Вид минимальных разветвлённых геодезических в нормированном пространстве определяет норму

И. Л. ЛАУТ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ilautster@gmail.com

З. Н. ОВСЯННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: agent.wd28@gmail.com

УДК 514.77+519.176

Ключевые слова: точка Ферма, разветвлённая геодезическая, нормированное пространство.

Аннотация

В данной работе исследуется вопрос, обратный задаче поиска минимальных разветвлённых геодезических в нормированных пространствах. А именно, пусть задано нормированное пространство. Тогда определён вид минимальных разветвлённых геодезических в нём. Требуется найти все возможные нормы, для которых вид минимальных разветвлённых геодезических совпадает с заданным. В работе подробно разобран случай евклидовых норм.

Abstract

I. L. Laut, Z. N. Ovsyannikov, The type of minimal branching geodesics defines the norm in a normed space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 67—77.

In this paper, we investigate the inverse problem to the minimal branching geodesic searching problem in a normed space. Let us consider a normed space. Then the form of the minimal branching geodesic is determined. We must find all possible normed spaces with the same form of the minimal branching geodesics as the one in the considered normed space. The case of Euclidean norms is analyzed in detail.

1. Введение

Хорошо известно, что в некоторых нормированных пространствах кратчайшая линия, соединяющая две точки, не всегда единственна. Рассмотрим, например, двумерную манхэттенскую плоскость (ℓ_1^2), а именно плоскость с ℓ_1-нормой. Для точек $(0,0)$ и $(1,1)$, расстояние между которыми равно 2, любая непрерывная кривая с параметром t, такая что $x(t)$ и $y(t)$ — монотонно неубывающие функции ($x(0) = y(0) = 0$, $x(1) = y(1) = 1$), имеет длину 2. С другой

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 67—77.

стороны, для обычной евклидовой плоскости кратчайшая всегда единственна. Соответственно, манхэттенская и евклидова плоскости различимы по тому, какие кратчайшие кривые в них возможны. Однако по виду возможных кратчайших можно различать между собой лишь некоторые нестрого выпуклые нормы: для любой строго выпуклой нормы верно, что кратчайшая между двумя точками единственна и является прямолинейным отрезком между ними. Возникает естественный вопрос: нельзя ли использовать обобщение понятия кратчайшей для более детальной классификации нормированных пространств? Простое следствие из основной теоремы работы [2] говорит, что евклидова норма в размерности больше 2 однозначно распознаётся по устройству кратчайших сетей на трёх точках (разветвлённых кратчайших кривых). В данной работе изучается возможность различать нормы по устройству кратчайших сетей на трёх точках. Удалось сильно сузить множество норм, неразличимых с евклидовой в двумерном случае.

2. Необходимые определения

Пусть X — нормированное пространство, $\gamma\colon [a,b] \to X$ — некоторая непрерывная кривая. Кривая γ называется *измеримой*, если существует предел $\ell(\gamma)$ длин ломаных, вписанных в эту кривую, при стремящемся к 0 диаметру разбиения отрезка $[a,b]$ прообразами вершин ломаных. Число $\ell(\gamma)$ называется в этом случае *длиной кривой* γ.

Точкой Ферма трёх точек A, B, C в метрическом пространстве (M,ρ) называется точка $T \in M$, минимизирующая сумму $\rho(A,T) + \rho(B,T) + \rho(C,T)$. В зависимости от метрического пространства точка Ферма может не существовать или быть неединственной.

Норма в нормированном пространстве называется *строго выпуклой*, если единичный шар в этой норме является строго выпуклым множеством.

Напомним, что *банахово пространство* — это полное нормированное векторное пространство, а *гильбертово пространство* — банахово пространство, норма которого порождена положительно определённым скалярным произведением.

3. Различимость нормированных пространств по устройству кратчайших

В любом нормированном пространстве выполнено неравенство треугольника, поэтому прямолинейный отрезок между двумя точками всегда будет (возможно, не единственной) кратчайшей между данными двумя точками.

Две нормы на векторном пространстве будем называть *неразличимыми по устройству кратчайших*, если для любых двух точек множества кратчайших между ними в первой и второй норме совпадают.

Как уже упоминалось во введении, для любых двух точек в любой строго выпуклой норме существует лишь одна кратчайшая, их соединяющая, т. е. для любых двух точек вид кратчайшей определён (это отрезок) и не зависит от нормы (при условии её строгой выпуклости), а значит, все строго выпуклые нормы не могут быть различимы между собой при помощи видов кратчайших. Но для норм, заданных центрально симметричным выпуклым многогранником произвольной размерности, всё же можно получить некоторую классификацию по видам кратчайших.

Будем называть норму *многогранной*, если её единичная сфера является многогранником. Обозначим единичную сферу некоторой многогранной нормы n-мерного пространства N через Ω. Рассмотрим относительные внутренности всех граней Ω всех размерностей. Заметим, что они образуют разбиение Ω. Это означает, что конусы с исключённой вершиной в 0 и основаниями — относительными внутренностями граней Ω образуют разбиение $N \setminus \{0\}$, обозначим это разбиение через $\tilde{\Omega}$. Теперь для каждой точки $P \in N \setminus \{0\}$ обозначим через OG_P конус из $\tilde{\Omega}$, которому принадлежит открытый луч (OP) с началом в O (для удобства будем обозначать 0 пространства N через O при его рассмотрении как точки); через G_P обозначим относительную внутренность грани, являющуюся основанием конуса OG_P.

Утверждение. *Пусть N — нормированное пространство размерности n с многогранной нормой. Тогда для любого $P \in \Omega$ измеримая кривая $\gamma\colon [0,1] \to N$, $\gamma(0) = O$, $\gamma(1) = P$, является кратчайшей между O и P тогда и только тогда, когда для любых a, b, таких что $a < b$, $a, b \in [0,1]$, вектор $\gamma(a)\gamma(b)$ принадлежит $\overline{OG_P}$.*

Доказательство. ($\Longleftarrow$) Пусть T — любое разбиение отрезка $[0,1]$, задающееся последовательностью

$$\{t_i\}_{i=0}^{m}\colon t_0 = 0,\ t_m = 1,\ t_i \leqslant t_j \text{ для всех } i, j,\ 0 \leqslant i \leqslant j \leqslant m\}.$$

Обозначим диаметр разбиения T через $s(T)$. Спроецируем все векторы $v_i := \gamma(t_i)\gamma(t_{i+1})$ на вектор $v := OP$ параллельно любой гиперплоскости π, являющейся опорной к сфере Ω и такой, что $G_P = \Omega \cap \pi$, обозначим оператор проекции через A. Заметим, что A не меняет норму векторов, параллельных какому-либо вектору из $\overline{OG_P}$, и уменьшает норму остальных. Поскольку для всех $i \in [0, m-1]$ вектор v_i принадлежит $\overline{OG_P}$, то $\|v_i\| = \|Av_i\|$. Это означает, что

$$\ell(\gamma) = \lim_{s(T)\to 0} \sum_{i=0}^{m} \|v_i\| = \lim_{s(T)\to 0} \sum_{i=0}^{m} \|Av_i\| = \|OP\|,$$

что и требовалось доказать.

($\Longrightarrow$) Докажем от противного. Пусть γ — кратчайшая кривая между O и P, $\gamma(0) = O$, $\gamma(1) = P$. Пусть найдутся $a, b \in [0,1]$, такие что $a < b$, $\gamma(a)\gamma(b) \notin \overline{OG_P}$. Покажем в этом случае, что длина кривой γ больше, чем

$\|OP\|$. Действительно, длина γ не меньше длины ломаной $O\gamma(a)\gamma(b)P$, которая равна $\|O\gamma(a)\| + \|\gamma(a)\gamma(b)\| + \|\gamma(b)P\|$. По предположению $\gamma(a)\gamma(b) \notin \overline{OG_P}$. Возможны два варианта.

1. $\gamma(b)\gamma(a) \in \overline{OG_P}$. Тогда длина ломаной больше либо равна

$$\|OP\| + 2 \cdot \|\gamma(a)\gamma(b)\| = \|OP\| + 2 \cdot \big\|A\big(\gamma(a)\gamma(b)\big)\big\| > \|OP\|$$

(поскольку в этом случае если ввести ориентацию на прямой OP «O левее P», то проекция $A\big(\gamma(b)\big)$ окажется левее, чем $A\big(\gamma(a)\big)$).

2. $\gamma(b)\gamma(a) \notin \overline{OG_P}$. Тогда длина ломаной больше, чем

$$\big\|A\big(O\gamma(a)\big)\big\| + \big\|A\big(\gamma(a)\gamma(b)\big)\big\| + \big\|A\big(\gamma(b)P\big)\big\| \geqslant \|OP\|,$$

противоречие. □

Критерий 1. *Две многогранные нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ на линейном n-мерном пространстве N неразличимы по устройству кратчайших тогда и только тогда, когда у этих двух норм совпадают разбиения $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$ на конусы.*

Доказательство. ($\Longleftarrow$) По утверждению кратчайшие в нормах $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ удовлетворяют совпадающим описаниям, что и требовалось.

($\Longrightarrow$) Докажем от противного. Пусть нормы $\|\cdot\|_1$ и $\|\cdot\|_2$ неразличимы, но у них не совпадают разбиения на конусы $\tilde{\Omega}_1$ и $\tilde{\Omega}_2$. Это означает, что найдётся такая точка $P \in N \setminus \{O\}$, что $OG_P^1 \neq OG_P^2$. Без ограничения общности можно считать, что найдётся $v_1 \in OG_P^1$, $v_1 \notin OG_P^2$. Построим кривую, являющуюся кратчайшей в $\|\cdot\|_1$ и не являющуюся кратчайшей в $\|\cdot\|_2$.

Рассмотрим вектор $OP - \varepsilon v_1$. OG_P^1 — относительно открытый конус, поэтому найдётся $\varepsilon > 0$, такой что $OP - \varepsilon v_1 \in OG_P^1$. Обозначим точку $P - \varepsilon v_1$ через L. Тогда длина ломаной OLP в $\|\cdot\|_1$ равна $\|OP\|_1$ и OLP — кратчайшая. Вместе с тем $v_1 \notin OG_P^2$, и длина ломаной OLP в норме $\|\cdot\|_2$ больше $\|OP\|_2$, противоречие. □

4. Случай евклидовой нормы

По устройству кратчайших отличить евклидову норму от остальных строго выпуклых норм невозможно. Оказывается, для этих целей полезно рассмотреть обобщение кратчайших кривых между двумя точками, а именно кратчайшие сети на трёх точках, «тройники» с разветвлением в точке Ферма этих трёх точек.

Две нормы на векторном пространстве будем называть *F_3-неразличимыми*, если для любых трёх точек множества их точек Ферма в первой и второй норме совпадают.

Теорема 1. *Пусть дано пространство $\mathbb{R}^2$ с евклидовой нормой. Тогда для любой строго выпуклой нормы, единичная окружность которой симметрична относительно поворота на $60°$, верно, что эта норма и евклидова норма F_3-неразличимы.*

Прежде чем перейти к доказательству теоремы 1, разберём необходимые для этого леммы.

Лемма о лучах. *Пусть в векторной плоскости с заданной нормой заданы четыре попарно несовпадающие точки u, v, w и t. Лучи с началом в t, направленные к u, v, w, обозначим соответственно R_{tu}, R_{tv}, R_{tw}. Тогда t — точка Ферма для $\{u, v, w\}$, если и только если t — точка Ферма для $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ — любые точки лучей R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} соответственно.*

Доказательство. Заметим сначала, что утверждение справедливо для более узкого класса троек точек, а именно $\{\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, полученных из данной тройки $\{u, v, w\}$ при помощи гомотетии с неотрицательным коэффициентом с центром в t (поскольку точка Ферма образов тройки точек при гомотетии будет образом точки Ферма изначальной тройки точек). Теперь пусть есть две тройки точек $\{u_1, v_1, w_1\}$ и $\{u_2, v_2, w_2\}$, такие что для первой тройки t является точкой Ферма, а для второй нет. Тогда для второй тройки проведём сжимающую гомотетию с центром t так, чтобы образы точек u_2, v_2, w_2 при гомотетии (назовём их соответственно u_2', v_2', w_2') оказались соответственно на отрезках tu_1, tv_1 и tw_1. Заметим, что точка t не является точкой Ферма для тройки $\{u_2', v_2', w_2'\}$ (назовём точку Ферма этих точек t'), поэтому сеть из отрезков tu_2', tv_2', tw_2' между точками u_2', v_2', w_2' заменим на сеть из отрезков $t'u_2'$, $t'v_2'$, $t'w_2'$. При этом сеть для u_2', v_2', w_2' станет короче, а значит, и для u_1, v_1, w_1 сеть, состоящая из отрезков u_1u_2', v_1v_2', w_1w_2' и $t'u_2'$, $t'v_2'$, $t'w_2'$, окажется короче сети из отрезков tu_1, tv_1, tw_1. По неравенству треугольника имеем

$$\|u_1u_2'\| + \|v_1v_2'\| + \|w_1w_2'\| + \|t'u_2'\| + \|t'v_2'\| + \|t'w_2'\| > \|t'u_1\| + \|t'v_1\| + \|t'w_1\|,$$

противоречие. □

Аналогичными рассуждениями можно получить следующий результат в вырожденном случае.

Вырожденная лемма о лучах. *Пусть в векторной плоскости с заданной нормой заданы три попарно несовпадающие точки u, v, w и $t = u$. Лучи с началом в t, направленные на v, w, назовём соответственно R_{tv}, R_{tw}. Тогда t — точка Ферма для $\{u, v, w\}$, если и только если t — точка Ферма для $\{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, где $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ — любые точки с лучей R_{tv}, R_{tw} соответственно.* □

Лемма о местонахождении точки Ферма. *Точка Ферма t треугольника uvw лежит внутри или на границе этого треугольника* (*в случае двумерного пространства*).

Доказательство. Пусть точка t лежит вне треугольника. Тогда один из лучей R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} пересекает относительную внутренность одной из сторон треугольника. Без ограничения общности будем считать, что луч R_{tv} пересекает сторону uw в точке $\tilde{v}$. Тогда по лемме о лучах точка t является точкой Ферма вырожденного треугольника $u\tilde{v}w$, что невозможно. □

Доказательство теоремы 1. Докажем, что для любой данной нормы ρ, единичная окружность которой — строго выпуклая фигура, симметричная относительно поворота на 60°, точки Ферма на любых трёх точках в данной и евклидовой норме совпадают.

Возьмём любой единичный по норме ρ вектор u, а также его образы v и w при поворотах на 120° и 240°. Покажем, что точка Ферма точек—концов векторов u, v, w единственна и равна 0. Будем называть все треугольники, полученные таким образом, *треугольниками типа* TS.

Функция

$$s(x) = \|u - x\|_\rho + \|v - x\|_\rho + \|w - x\|_\rho$$

является строго выпуклой, так как единичная окружность в норме ρ строго выпукла и точки u, v, w не лежат на одной прямой. Это означает, что у функции $s(x)$ минимум существует и единствен. Это же рассуждение работает для любого невырожденного треугольника, не имеющего совпадающих вершин, т. е. для любого невырожденного треугольника точка Ферма в строго выпуклой норме существует и единственна. Для вырожденных же треугольников точка Ферма единственна и совпадает со средней из трёх вершин на прямой.

Предположим, что точка Ферма точек u, v, w — это $t \neq 0$. Тогда совершим поворот относительно 0 на угол 120°. При этом преобразовании вектора u, v, w перейдут друг в друга по циклу, а преобразование будет изометрией (так как единичная окружность симметрична относительно поворота на 60°). Это означает, что образ t при повороте является точкой Ферма образов u, v, w. Получается, что у u, v, w есть по крайней мере две точки Ферма, противоречие.

По лемме о лучах все треугольники uvw, внутри которых есть точка t, из которой все стороны треугольника видны под углом 120°, имеют точку t точкой Ферма. Действительно, в этом случае на лучах R_{tu}, R_{tv}, R_{tw} можно найти точки $\tilde{u}$, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$, являющиеся вершинами параллельно перенесённого треугольника типа TS, для которого, как уже доказано, точка t является точкой Ферма. Тогда по лемме о лучах точка t является точкой Ферма и для треугольника uvw.

Легко убедиться, что такая точка внутри треугольника существует и она совпадает с евклидовой точкой Ферма тогда и только тогда, когда все углы треугольника меньше 120°.

Осталось доказать совпадение точек Ферма в евклидовой и данной норме для треугольников, один из углов которых больше 120°. Для евклидовой нормы точкой Ферма в этом случае станет вершина тупого угла. Покажем то же для данной нормы, для этого нам потребуется лемма о местонахождении точки Ферма.

Предположим, что точка Ферма t некоторого треугольника с вершинами u, v, w и углом при вершине v, больше либо равным 120°, не совпала с v. Покажем сначала, что точка t не могла совпасть с вершинами u и w. Предположим обратное. Пусть, без ограничения общности, t совпала с u. Возьмём на лучах R_{tv}, R_{tw} точки $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ соответственно так, чтобы отрезки $u\tilde{v}$, $u\tilde{w}$ были равны в евклидовой норме. Угол $\angle vuw$ меньше 60°, поэтому в треугольнике с вершинами u, $\tilde{v}$, $\tilde{w}$ (который является равнобедренным в евклидовой норме со всеми углами меньше 120°) существует точка $\tilde{t}$, такая что все его стороны видны под углами 120°, что делает $\tilde{t}$ второй точкой Ферма для треугольника $\{u, \tilde{v}, \tilde{w}\}$, противоречие.

Таким образом, t не совпадает ни с одной вершиной. Проведём лучи R_{tu}, R_{tv}, R_{tw}. Внутри или на границе треугольника с вершинами u, v, w нет такой точки, что отрезки uv, vw, wu видны из неё под углом в 120°, и точка t не исключение. Возьмём на луче R_{tv} такую точку $\tilde{v}$, что угол $\angle u\tilde{v}w$ равен 90° (такая найдётся по непрерывности: для v указанный угол больше 120°, а при устремлении $\tilde{v}$ по лучу R_{tv} к бесконечности он стремится к 0). По лемме о лучах для треугольника $\{u, \tilde{v}, w\}$ точка t является точкой Ферма. Но для этого треугольника существует точка $\tilde{t}$, такая что все его стороны видны под углом 120°, что делает $\tilde{t}$ второй точкой Ферма для треугольника $\{u, \tilde{v}, w\}$, противоречие. Теорема 1 доказана. $\square$

Следующая теорема является частичным обращением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть дано пространство $\mathbb{R}^2$ с введённой евклидовой нормой. Пусть на этом пространстве также введена другая норма, F_3-неразличимая с евклидовой, единичная окружность которой удовлетворяет следующему условию: записанная в полярных координатах как 2π-периодическая функция $r(\varphi)$, она дифференцируема всюду, кроме конечного числа точек на периоде (обозначим множество точек дифференцируемости через $I_0 \subset \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). Тогда $r(\varphi) = r(\varphi + \pi/3)$ для всех φ.*

Доказательство. Заметим, что если I_1 и I_2 — сдвиги I_0 на $2\pi/3$ и $-\pi/3$ соответственно, то для $I = I_0 \cap I_1 \cap I_2$ множество $[0, 2\pi) \setminus I$ будет состоять из конечного числа точек. Пусть $\varphi_0 \in I$ (в этом случае $\varphi_0 + 2\pi/3 \in I$ и $\varphi_0 - 2\pi/3 \in I$).

Поскольку мы имеем дело с двумя нормами одновременно, введём следующие обозначения: выберем некоторые евклидовы координаты с центром в O, тогда $r(\varphi)$ — единичная окружность другой нормы в полярных координатах, согласованных с евклидовыми, $\rho(x, y)$ — другая норма вектора с координатами (x, y), норма $\|\cdot\|$ измеряется другой нормой, а «длина» и «скалярное произведение» $(\cdot,\cdot)$ — евклидовой. Нам также понадобится евклидова норма, которую будем обозначать $\|\cdot\|_{\mathrm{e}}$.

Рассмотрим три точки в полярных координатах на лучах из 0, имеющих попарные углы $2\pi/3$, сделав замену координат $(r, \varphi) \to (r, \varphi - \varphi_0)$, возьмём

$$P_1 = \bigl(r(0), 0\bigr), \quad P_2 = \left(r\left(\frac{2\pi}{3}\right), \frac{2\pi}{3}\right), \quad P_3 = \left(r\left(\frac{4\pi}{3}\right), \frac{4\pi}{3}\right).$$

Пусть векторы e_1, e_2, e_3 — градиенты $\rho(x, y)$ в точках P_1, P_2, P_3 соответственно. Векторы OP_i обозначим r_i. Норма ρ F_3-неразличима с евклидовой, поэтому точка Ферма для P_1, P_2, P_3 в норме ρ — это точка O. По формуле первой вариации нормы отрезка с подвижными концами [1] для dr — малого перемещения точки P_i — имеем $\|r_i + dr\| - \|r_i\| = (e_i, dr) + o(\|dr\|)$. Первая вариация суммы норм отрезков OP_1, OP_2, OP_3 при малом перемещении dr точки O равна $-(e_1+e_2+e_3, dr)$ (минус перед формулой возник за счёт того, что перемещается другой конец отрезка). Если при каком-либо dr это скалярное произведение не равно 0, то при сдвиге на $\pm dr$ произойдёт уменьшение суммы норм отрезков OP_1, OP_2, OP_3, и мы получаем противоречие с тем, что O — точка Ферма для P_1, P_2, P_3. Значит, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$.

Рассмотрим базисы (n_i, τ_i), являющиеся поворотами стандартного ортонормированного базиса на углы $(2\pi/3) \cdot (i-1)$ $(i = 1, 2, 3)$. Разложим e_i по базису (n_i, τ_i).

Напомним равенства, которыми мы будем пользоваться:

1) $\|r_i\| = 1$, поскольку r_i по определению является единичным вектором в норме $\|\cdot\|$;
2) для вектора v, заданного в полярных координатах $v = (r, \varphi)$, верно $\|v\| = \|v\|_\mathrm{e}/r(\varphi)$.

Посчитаем проекцию e_i на n_i. Распишем равенство, пользуясь параллельностью векторов r_i и n_i:

$$(e_i, \varepsilon\cdot n_i)+o(\varepsilon) = \|r_i+\varepsilon\cdot n_i\|-\|r_i\| = \|r_i\|\cdot\left(1 + \frac{\|\varepsilon\cdot n_i\|}{\|r_i\|} - 1\right) = \|r_i\|\cdot\left(\frac{\|\varepsilon\cdot n_i\|_\mathrm{e}}{\|r_i\|_\mathrm{e}}\right).$$

Поделим обе части на ε, перейдём к пределу по ε и воспользуемся равенством $\|r_i\|_\mathrm{e} = r\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big)$:

$$(e_i, n_i) = \frac{1}{r\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big)}.$$

Посчитаем проекцию e_i на τ_i. Пусть $\varepsilon \cdot \tau_i$ — малое приращение вектора r_i по направлению τ_i. Воспользуемся ортогональностью r_i и τ_i. Зная, что

$$\sqrt{1+\varepsilon^2} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} + o(\varepsilon^2),$$

имеем

$$\|r_i + \varepsilon\cdot\tau_i\|_\mathrm{e} = \|r_i\|_\mathrm{e} + o(\varepsilon).$$

На пятом знаке равенства позволим себе вынести $o(\varepsilon)$ из знаменателя, поскольку при $\varepsilon \to 0$ знаменатель дроби будет отделён от нуля и бесконечности:

$$\begin{aligned}
&(e_i, \varepsilon\cdot\tau_i) + o(\varepsilon) = \|r_i + \varepsilon\cdot\tau_i\| - \|r_i\| = \\
&\quad= \frac{\|r_i + \varepsilon\cdot\tau_i\|_\mathrm{e}}{r\big((2\pi/3)\cdot(i-1) + \operatorname{arctg}(\varepsilon/\|r_i\|_\mathrm{e})\big)} - 1 = \\
&\quad= \frac{\|r_i\|_\mathrm{e} + o(\varepsilon)}{\|r_i\|_\mathrm{e} + (\varepsilon/\|r_i\|_\mathrm{e})r'_\varphi\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big) + o(\varepsilon)} - 1 = \\
&\quad= -\frac{\varepsilon\cdot r'_\varphi\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big)}{\|r_i\|_\mathrm{e}^2} + o(\varepsilon) = \varepsilon\cdot\left(\frac{1}{r_\varphi\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big)}\right)' + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Поделим обе части на ε и перейдём к пределу по ε:

$$(e_i, \tau_i) = \left(\frac{1}{r_\varphi\big((2\pi/3)\cdot(i-1)\big)}\right)'.$$

Заметим, что при замене координат $(r,\varphi) \to (r, \varphi+\varphi_1)$ формулы выше остаются верны при $(\varphi_1 - \varphi_0) \in I$. Мы имеем шесть векторов — проекций векторов e_i на векторы базисов (n_i, τ_i) соответственно. Сумма этих шести векторов равна нулю, так как $e_1 + e_2 + e_3 = 0$. Спроецировав все шесть векторов на векторы базиса (n_1, τ_1), получим два уравнения — равенства нулю проекции суммы на τ_1 и на n_1.

Запишем проекцию на n_1:

$$A_1 = \frac{1}{r(\varphi)} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)} + \frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)}\right) + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)} - \frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)}\right)' = 0.$$

Запишем проекцию на τ_1:

$$A_2 = \left(\frac{1}{r(\varphi)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)} + \frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)}\right)' + \\ + \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)} - \frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)}\right) = 0.$$

Поскольку равенства $A_1 = 0$, $A_2 = 0$ выполнены для любого $\varphi \in I$, выражение A_1 дифференцируемо в некоторой окрестности любого заданного угла $\varphi \in I$ и производная равна 0. Значит, для $\varphi \in I$ выполнено уравнение $A_1' = A_2$. Приведя подобные, получим

$$-\left(\frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)} - \frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)}\right)'' = \left(\frac{1}{r(\varphi-2\pi/3)} - \frac{1}{r(\varphi+2\pi/3)}\right).$$

Обозначив правую часть через f, получим уравнение $f + f'' = 0$. I — это объединение интервалов, на каждом это уравнение выполнено. Рассмотрим произвольную точку $\varphi_0 \notin I$. Обозначим

$$f_1(\varphi) = f(\varphi+\varphi_0), \quad f_2(\varphi) = f\left(\varphi + \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right), \quad f_3(\varphi) = f\left(\varphi - \frac{2\pi}{3} + \varphi_0\right).$$

Функции f_1, f_2, f_3 дифференцируемы в некоторой проколотой окрестности нуля $\omega = \omega^- \cup \omega^+ = (-\delta, 0) \cup (0, \delta)$. Запишем общий вид f_1, f_2, f_3:

$$f_i|_{\omega^-} = a_i^- \cos(\varphi) + b_i^- \sin(\varphi), \quad f_i|_{\omega^+} = a_i^+ \cos(\varphi) + b_i^+ \sin(\varphi).$$

Заметим, что по непрерывности f_i в точке 0 $a_i^- = a_i^+$ для всех i. Перепишем выражение A_1 на ω в терминах f_1, f_2, f_3:

$$A_1 = \frac{1}{2}(f_2 - f_3) + \frac{\sqrt{3}}{2} f_1' = 0.$$

Сдвигом аргумента на $\pm 2\pi/3$ получим ещё два уравнения:

$$\frac{1}{2}(f_1 - f_2) + \frac{\sqrt{3}}{2} f_3' = 0, \quad \frac{1}{2}(f_3 - f_1) + \frac{\sqrt{3}}{2} f_2' = 0.$$

Переписав уравнения на ω^- и ω^+, используя общий вид f_1, f_2, f_3 и приравняв нулю коэффициенты при $\cos(\varphi)$, получим

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}(a_2^- - a_3^-) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_1^- = 0, \qquad && \frac{1}{2}(a_2^+ - a_3^+) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_1^+ = 0,\\
&\frac{1}{2}(a_1^- - a_2^-) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_3^- = 0, && \frac{1}{2}(a_1^+ - a_2^+) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_3^+ = 0,\\
&\frac{1}{2}(a_3^- - a_1^-) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2^- = 0, && \frac{1}{2}(a_3^+ - a_1^+) + \frac{\sqrt{3}}{2} b_2^+ = 0.
\end{aligned}$$

Выше было показано, что $a_i^- = a_i^+$ для всех i. Из этого факта и системы равенств следует, что $b_i^- = b_i^+$ для всех i. Это значит, что слева и справа от точки $\varphi_0 \notin I$ коэффициенты функции f при $\cos(\varphi)$ и $\sin(\varphi)$ совпадают. Значит, совпадение коэффициентов происходит на всём множестве I. Но f непрерывна, и всюду, кроме конечного числа точек, выполнено $f(\varphi) = a\cdot\cos(\varphi)+b\cdot\sin(\varphi)$, поэтому формула остаётся верна и на дополнении к I. В частности, для любого φ выполнено $f(\varphi+\pi) = -f(\varphi)$. Поскольку $r(\varphi)$ — график единичной окружности нормы в полярных координатах, имеем $r(\varphi+\pi) = r(\varphi)$, следовательно, $f(\varphi+\pi) = f(\varphi)$. Значит, $f \equiv 0$, откуда по определению функции f следует, что $r(\varphi) = r(\varphi - 2\pi/3)$ для всех φ. $\square$

В [2] доказано, что для банаховых пространств размерности больше двух имеет место следующий критерий.

Теорема 3 [2]. *Пусть дано банахово пространство размерности больше двух. Оно является гильбертовым тогда и только тогда, когда для любых трёх векторов верно, что хотя бы одна точка Ферма треугольника, составленного из концов этих трёх векторов, лежит в аффинной плоскости треугольника.*

Рассмотрим банахово пространство размерности больше двух. Пусть оно и гильбертово пространство той же размерности F_3-неразличимы. Тогда для любых трёх точек их точка Ферма по норме банахова пространства лежит в аффинной плоскости трёх точек. Отсюда по теореме 3 следует гильбертовость рассмотренного банахова пространства. Соответственно, имеет место следствие.

Следствие. *Существуют негильбертовы пространства размерности 2, F_3-неразличимые с гильбертовым пространством. Гильбертовы пространства размерности больше 3 F_3-различимы с негильбертовыми.*

Авторы выражают благодарность своему научному руководителю А. О. Иванову, а также А. А. Тужилину и А. А. Осиненко за помощь в подготовке данной работы.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 13-01-00664-а, гранта Правительства РФ, договор № 11.G34.31.0053, гранта Программы Президента РФ поддержки ведущих научных школ РФ НШ 581.2014.1.

Литература

[1] Иванов А. О., Тужилин А. А. Разветвлённые геодезические в нормированных пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 5. — С. 33—82.

[2] Benitez C., Fernandez M., Soriano M. L. Location of the Fermat—Torricelli medians of three points // Trans. Am. Math. Soc. — 2002. — Vol. 354. — P. 5027—5038.