикой мы будем называть множество $U_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) < \varepsilon\}$ (соответственно $V_\varepsilon(x) = \{y \in X \mid d(x, y) \leqslant \varepsilon\}$). Под просто *окрестностью* будет подразумеваться некоторая открытая ε-окрестность. Таким образом, ниже все окрестности шаровые.

Определение 2. *Величиной угла* в пространстве (X, d) со строго внутренней метрикой в точке a между отрезками $[ab]$ и $[ac]$ называется предел

$$\lim_{p,q\to a} \arccos \frac{|ap|^2 + |aq|^2 - |pq|^2}{2 \cdot |ap| \cdot |aq|},$$

где $p \in [ab]$, $q \in [ac]$, $p, q \neq a$, если этот предел существует. Мы будем обозначать эту величину через $\angle bac$ там, где будет понятно, о каких отрезках идёт речь.

Определение 3. Двумерное риманово многообразие постоянной гауссовой кривизны k называется *k-плоскостью*. Иными словами, при $k = 0$ эта поверхность есть евклидова плоскость, при $k > 0$ — сфера радиуса $1/\sqrt{k}$ с её внутренней метрикой, при $k < 0$ — полуплоскость $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\}$ с римановой метрикой, коэффициенты которой имеют вид

$$E = G = -\frac{1}{ky^2}, \quad F = 0.$$

Мы будем обозначать k-плоскость через P_k, а расстояние между точками a, b на ней — через $|ab|_k$.

Определение 4. Пусть $\triangle abc$ — треугольник в пространстве (X, d) со строго внутренней метрикой. *Треугольником сравнения* на k-плоскости для $\triangle abc$ будем называть треугольник $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \subset P_k$, такой что $|\tilde{a}\tilde{b}|_k = |ab|$, $|\tilde{b}\tilde{c}|_k = |bc|$, $|\tilde{a}\tilde{c}|_k = |ac|$. Мы также будем обозначать его через $\triangle_k abc$.

Заметим, что треугольник сравнения однозначно определён с точностью до движения k-плоскости.

Определение 5. В условиях определения 4 *углом сравнения* на k-плоскости для $\angle abc$ будем называть угол $\angle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$ треугольника сравнения $\triangle\tilde{a}\tilde{b}\tilde{c}$. Его мы будем обозначать также через $\angle_k abc$.

Замечание 6. Угол между отрезками $[ab]$ и $[ac]$ согласно определению 2 есть предел углов сравнения на *евклидовой плоскости*, поэтому если он определён и равен θ, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что для $p \in [ab]$, $q \in [ac]$ угол сравнения $\angle_0 paq$ в треугольнике $\triangle_0 apq \subset \mathbb{R}^2$ окажется меньше или равен $\theta + \varepsilon$, если $|ap|, |aq| < \delta$.

Определение 7. Пусть $\alpha\colon [0,\varepsilon) \to X$ и $\beta\colon [0,\varepsilon) \to X$ — кривые в пространстве X с внутренней метрикой, исходящие из точки $p = \alpha(0) = \beta(0)$. *Величиной угла между* α и β называется предел

$$\angle(\alpha, \beta) = \lim_{s,t\to 0} \angle_0\bigl(\alpha(s), p, \beta(t)\bigr),$$

если он существует.

Определение 8. Пространство (X, d) со строго внутренней метрикой называется *пространством кривизны* не больше k (не меньше k), если в некоторой окрестности каждой точки выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

а) *условие сравнения треугольников*: для каждого треугольника $\triangle abc$, лежащего в этой окрестности, и каждой точки $h \in [ac]$ справедливо неравенство $|bh| \leqslant |\tilde{b}\tilde{h}|_k$ (соответственно $|bh| \geqslant |\tilde{b}\tilde{h}|_k$), где $\tilde{h}$ — такая точка на стороне $[\tilde{a}\tilde{c}]$ треугольника сравнения $\triangle \tilde{a}\tilde{b}\tilde{c} \subset P_k$, что $|\tilde{a}\tilde{h}|_k = |ah|$;

б) *условие сравнения углов*: углы $\angle abc$, $\angle bca$, $\angle cab$ каждого треугольника $\triangle abc$, лежащего в этой окрестности, существуют и удовлетворяют неравенствам

$$\angle abc \leqslant \angle_k abc, \quad \angle bca \leqslant \angle_k bca, \quad \angle cab \leqslant \angle_k cab$$
$$(\text{соответственно } \angle abc \geqslant \angle_k abc, \quad \angle bca \geqslant \angle_k bca, \quad \angle cab \geqslant \angle_k cab).$$

Кроме того, в случае кривизны не меньше k для любых двух кратчайших $[pq]$ и $[rs]$, где r — внутренняя точка кратчайшей $[pq]$, справедливо равенство $\angle prs + \angle srq = \pi$;

в) *условие монотонности углов*: если $\alpha(x)$ и $\beta(y)$ — кратчайшие, исходящие из точки p и содержащиеся в этой окрестности, а $\angle_k \alpha(x) p \beta(y)$ — угол при вершине $\tilde{p}$ треугольника сравнения $\triangle_k \alpha(x) p \beta(y) \subset P_k$, то функция $\theta(x, y) = \angle_k \alpha(x) p \beta(y)$ является неубывающей (соответственно невозрастающей) по каждой из переменных x, y.

Если не уточняется константа k, то говорят о пространстве *ограниченной сверху* (соответственно *снизу*) *кривизны*.

Замечание 9. Образно говоря, пространство X кривизны не больше k (не меньше k) оказывается не более (соответственно не менее) искривлённым, чем P_k.

Определение 10. Окрестность, о которой идёт речь в определении 8, называется *нормальной*.

Пространством Александрова называется пространство ограниченной сверху или снизу кривизны. Доказательство эквивалентности условий сравнения треугольников, углов и условия монотонности углов, а также доказательство следующей теоремы можно найти в [2].

Теорема 11. *Если $k_1 > k_2$, то пространство кривизны не больше k_2 является пространством кривизны не больше k_1.*

В дальнейшем нам понадобится следующая «лемма о шарнирах», которая очевидно следует из теоремы косинусов для плоского треугольника.

Лемма 12. *Пусть $\triangle a_1b_1c_1$ и $\triangle a_2b_2c_2$ — треугольники на плоскости, такие что $|a_1b_1| = |a_2b_2|$, $|a_1c_1| = |a_2c_2|$. Тогда $|b_1c_1| \leqslant |b_2c_2|$ в том и только в том случае, когда $\angle b_1a_1c_1 \leqslant b_2a_2c_2$.*

Следствие 13. *Пусть $a_1b_1c_1d_1$ — четырёхугольник и $\triangle a_2b_2c_2$ — треугольник на плоскости, такие что $|a_1b_1| = |a_2b_2|$, $|b_1c_1| = |b_2c_2|$, $|a_1d_1| + |c_1d_1| = |a_2c_2|$. Тогда $\angle b_2a_2c_2 \geqslant \angle b_1a_1c_1$.*

Доказательство. По неравенству треугольника $|a_1c_1| \leqslant |a_1d_1| + |c_1d_1| = |a_2c_2|$. Далее применяем лемму 12. □

Замечание 14. Лемма 12 и следствие 13 остаются справедливыми не только на евклидовой плоскости, но и на всех поверхностях постоянной гауссовой кривизны.

3. Поверхности Александрова и поверхности Адамара

Определение пространства Александрова предполагает выполнение некоторых локальных условий на метрику. Предположим, что пространство Александрова (S, d) является двумерным топологическим многообразием. В этом случае будем называть S *поверхностью Александрова* с кривизной, определённой для неё как для пространства Александрова. По определению для произвольной точки $x \in S$ найдётся достаточно малое $\varepsilon > 0$, такое что окрестность $U_\varepsilon(x)$ гомеоморфна либо кругу, либо полукругу. В первом случае назовём точку x *внутренней*, во втором — *граничной*. Объединение всех граничных точек поверхности S назовём *границей* поверхности и обозначим через ∂S. Если x — внутренняя точка, то граница $\partial U_\varepsilon(x)$ окрестности $U_\varepsilon(x)$ (где ε такое, как выше) есть множество всех точек поверхности, удалённых от точки x на расстоянии ε; она является образом некоторой простой замкнутой кривой на S. Замкнутая окрестность $V_\varepsilon(x)$ гомеоморфна в этом случае двумерному диску.

Пусть x — внутренняя точка и γ_1, γ_2 — две кратчайшие, исходящие из x и не имеющие в некоторой окрестности $U_\varepsilon(x)$ общих точек, за исключением x. Рассмотрим два замкнутых *сектора* V_1, V_2, на которые кратчайшие γ_1, γ_2 разбивают замкнутую окрестность $V_\varepsilon(x)$ (рис. 1). Кратчайшие γ_1 и γ_2 назовём в данном случае *сторонами секторов*.

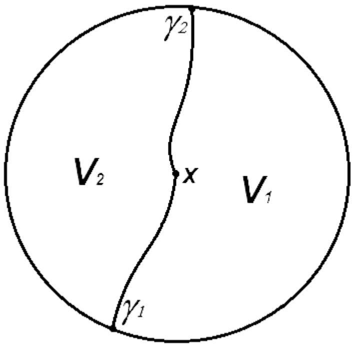

Рис. 1. Секторы замкнутой окрестности

Назовём два сектора *неналегающими*, если они не имеют общих внутренних точек. Пусть теперь $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ — кратчайшие, исходящие из x и упорядоченные в порядке следования вокруг x, т. е. секторы $V_1, \ldots, V_n$, где V_i имеет в качестве своих сторон кратчайшие γ_i и γ_{i+1} ($\gamma_{n+1} = \gamma_1$), попарно не налегают. Множество кратчайших $\Gamma = \{\gamma_1, \ldots, \gamma_n\}$ назовём *разбиением* окрестности $V_\varepsilon(x)$. *Углом вокруг точки x, подчинённым разбиению* Γ, назовём сумму углов между последовательными кратчайшими разбиения:

$$\theta_\Gamma(x) = \sum_{i=1}^{n} \angle(\gamma_i, \gamma_{i+1}),$$

полным углом вокруг точки x назовём точную верхнюю грань углов вокруг x, подчинённых всевозможным разбиениям окрестности $V_\varepsilon(x)$, и обозначим этот угол через $\theta(x)$:

$$\theta(x) = \sup_\Gamma \theta_\Gamma(x).$$

Более подробное исследование полного угла можно найти в [1]. Говоря о пространствах Александрова, надо отметить, что некоторые их классы достаточно хорошо изучены. В частности, полные односвязные пространства Александрова неположительной кривизны получили название *пространств Адамара*. Целью настоящей работы является изучение пространств Адамара, являющихся двумерными топологическими многообразиями.

Определение 15. Полная (как метрическое пространство) односвязная поверхность Александрова кривизны не больше 0 называется *поверхностью Адамара*.

Отметим, что если полная односвязная поверхность Александрова имеет кривизну не больше $k < 0$, то в силу теоремы 11 она является поверхностью Адамара. Поэтому корректно говорить о поверхностях Адамара кривизны не больше k для отрицательных k.

Поверхности Адамара наследуют все свойства пространств Адамара. Пространства Адамара подробно изучены в [2, гл. 9]. Далее мы отметим их некоторые важные для нас свойства, сформулировав их уже для поверхностей.

Напомним, что *геодезической* в пространстве с внутренней метрикой называется локально кратчайшая кривая, т. е. если $\gamma\colon [0,l] \to X$ — геодезическая, то для любого $t \in [0,l]$ найдётся содержащий t отрезок $J \subset [0,l]$, такой что кривая $\gamma|_J$ является кратчайшей.

Теорема 16. *Любые две точки поверхности Адамара соединимы единственной геодезической. Кроме того, каждый геодезический отрезок на поверхности Адамара является кратчайшей.*

Следствие 17. *Кратчайшие на поверхности Адамара пересекаются не более чем в одной точке.*

Теорема 18. *Если (S,d) — поверхность Адамара кривизны не больше k, то условия сравнения треугольников (углов) и монотонности углов выполняются для всех треугольников на S, т. е. S является поверхностью кривизны не больше k «в целом».*

Доказательства теорем 16 и 18 можно найти в [2].

4. Продолжимость кратчайших на поверхностях Адамара

Определение 19. Пусть (X,d) — пространство с внутренней метрикой и $\gamma\colon [0,l] \to X$ — геодезическая (кратчайшая) в X. Геодезическую (соответственно кратчайшую) $\gamma'\colon [0,l'] \to X$, где $l' > l$, мы будем называть *продолжением* γ, если ограничение γ' на отрезок $[0,l]$ совпадает с γ.

Утверждение 20 (см. [2]). *Пусть (X,d) — полное пространство Александрова кривизны не больше 0, $\gamma\colon [0,l] \to X$ — геодезическая в X, $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$ и существует $\varepsilon > 0$, такое что проколотая окрестность $U_\varepsilon(b) \setminus \{b\}$ нестягиваема. Тогда γ продолжима за точку b.*

На поверхности Адамара (S,d) существование нестягиваемой проколотой окрестности $U_\varepsilon(b) \setminus \{b\}$ для точки $b \in S$ эквивалентно тому, что точка b внутренняя. Как мы видели в теореме 16, геодезическая на поверхности Адамара является кратчайшей. Поэтому справедлива следующая теорема о локальной продолжимости кратчайших.

Теорема 21. *Пусть (S,d) — поверхность Адамара, $\gamma\colon [0,l] \to S$ — кратчайшая на S, $\gamma(0) = a$, $\gamma(l) = b$, причём b — внутренняя точка поверхности. Тогда существует кратчайшая $\gamma'\colon [0,l+\varepsilon] \to S$, продолжающая γ.*

Поверхность Адамара будем называть *неограниченной*, если она не имеет края. Таким образом, каждая точка поверхности внутренняя, и тогда по теореме 21 любая кратчайшая на поверхности продолжима. Следующая теорема является следствием известной теоремы Хопфа—Ринова. Её доказательство можно найти, например, в [2]. Поскольку любой отрезок геодезической на поверхности Адамара является кратчайшей, теорема окажется справедливой и для поверхностей Адамара.

Теорема 22. *Пусть X — полное метрическое пространство, в котором каждая геодезическая продолжима за любую свою точку. Тогда каждая геодезическая γ является ограничением полной геодезической $\bar{\gamma}\colon \mathbb{R} \to X$, параметризованной длиной дуги.*

Следствие 23. *Любая кратчайшая на неограниченной поверхности Адамара бесконечно продолжима.*

В частности, если разделить полный угол в точке x конечным числом попарно различных кратчайших, то их можно продолжить сколь угодно далеко. По следствию 17 эти продолжения нигде в дальнейшем не пересекутся. Это наблюдение будет использовано в разделе 7.

5. Полный угол на поверхностях Адамара

Теорема 24. *Полный угол вокруг внутренней точки поверхности Адамара больше или равен 2π.*

Доказательство. Пусть x — внутренняя точка поверхности Адамара (S, d), и пусть $V_\varepsilon(x)$ — её окрестность, гомеоморфная замкнутому диску. Рассмотрим кратчайшую $\gamma\colon [0, \varepsilon] \to V_\varepsilon(x)$ с началом в произвольной точке a границы $\partial V_\varepsilon(x)$ окрестности и концом в точке x. Она продолжима по теореме 21. Пусть $\gamma'\colon [0, \varepsilon + \delta] \to S$ — её продолжение. Рассмотрим две кратчайшие в окрестности $V_\delta(x)$ с началом в точке x: $\gamma_1 = \gamma'|_{[\varepsilon, \varepsilon+\delta]}$ и $\gamma_2 = \gamma'|^{-1}_{[\varepsilon-\delta, \varepsilon]}$, где последняя идёт в направлении, обратном направлению кратчайшей γ'. Множество $\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ является разбиением окрестности $V_\delta(x)$, угол между γ_1 и γ_2 в точке x равен π. Следовательно, $\theta_\Gamma(x) = \angle(\gamma_1, \gamma_2) + \angle(\gamma_2, \gamma_1) = 2\pi$. Полный угол $\theta(x)$ вокруг точки x как супремум углов по всевозможным разбиениям окажется не меньше, чем $\theta_\Gamma(x)$. Теорема доказана. □

6. Отношение Штейнера гиперболических плоскостей

Н. Иннами и Б. Х. Ким показали [16], что отношение Штейнера гиперболической плоскости равно 1/2. В качестве граничных множеств, приближающих отношение Штейнера к 1/2, рассматривались вершины правильных многоугольников. В частности, было показано, что все точки Штейнера правильного

n-угольника находятся в некоторой окрестности центра многоугольника, независимо от удалённости граничных вершин от центра; размер окрестности зависит лишь от n. Известно [4], что деревья Штейнера на римановых многообразиях устроены следующим образом:

— вершины степени 1 являются граничными;
— точки Штейнера имеют степень 3, все углы при них равны $2\pi/3$.

В данной работе предлагается иное доказательство теоремы Иннами—Кима. Точное устройство деревьев Штейнера для множества вершин правильного многоугольника является, как мы увидим, несущественным для вычисления отношения Штейнера. Оказывается достаточным получить лишь верхнюю оценку отношения Штейнера, рассмотрев вместо деревьев Штейнера «немного» более длинные, но существенно проще устроенные деревья. Значимость предлагаемого доказательства заключается в том, что его можно повторить для неограниченных поверхностей Адамара кривизны не больше $k < 0$, обобщающих гиперболические плоскости.

Пусть (P_k, d_k) — поверхность постоянной гауссовой кривизны $k < 0$. Рассмотрим её модель Пуанкаре в круге. Пусть

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\} -$$

открытый диск с метрикой

$$dl^2 = \frac{4(dx^2 + dy^2)}{|k|(1 - x^2 - y^2)^2}.$$

Начало координат обозначим через O. Пусть $\alpha \in (0, \pi/4)$ — некоторый угол, $t \in (0, 1)$ — некоторое число, $\triangle OAB$ — равнобедренный треугольник с вершинами в точках O, $A = (t\cos\alpha, t\sin\alpha)$, $B = (t\cos\alpha, -t\sin\alpha)$ и углом 2α при вершине O (рис. 2).

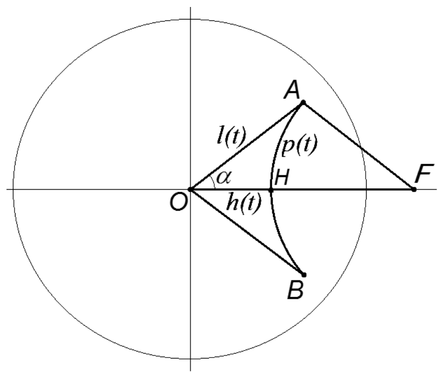

Рис. 2. Модель Пуанкаре гиперболической плоскости

Кратчайшая на P_k, соединяющая точки A и B, представляет собой в модели Пуанкаре дугу окружности, перпендикулярной к абсолюту $x^2 + y^2 = 1$. Обозначим эту окружность через $C(F, r)$, где F и r — её центр и радиус соответственно. Пусть H — точка пересечения кратчайшей $[AB]$ с осью абсцисс системы координат. Очевидно, что OH — высота, медиана и биссектриса в треугольнике $\triangle OAB$. Нетрудно вычислить абсциссу центра F и радиус r окружности:

$$x_F = \frac{t^2+1}{2t\cos\alpha}, \quad r = \frac{\sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1}}{2t\cos\alpha}.$$

Тогда абсцисса точки H равна

$$x_H = \frac{t^2 + 1 - \sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1}}{2t\cos\alpha}.$$

Лемма 25. *В сделанных обозначениях при $\alpha \in (0, \pi/4)$ справедливо неравенство*

$$x_H \leqslant \frac{1-\sin\alpha}{\cos\alpha} < 1.$$

Доказательство. Докажем сначала левое неравенство. Достаточно показать, что

$$t^2 - 2t(1-\sin\alpha) + 1 \leqslant \sqrt{t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1},$$

что в силу неотрицательности левой части эквивалентно

$$t^4 + 4t^2(1-\sin\alpha)^2 + 1 - 4t^3(1-\sin\alpha) - 4t(1-\sin\alpha) + 2t^2 \leqslant t^4 - 2t^2\cos 2\alpha + 1.$$

Сократим одинаковые слагаемые в левой и правой частях и затем поделим обе части неравенства на $2t > 0$:

$$2t(1-\sin\alpha)^2 - 2t^2(1-\sin\alpha) - 2(1-\sin\alpha) + t \leqslant -t\cos 2\alpha.$$

Раскроем квадрат в левой части, выразим $\cos 2\alpha$ через $2\cos^2\alpha - 1$ и перенесем все слагаемые в левую часть, сгруппировав их по степеням t. Получим

$$-2(1-\sin\alpha)t^2 + 4(1-\sin\alpha)t - 2(1-\sin\alpha) \leqslant 0.$$

Разделим неравенство на $2(\sin\alpha - 1) < 0$. Знак неравенства при этом поменяется:

$$t^2 - 2t + 1 \geqslant 0.$$

Последнее неравенство справедливо при любых t. Итак, мы доказали левое неравенство утверждения леммы.

Для доказательства правого неравенства заметим, что

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right),$$

что в силу выбора угла $\alpha \in (0, \pi/4)$ строго больше, чем 1. Лемма доказана. $\square$

Расстояние на P_k от центра O до точки, отстоящей в модели диска от O на евклидово расстояние s, равно

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \ln\frac{1+s}{1-s},$$

поэтому для длины $h(t)$ отрезка $[OH]$ на P_k справедлива в силу леммы 25 следующая оценка:

$$h(t) \leqslant M(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{|k|}} \ln \frac{\cos\alpha - \sin\alpha + 1}{\cos\alpha + \sin\alpha - 1}. \tag{2}$$

Обозначим через $l(t)$ длину отрезка $[OA]$ на P_k, равную

$$\frac{1}{\sqrt{|k|}} \ln \frac{1+t}{1-t}.$$

Очевидно, что

$$\lim_{t\to 1} l(t) = +\infty.$$

Длина $p(t)$ отрезка $[AH]$ на P_k оценивается по неравенству треугольника в $\triangle AHO$, что вместе с (2) даёт нам оценку

$$l(t) - M(\alpha) \leqslant p(t) \leqslant l(t) + M(\alpha). \tag{3}$$

Из этого неравенства видно, что длина $[AH]$ также стремится к бесконечности при $t \to 1$. Разделив неравенство (3) на $l(t)$, получим

$$1 - \frac{M(\alpha)}{l(t)} \leqslant \frac{p(t)}{l(t)} \leqslant 1 + \frac{M(\alpha)}{l(t)}.$$

В силу ограниченности величины $M(\alpha)$ получаем

$$\lim_{t\to 1} \frac{p(t)}{l(t)} = 1.$$

Длина основания $[AB]$ на P_k равна $2p(t)$. Таким образом, справедлива следующая лемма.

Лемма 26. *Пусть $\gamma_1, \gamma_2 \colon [0,+\infty) \to P_k$ — натурально параметризованные геодезические на гиперболической плоскости (P_k, d_k), исходящие из одной точки под углом $\alpha \in (0, \pi/2)$. Тогда*

$$\lim_{t\to\infty} \frac{d_k\bigl(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\bigr)}{t} = 2.$$

Иными словами, равнобедренный треугольник с фиксированным острым углом α между боковыми сторонами все более вырождается по мере увеличения боковых сторон.

Рассмотрим произвольную точку O на P_k и выпустим из неё n натурально параметризованных геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, разделяющих полный угол в точке O на n равных углов (равных $2\pi/n$). Пусть $M_{n,t} = \{\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t)\}$ — множество точек на геодезических $\gamma_1, \dots, \gamma_n$, равноотстоящих от точки O на расстояние t. Заметим, что при $i, j = 1, \dots, n$, $i \neq j$, угол $\angle\bigl(\gamma_i(t), \gamma_j(t)\bigr)$ в точке O не меньше, чем $2\pi/n$. Поэтому по лемме 12 и замечанию 14 для треугольников $\triangle\gamma_1(t)O\gamma_2(t)$

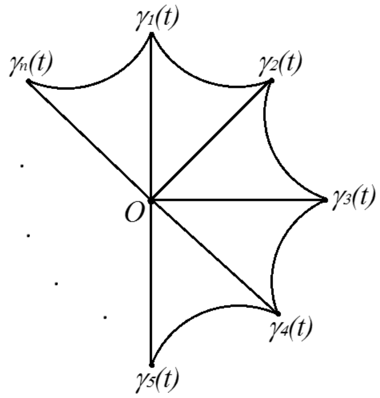

Рис. 3. $\mathrm{MST}(M_{n,t})$ и $T_{n,t}$

и $\triangle\gamma_i(t)O\gamma_j(t)$ получаем $d_k\big(\gamma_i(t),\gamma_j(t)\big) \geqslant d_k\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)$. Следовательно, минимальное остовное дерево для $M_{n,t}$ представляет собой все стороны многоугольника $\gamma_1(t)\gamma_2(t)\ldots\gamma_n(t)$ без одной (рис. 3), и его длина равна

$$d_k\big(\mathrm{MST}(M_{n,t})\big) = (n-1)\cdot d_k\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big). \tag{4}$$

Рассмотрим дерево $T_{n,t}$ на P_k с множеством вершин

$$V(T_{n,t}) = \{O, \gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t)\}$$

и множеством рёбер

$$E(T_{n,t}) = \{[O\gamma_1(t)], \ldots, [O\gamma_n(t)]\}$$

(см. рис. 3). Длина дерева $T_{n,t}$ равна

$$d_k(T_{n,t}) = n\cdot t. \tag{5}$$

Так как $T_{n,t}$ соединяет точки граничного множества $M_{n,t}$, то длина дерева Штейнера для $M_{n,t}$ не превосходит длины дерева $T_{n,t}$:

$$d_k\big(\mathrm{SMT}(M_{n,t})\big) \leqslant d_k(T_{n,t}). \tag{6}$$

Рассмотрим функцию

$$r_n(t) = \frac{d_k(T_{n,t})}{d_k\big(\mathrm{MST}(M_{n,t})\big)}. \tag{7}$$

Ввиду неравенства (6) имеем $\mathrm{sr}(M_{n,t}) \leqslant r_n(t)$. Подставляя (4), (5) в (7), получаем

$$r_n(t) = \frac{n}{n-1}\cdot\frac{t}{d_k\big(\gamma_1(t),\gamma_2(t)\big)}, \tag{8}$$

и в силу леммы 26

$$\lim_{t\to\infty} r_n(t) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Устремляя n к бесконечности, получаем

$$\lim_{n\to\infty,\, t\to\infty} r_n(t) = \frac{1}{2}. \tag{9}$$

Это означает, что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральное n и вещественное $t > 0$, такие что $r_n(t) \leqslant 1/2 + \varepsilon$. В частности, отсюда следует ввиду неравенства $\mathrm{sr}(M_{n,t}) \leqslant r_n(t)$, что отношение Штейнера гиперболической плоскости $\mathrm{sr}(P_k)$ не превосходит $1/2$, а учитывая нижнюю оценку в формуле (1), имеем окончательно

$$\mathrm{sr}(P_k) = 1/2.$$

Таким образом, дерево $T_{n,t}$, топологически представляющее собой «звезду» из n рёбер, оказывается мало отличающимся по длине от дерева Штейнера для множества $M_{n,t}$ при $n \to \infty$, $t \to \infty$.

7. Отношение Штейнера поверхностей Адамара

В этом разделе мы «перенесём» описанную в предыдущем разделе «звезду» с гиперболической плоскости на неограниченную поверхность Адамара и тем самым получим аналогичную оценку отношения Штейнера. Пусть (S, d) — неограниченная поверхность Адамара кривизны не больше $k < 0$. По теореме 24 полный угол $\theta(x)$ вокруг точки x больше или равен 2π. Для корректного переноса «звезды» нам понадобится следующая лемма.

Лемма 27. *Пусть X — пространство Александрова кривизны не больше k, $\triangle a'b'c'$ — треугольник, лежащий в некоторой нормальной окрестности в X, а $\triangle abc$ — такой треугольник на k-плоскости, что $|a'b'| = |ab|_k$, $|a'c'| = |ac|_k$, $\angle b'a'c' \geqslant \angle bac$. Тогда $|b'c'| \geqslant |bc|_k$.*

Доказательство. Пусть $\triangle\tilde a\tilde b\tilde c$ — треугольник сравнения на k-плоскости для $\triangle a'b'c'$, т. е. $|a'b'| = |\tilde a\tilde b|_k$, $|a'c'| = |\tilde a\tilde c|_k$, $|b'c'| = |\tilde b\tilde c|_k$. Условие сравнения углов даёт $\angle b'a'c' \leqslant \angle\tilde b\tilde a\tilde c$. Следовательно, $\angle bac \leqslant \angle b'a'c' \leqslant \tilde b\tilde a\tilde c$. По лемме 12 и замечанию 14 для треугольников $\triangle abc$ и $\triangle\tilde a\tilde b\tilde c$ на k-плоскости $|bc|_k \leqslant |\tilde b\tilde c|_k = |b'c'|$. □

Возьмём натуральное $n \geqslant 4$. Выпустим из точки x в окрестности $V_\varepsilon(x)$, фигурирующей в определении полного угла вокруг x, натурально параметризованные кратчайшие $\gamma'_1, \dots, \gamma'_n$, такие что $\angle(\gamma'_i, \gamma'_{i+1}) = 2\pi/n$, $i = 1, \dots, n-1$. Заметим, что $\angle(\gamma'_1, \gamma'_n) \geqslant 2\pi/n$. По следствию 23 эти кратчайшие бесконечно продолжимы, в дальнейшем они нигде не пересекаются согласно следствию 17.

Лемма 28. *Для любых натуральных $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$, и произвольного $t \in (0, +\infty)$ справедливо неравенство*

$$d\big(\gamma'_i(t), \gamma'_j(t)\big) \geqslant d_k\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big),$$

где $d_k\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$ *обозначает длину стороны правильного n-угольника $M_{n,t}$ на k-плоскости P_k.*

Доказательство. Для угла

$$\angle(\gamma_i', \gamma_j') = \min\left\{\frac{2\pi}{n}|j-i|,\, \theta(x) - \frac{2\pi}{n}|j-i|,\, \pi\right\}$$

справедливо неравенство

$$\angle(\gamma_i', \gamma_j') \geqslant \frac{2\pi}{n}.$$

Рассмотрим треугольник $\triangle\gamma_i'(t)x\gamma_j'(t)$ на поверхности S и треугольник $\triangle\gamma_1(t)O\gamma_2(t)$ на k-плоскости P_k. Вся поверхность S является нормальной окрестностью по теореме 18, поэтому к треугольникам применима лемма 27, устанавливающая требуемое неравенство. □

Рассмотрим для каждого $t > 0$ множество $M_{n,t}' = \{\gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\}$. Из леммы 28 следует, что все попарные расстояния между точками множества $M_{n,t}'$ не меньше, чем $d_k\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big)$. Поэтому очевидна следующая оценка длины минимального остовного дерева для множества $M_{n,t}'$:

$$d\big(\mathrm{MST}(M_{n,t}')\big) \geqslant (n-1)d_k\big(\gamma_1(t), \gamma_2(t)\big).$$

В правой части неравенства стоит длина минимального остовного дерева для множества $M_{n,t}$ на k-плоскости P_k (формула (4)). Фактически мы доказали следующую лемму.

Лемма 29. $d\big(\mathrm{MST}(M_{n,t}')\big) \geqslant d_k\big(\mathrm{MST}(M_{n,t})\big)$.

Пусть $T_{n,t}'$ — дерево на S с множеством вершин

$$V(T_{n,t}') = \{x, \gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t)\}$$

и множеством рёбер

$$E(T_{n,t}') = \{[x\gamma_1'(t)], \ldots, [x\gamma_n'(t)]\}.$$

Длина $d(T_{n,t}')$ дерева $T_{n,t}'$ равна nt. Пользуясь (5), получаем следующее тождество.

Лемма 30. $d(T_{n,t}') = d_k(T_{n,t})$.

Рассмотрим подобно (7) функцию

$$r_n'(t) = \frac{d(T_{n,t}')}{d\big(\mathrm{MST}(M_{n,t}')\big)}.$$

Тогда в силу лемм 29 и 30

$$r_n'(t) \leqslant r_n(t). \tag{10}$$

Рассмотрим функцию

$$\mathrm{sr}_n'(t) = \frac{d\big(\mathrm{SMT}(M_{n,t}')\big)}{d\big(\mathrm{MST}(M_{n,t}')\big)},$$

равную отношению Штейнера для множества $M'_{n,t}$. Так как дерево $T'_{n,t}$ соединяет множество $M'_{n,t}$, то $d\big(\mathrm{SMT}(M'_{n,t})\big) \leqslant d(T'_{n,t})$. Следовательно, $\mathrm{sr}'_n(t) \leqslant r'_n(t)$, и, учитывая неравенство (10), мы получаем $\mathrm{sr}'_n(t) \leqslant r_n(t)$. Переходя к пределу при $n \to \infty$ и $t \to \infty$ и пользуясь (9), получаем

$$\lim_{n\to\infty,\, t\to\infty} \mathrm{sr}'_n(t) \leqslant \frac{1}{2},$$

откуда следует, что $\mathrm{sr}(S) \leqslant 1/2$. Учитывая нижнюю оценку в формуле (1), получаем, что $\mathrm{sr}(S) = 1/2$. Таким образом, нами доказана теорема 1.

Литература

[1] Александров А. Д., Залгаллер В. А. Двумерные многообразия ограниченной кривизны // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1962. — Т. 63.

[2] Бураго Д. Ю., Бураго Ю. Д., Иванов С. В. Курс метрической геометрии. — М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2004.

[3] Завальнюк Е. А. Локальная структура минимальных сетей в пространствах Александрова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — Принята в печать.

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Геометрия минимальных сетей и одномерная проблема Плато // Успехи мат. наук. — 1992. — Т. 47, № 2. — С. 53—115.

[5] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — М., Ижевск: Ин-т компьютерных исследований, 2003.

[6] Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для римановых многообразий // Успехи мат. наук. — 2000. — Т. 55, № 6. — С. 139—140.

[7] Мищенко В. А. Отношение Штейнера—Громова римановых многообразий // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — В печати.

[8] Овсянников З. Н. Отношения Штейнера, Штейнера—Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа // Фундамент. и прикл. мат. — 2013. — Т. 18, вып. 2. — С. 157—165.

[9] Пахомова А. С. Критерий непрерывности отношений типа Штейнера в пространстве Громова—Хаусдорфа // Мат. заметки. — Принята в печать.

[10] Пахомова А. С. Оценки для суботношения Штейнера и отношения Штейнера—Громова // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — Принята в печать.

[11] Cieslik D. The Steiner ratio of $\mathcal{L}^d_{2k}$ // Discrete Appl. Math. — 1999. — Vol. 95. — P. 217—221.

[12] Cieslik D. The Steiner Ratio. — Boston: Kluwer Academic, 2001.

[13] Gao B., Du D. Z., Graham R. L. A tight lower bound for the Steiner ratio in Minkowski planes // Discrete Math. — 1995. — Vol. 142. — P. 49—63.

[14] Gilbert E. N., Pollak H. O. Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1968. — Vol. 16, no. 1. — P. 1—29.

[15] Graham R. L., Hwang F. K. A remark on Steiner minimal trees // Bull. Inst. Math. Acad. Sinica. — 1976. — Vol. 4. — P. 177—182.

[16] Innami N., Kim B. H. Steiner ratio for hyperbolic surfaces // Proc. Japan Acad. — 2006. — Vol. 82. Ser. A.

[17] Innami N., Naya S. A comparison theorem for Steiner minimum trees in surfaces with curvature bounded below // Tôhoku Math. J. — 2013. — Vol. 65, no. 1. — P. 131—157.

[18] Ivanov A., Tuzhilin A. Differential calculus on the space of Steiner minimal trees in Riemannian manifolds // Sb. Math. — 2001. — Vol. 192, no. 6. — P. 823—841.

[19] Ivanov A., Tuzhilin A. The Steiner ratio Gilbert—Pollak conjecture is still open // Algorithmica. — 2012. — Vol. 62, no. 1-2. — P. 630—632.

[20] Rubinstein J. H., Weng J. F. Compression theorems and Steiner ratios on spheres // J. Combin. Opt. — 1997. — Vol. 1. — P. 67—78.