k-смежностные грани булева квадратичного многогранника*

А. Н. МАКСИМЕНКО
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

УДК 519.854.33+514.172.45

Ключевые слова: булевы квадратичные многогранники, корреляционные многогранники, разрезные многогранники, k-смежностные многогранники, грани.

Аннотация

Булев квадратичный многогранник (или корреляционный многогранник) определяется как выпуклая оболочка

$$\mathrm{BQP}(n) = \mathrm{conv}\{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}.$$

Число 2^n его вершин суперполиномиально по размерности $d = n(n+1)/2$. В 1992 г. М. Деза, М. Лоран и С. Поляк доказали, что $\mathrm{BQP}(n)$ 3-смежностный, т. е. любые три его вершины образуют грань этого многогранника. По аналогии с булевыми квадратичными многогранниками в статье рассматриваются булевы многогранники $\mathrm{BQP}(n,p)$ степени p. Для $p = 2$ $\mathrm{BQP}(n,p)$ совпадает с $\mathrm{BQP}(n)$. Для $p = 1$ $\mathrm{BQP}(n,p)$ — n-мерный 0/1-куб. Показано, что $\mathrm{BQP}(n,p)$ s-смежностный при $s \leqslant p + \lfloor p/2 \rfloor$. Для $m \in \mathbb{N}$ и $k \geqslant 2m$ доказано, что многогранник $\mathrm{BQP}(k,2m)$ линейно изоморфен некоторой грани многогранника $\mathrm{BQP}(n)$ при $n = \Theta\left(\binom{k}{m}\right)$. Следовательно, для любого фиксированного $s \leqslant 3\lfloor(\log_2 n)/2\rfloor$ $\mathrm{BQP}(n)$ имеет s-смежностную грань с суперполиномиальным числом $2^{\Theta(n^{1/\lceil s/3 \rceil})}$ вершин.

Abstract

A. N. Maksimenko, k-neighborly faces of the Boolean quadric polytopes, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 95—103.

The Boolean quadric polytope (or correlation polytope) is the convex hull

$$\mathrm{BQP}(n) = \mathrm{conv}\{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}.$$

The number of its vertices is 2^n, i.e., superpolynomial in the dimension $d = n(n+1)/2$. In 1992 M. Deza, M. Laurent, and S. Poljak proved that $\mathrm{BQP}(n)$ is 3-neighborly, i.e., every three vertices of $\mathrm{BQP}(n)$ form a face of this polytope. By analogy with the Boolean quadric polytopes, we consider Boolean p-power polytopes $\mathrm{BQP}(n,p)$. For $p = 2$, $\mathrm{BQP}(n,p) = \mathrm{BQP}(n)$. For $p = 1$, $\mathrm{BQP}(n,p)$ is n-dimensional 0/1-cube. It is shown that $\mathrm{BQP}(n,p)$ is s-neighborly for $s \leqslant p + \lfloor p/2 \rfloor$. For $k \geqslant 2m$, $m \in \mathbb{N}$, we prove that the polytope $\mathrm{BQP}(k,2m)$ is linearly isomorphic to a face of $\mathrm{BQP}(n)$ for some $n = \Theta\left(\binom{k}{m}\right)$. Hence, for every fixed $s \leqslant 3\lfloor \log_2 n/2 \rfloor$, $\mathrm{BQP}(n)$ has s-neighborly face with superpolynomial number $2^{\Theta(n^{1/\lceil s/3 \rceil})}$ of vertices.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ, договор № 11.G34.31.0053.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 95—103.

1. Введение

Булевы квадратичные многогранники (или *корреляционные многогранники*) $\mathrm{BQP}(n)$, $n \in \mathbb{N}$, — одни из наиболее известных 0/1-многогранников, ассоциированных с задачами комбинаторной оптимизации:

$$\mathrm{BQP}(n) = \mathrm{conv}\{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}. \qquad (1)$$

За последние 30 лет появилось значительное число работ, посвящённых изучению свойств этих многогранников (см., например, [8]). Перечислим лишь некоторые, наиболее интересные в контексте настоящей работы, свойства.

1. $\mathrm{BQP}(n)$ линейно изоморфен разрезному многограннику $\mathrm{CUT}(n+1)$ [14], $n \geqslant 2$.
2. Эти 0/1-многогранники имеют суперэкспоненциальное (относительно n) число фасет, а для $n \geqslant 10$ их полное линейное описание неизвестно [7,15].
3. Сложность расширенного описания многогранника $\mathrm{BQP}(n)$ суперполиномиальна по n [10].
4. В [3] показано, что $\mathrm{BQP}(n)$ является гранью многогранника коммивояжёра $\mathrm{TSP}(m)$, где $m = n(15n-13)/2$ — число городов. Также булевы квадратичные многогранники являются гранями многих других многогранников, ассоциированных с NP-трудными задачами [4, 5].

1.1. k-смежностные 0/1-многогранники

Многогранник P называется k-смежностным, если каждое подмножество из не более чем k вершин образует множество вершин некоторой грани многогранника P. В частности, все многогранники являются 1-смежностными. k-смежностный многогранник является одновременно $(k-1)$-смежностным для $k > 1$.

Теорема 1 [9]. $\mathrm{BQP}(n)$ *3-смежностный* (*но не 4-смежностный*).

Многие 0/1-многогранники задач комбинаторной оптимизации оказываются по меньшей мере 2-смежностными [12, с. 366]. Например, Ш. Онн установил следующий факт для многогранников Юнга.

Теорема 2 [13]. *Пусть* $n = \lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, *где* $n, \lambda_1, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2$ *и* $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_k \geqslant k^2$. *Тогда многогранник Юнга* $P(\lambda_1, \ldots, \lambda_k)$ *является* $\lfloor k^2/2 \rfloor$*-смежностным.*

Известно [1,13], что многогранники некоторых задач комбинаторной оптимизации (например, задач о коммивояжёре, независимом множестве, паросочетании максимального веса, изоморфизме графов) являются образами многогранников Юнга при линейном отображении.

Вообще говоря, для достаточно больших значений размерности k-смежностные многогранники встречаются чаще, чем какие-либо другие. Это подтверждается следующими фактами.

Пусть случайные векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \{0,1\}^d$ распределены независимо и равномерно. Если повторения допустимы, то многогранник $P_{d,n}$ определяется так: $P_{d,n} = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ [11]. Для случая, когда повторения невозможны, положим $Q_{d,n} = \operatorname{conv}\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

Теорема 3 [2]. *Если $n = O(2^{d/6})$, то вероятность $\Pr(Q_{d,n}$ 2-смежностный$)$ стремится к 1 при $d \to \infty$.*

Теорема 4 [11]. *Для каждого $k \geqslant 2$ существуют константа $c > 0$ и $\varepsilon > 0$, такие что*

$$\Pr(Q_{d,n}\ k\text{-смежностный}) \geqslant 1 - 2^{-cd}$$

справедливо для $n \leqslant 2^{\varepsilon d}$.

Ниже для каждого $k \in \mathbb{N}$ будут построены специальные k-смежностные 0/1-многогранники. Число $2^{\Theta(d^{1/(2\lceil k/3\rceil)})}$ их вершин суперполиномиально по размерности d многогранника. Будет показано, что они линейно изоморфны граням многогранника $\mathrm{BQP}(n)$ при $n = \Theta(\sqrt{d})$.

2. Булевы многогранники степени p

Увеличивая степень полинома

$$\sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_i x_j$$

и действуя так же, как в (1), определим *булевы многогранники степени p* для $p \in \mathbb{N}$ и $n \geqslant p$:

$$\mathrm{BQP}(n,p) = \operatorname{conv}\left\{ x = (x_{i_1 i_2 \ldots i_p}) \in \{0,1\}^{\binom{n+p-1}{p}} \;\middle|\; x_{i_1 i_2 \ldots i_p} = x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_p} \right\}, \quad (2)$$

где

$$1 \leqslant i_1 \leqslant i_2 \leqslant \ldots \leqslant i_p \leqslant n, \quad x_j \overset{\text{def}}{=} x_{j\ldots j}, \quad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Этот многогранник имеет 2^n вершин, и каждая вершина однозначно определяется значениями $x_i \in \{0,1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$. Так, $\mathrm{BQP}(n,1)$ — это n-мерный 0/1-куб, $\mathrm{BQP}(n,2)$ — булев квадратичный многогранник $\mathrm{BQP}(n)$. Заметим, что $\mathrm{BQP}(p,p)$ является симплексом на 2^p вершинах.

Лемма 5. *Многогранник $\mathrm{BQP}(n,p)$ является s-смежностным при*

$$s \leqslant p + \left\lfloor \frac{p}{2} \right\rfloor.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathrm{BQP}(n,1)$ 1-смежностный, а $\mathrm{BQP}(n,2)$ 3-смежностный [9]. Следовательно, для каждых трёх различных вершин

$$x^1, x^2, x^3 \in \{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii} x_{jj},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$$

многогранника $\mathrm{BQP}(n,2)$ существует линейная функция

$$f_{x^1 x^2 x^3}(x) = b + \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{ij} x_{ij}, \quad b, a_{ij} \in \mathbb{R},$$

такая что

$$f_{x^1x^2x^3}(x^1) = f_{x^1x^2x^3}(x^2) = f_{x^1x^2x^3}(x^3) = 0$$

и $f_{x^1x^2x^3}(x) > 0$ для любой другой вершины x этого многогранника.

Проделаем то же самое для $\mathrm{BQP}(n,4)$. Для любой шестёрки различных вершин x^1, x^2, x^3, x^4, x^5, x^6 можно построить две функции:

$$f_{x^1x^2x^3}(x) = b + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_{ij} = b + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_{ij}x_ix_j,$$

$$f_{x^4x^5x^6}(x) = d + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} c_{ij}x_{ij} = d + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} c_{ij}x_ix_j.$$

Ясно, что

$$F(x) = f_{x^1x^2x^3}(x)\cdot f_{x^4x^5x^6}(x)$$

равна 0 при x^m, $m = 1,\ldots,6$, и $F(x) > 0$ для любой другой вершины x многогранника $\mathrm{BQP}(n,4)$. С другой стороны, функция $F(x)$ — полином 4-й степени от x_i:

$$F(x) = g + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant l\leqslant n} e_{ijkl}x_ix_jx_kx_l = g + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant k\leqslant l\leqslant n} e_{ijkl}x_{ijkl},$$

но линейна относительно x_{ijkl}. Таким образом, $F(x)$ определяет опорную гиперплоскость для $\mathrm{BQP}(n,4)$, и $\mathrm{BQP}(n,4)$ является 6-смежностным.

Действуя тем же способом, нетрудно заметить, что $\mathrm{BQP}(n,p)$ является $(3p/2)$-смежностным для чётных p.

Для нечётных p достаточно заметить, что для каждой вершины x^0 куба $\mathrm{BQP}(n,1)$ найдётся линейная функция

$$f_{x^0}(x) = b(x^0) + \sum_{1\leqslant i\leqslant j\leqslant n} a_i(x^0)x_i, \quad b(x^0), a_i(x^0) \in \mathbb{R},$$

такая что $f_{x^0}(x^0) = 0$ и $f_{x^0}(x) > 0$ для любой другой вершины x куба $\mathrm{BQP}(n,1)$. □

Замечание 6. Очевидно, что $\mathrm{BQP}(n,p)$ является гранью многогранника $\mathrm{BQP}(n{+}1,p)$ с опорной гиперплоскостью $x_{n+1} = 0$. Следовательно, $\mathrm{BQP}(n,p)$ — грань многогранника $\mathrm{BQP}(k,p)$ для всех $k > n$.

Лемма 7. $\mathrm{BQP}(n,p)$ *не является* 2^p*-смежностным для* $n > p$.

Доказательство. Из замечания 6 следует, что достаточно доказать утверждение леммы для $n = p+1$.

Покажем, что $\mathrm{BQP}(p+1,p)$ не 2^p-смежностный.

Как и в (2), положим

$$x_i \stackrel{\text{def}}{=} x_{i\ldots i}, \quad 1 \leqslant i \leqslant p+1.$$

Пусть

$$S(x) = \sum_{i=1}^{p+1} x_i$$

есть сумма «основных» координат вектора $x \in \mathrm{BQP}(p+1,p)$. Множество X всех вершин многогранника $\mathrm{BQP}(p+1,p)$ разобьём на $p+2$ подмножеств:

$$X(k) = \{x \in X \mid S(x) = k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, p+1.$$

Пусть

$$Y = \bigcup_{k \text{ чётно}} X(k), \quad Z = X \setminus Y.$$

Очевидно,

$$|X(k)| = \binom{p+1}{k}, \quad |Y| = |Z| = \frac{|X|}{2} = 2^p.$$

Покажем, что

$$\sum_{x \in Y} x = \sum_{x \in Z} x. \tag{3}$$

Если это верно, то Y и Z не образуют грани многогранника $\mathrm{BQP}(p+1,p)$.

Проверим равенство (3) покоординатно. Пусть $\bar{r} = 2\lfloor (p+1)/2 \rfloor$ и $\bar{s} = 2\lceil (p+1)/2 \rceil - 1$. Для $i = 1, 2, \ldots, p+1$ имеем

$$\sum_{x \in Y} x_i = \sum_{x \in X(0)} x_i + \sum_{x \in X(2)} x_i + \sum_{x \in X(4)} x_i + \ldots + \sum_{x \in X(\bar{r})} x_i = \\ = 0 + \binom{p}{1} + \binom{p}{3} + \ldots + \binom{p}{\bar{r}-1} \tag{4}$$

и

$$\sum_{x \in Z} x_i = \sum_{x \in X(1)} x_i + \sum_{x \in X(3)} x_i + \ldots + \sum_{x \in X(\bar{s})} x_i = \\ = \binom{p}{0} + \binom{p}{2} + \ldots + \binom{p}{\bar{s}-1}. \tag{5}$$

Из бинома Ньютона

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^k \binom{p}{k} = 0$$

следует, что (4) и (5) равны.

Продолжая тем же способом, рассмотрим координату

$$x_{i_1 i_2 \ldots i_m} \stackrel{\text{def}}{=} x_{\underbrace{i_1 i_2 \ldots i_m \ldots i_m}_{p}} = x_{\underbrace{i_1 i_2 \ldots i_{m-1} i_{m-1} i_m \ldots i_m}_{p}} = \ldots = \\ = x_{\underbrace{i_1 \ldots i_1 i_2 i_2 i_3 \ldots i_m}_{p}} = x_{\underbrace{i_1 \ldots i_1 i_2 i_3 \ldots i_m}_{p}}$$

с m различными индексами $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant p+1$, $1 \leqslant m \leqslant p$. Как и выше,

$$\sum_{x \in Y} x_{i_1 i_2 \ldots i_m} - \sum_{x \in Z} x_{i_1 i_2 \ldots i_m} = (-1)^m \sum_{k=0}^{p+1-m} (-1)^k \binom{p+1-m}{k} = 0. \qquad \square$$

Объединяя леммы 5 и 7, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть* s — *наибольшее целое, для которого многогранник* $\mathrm{BQP}(n,p)$ *является* s*-смежностным. Тогда*

$$p + \lfloor p/2 \rfloor \leqslant s < 2^p.$$

Сформулируем несколько очевидных замечаний.

1. Куб $\mathrm{BQP}(k,1)$, $k \geqslant 2$, не является 2-смежностным. Следовательно, для $k \geqslant 2$ $\mathrm{BQP}(k,1)$ не может быть гранью многогранника $\mathrm{BQP}(n,p)$ при $n \geqslant p \geqslant 2$.
2. $\mathrm{BQP}(k,1)$ не имеет 2-смежностных граней, за исключением 1-граней (рёбер). Следовательно, для $n \geqslant p \geqslant 2$ $\mathrm{BQP}(n,p)$ не может быть гранью куба $\mathrm{BQP}(k,1)$.
3. Булев квадратичный многогранник $\mathrm{BQP}(k,2)$ не является 4-смежностным. Это означает, что $\mathrm{BQP}(k,2)$ не может быть гранью многогранника $\mathrm{BQP}(n,p)$ для $n \geqslant p \geqslant 3$.

Покажем теперь, что для чётных $p \geqslant 4$, $\mathrm{BQP}(k,p)$ является гранью многогранника $\mathrm{BQP}(n,2)$ при некотором $n = \Theta(k^{p/2})$.

Для чисел $k, m \in \mathbb{N}$, $k \geqslant 2m$, определим $H(k,m)$ следующим образом:

$$H(k,m) = \binom{k}{m} + \binom{k}{\lceil m/2 \rceil} + \binom{k}{\lceil \lceil m/2 \rceil /2 \rceil} + \ldots + \binom{k}{1}.$$

Заметим, что

$$H(k,m) \geqslant \binom{k}{m}$$

и при постоянном m

$$H(k,m) \sim \binom{k}{m} \quad \text{при} \quad k \to \infty.$$

Однако для малых значений k $H(k,m)$ может существенно отличаться от $\binom{k}{m}$. Вычисления показывают, что максимум для $H(k,m)/\binom{k}{m}$ равен $41/20$ и достигается при $k = 2m = 6$.

Теорема 9. *Для* $m \in \mathbb{N}$ *и* $k \geqslant 2m$ *многогранник* $\mathrm{BQP}(k,2m)$ *линейно изоморфен некоторой грани булева квадратичного многогранника* $\mathrm{BQP}(n)$, *где* $n \geqslant H(k,m)$.

Доказательство. Покажем, что булев многогранник степени 4

$$\mathrm{BQP}(k,4) = \mathrm{conv}\left\{ y = (y_{ijst}) \in \{0,1\}^{\binom{k+3}{4}} \;\middle|\; y_{ijst} = y_i y_j y_s y_t \right\},$$
$$\text{где } 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant s \leqslant t \leqslant k, \; y_r \overset{\mathrm{def}}{=} y_{rrrr}, \; 1 \leqslant r \leqslant k, \qquad (6)$$

линейно изоморфен грани булева квадратичного многогранника $\mathrm{BQP}(n)$ при

$$n = \binom{k}{2} + \binom{k}{1}.$$

Во-первых, заметим, что из (6) следует, что

$$y_{ijjj} = y_{iijj} = y_{iiij}, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant k,$$
$$y_{ijss} = y_{ijjs} = y_{iijs}, \quad 1 \leqslant i < j < s \leqslant k.$$

Для x_{ii}, $i > k$, в определении (1) будем пользоваться обозначением

$$x'_{st} \stackrel{\text{def}}{=} x_{ii}, \quad \text{где} \quad i = g(s,t) = \frac{(2k-1-s)s}{2} + t, \quad 1 \leqslant s < t \leqslant k.$$

В таком случае имеется взаимно-однозначное соответствие между x_{ii}, $i > k$, и x'_{st}, $1 \leqslant s < t \leqslant k$. Кроме того, пусть

$$x'_{ist} \stackrel{\text{def}}{=} x_{ij}, \quad \text{где} \quad 1 \leqslant i \leqslant k, \quad j = g(s,t) > k, \quad 1 \leqslant s < t \leqslant k,$$

и

$$x'_{qrst} \stackrel{\text{def}}{=} x_{ij}, \quad \text{где} \quad j = g(s,t) > i = g(q,r) > k, \quad 1 \leqslant q < r \leqslant k, \quad 1 \leqslant s < t \leqslant k.$$

Остаётся показать, что для каждых i и j, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, равенства

$$x_{ij} = x'_{ij} = x'_{iij} = x'_{jij} \tag{7}$$

определяют грань многогранника $\mathrm{BQP}(n)$.

Известно [8], что все вершины $\mathrm{BQP}(n)$ удовлетворяют неравенствам

$$x_{ij} \leqslant x_{ii}, \qquad x_{ij} \leqslant x_{jj}, \tag{8}$$
$$x'_{iij} \leqslant x_{ii}, \qquad x'_{jij} \leqslant x_{jj}, \tag{9}$$
$$x'_{iij} \leqslant x'_{ij}, \qquad x'_{jij} \leqslant x'_{ij}, \tag{10}$$

где $1 \leqslant i < j \leqslant k$. Каждое неравенство определяет грань многогранника $\mathrm{BQP}(n)$. Например, из (10) следует, что

$$F'_{ij} = \mathrm{BQP}(n) \cap \{x \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid x'_{iij} = x'_{ij},\ x'_{jij} = x'_{ij}\}$$

является гранью многогранника $\mathrm{BQP}(n)$. Из (9) выводим, что

$$x'_{ij} \leqslant x_{ii}, \quad x'_{ij} \leqslant x_{jj} \quad \text{для всех} \quad x \in F'_{ij}.$$

Нетрудно убедиться, что

$$x'_{ij} \leqslant x_{ij} \quad \text{для всех} \quad x \in F'_{ij}.$$

Следовательно,

$$F_{ij} = F'_{ij} \cap \{x \in \mathbb{R}^{n(n+1)/2} \mid x'_{ij} = x_{ij}\}$$

является гранью F'_{ij} и гранью $\mathrm{BQP}(n)$. Более того, (7) выполнено для всех $x \in F_{ij}$.

Таким образом,

$$F = \bigcap_{1 \leqslant i < j \leqslant k} F_{ij}$$

является гранью $\mathrm{BQP}(n)$, и F линейно изоморфна многограннику $\mathrm{BQP}(k,4)$. В частности,

$$\begin{aligned} y_{iiii} &= x_{ii}, && 1 \leqslant i \leqslant k, \\ y_{ijjj} &= x'_{ij}, && 1 \leqslant i < j \leqslant k, \\ y_{ijss} &= x'_{ijjs}, && 1 \leqslant i < j < s \leqslant k, \\ y_{ijst} &= x'_{ijst}, && 1 \leqslant i < j < s < t \leqslant k. \end{aligned}$$

Действуя тем же способом, нетрудно проверить, что $\mathrm{BQP}(k,2m)$ линейно изоморфен некоторой грани $\mathrm{BQP}(n)$ для $n = H(k,m)$, $k \geqslant 2m$, $m \in \mathbb{N}$. □

Объединяя это утверждение с теоремой 8, получаем следствие.

Следствие 10. *Для каждого*

$$k \leqslant 3 \left\lfloor \frac{\log_2 n}{2} \right\rfloor$$

булев квадратичный многогранник $\mathrm{BQP}(n)$ *имеет* k*-смежностную грань с суперполиномиальным числом* $2^{\Theta\left(n^{1/\lceil k/3 \rceil}\right)}$ *вершин.*

3. Заключительные замечания

Увеличивая степень полинома в задаче булева квадратичного программирования, мы рассмотрели булевы многогранники $\mathrm{BQP}(n,p)$ степени p. Мы показали, что $\mathrm{BQP}(n,p)$ k-смежностный при $k \leqslant p + \lfloor p/2 \rfloor$ и не является k-смежностным для $k \geqslant 2^p$, $n > p$. Точное значение степени смежностности $\mathrm{BQP}(n,p)$ пока неизвестно, но похоже, что оно равно $2^p - 1$. По крайней мере, это справедливо для $p = 1$ и $p = 2$.

Мы доказали, что $\mathrm{BQP}(k,2m)$ линейно изоморфен грани $\mathrm{BQP}(n)$ для $n \geqslant H(k,m)$. Следовательно, для фиксированного $k \leqslant 3\lfloor \log_2 n/2 \rfloor$ многогранник $\mathrm{BQP}(n)$ обладает k-смежностной гранью с суперполиномиальным (по n) числом вершин. Известно, что $\mathrm{BQP}(n)$ аффинно сводится [3—5] ко многим другим семействам многогранников NP-трудных задач. Таким образом, для произвольной постоянной $k \in \mathbb{N}$ каждое из этих семейств содержит многогранник с k-смежностной гранью, и эта грань обладает суперполиномиальным (по размерности многогранника) числом вершин. Здесь хотелось бы обратить внимание на следующий факт. Л. Дж. Бильера и А. Сарангараджан [6] доказали, что каждый d-мерный 0/1-многогранник является гранью многогранника коммивояжёра $\mathrm{TSP}(m)$, но m при этом растёт экспоненциально относительно d, т. е. результат Бильеры—Сарангараджана не может быть использован для поиска граней $\mathrm{TSP}(m)$ с суперполиномиальным (по m) числом вершин.

Интригующим является следующий вопрос. Верно ли, что найденное свойство определяет суперполиномиальную сложность расширенного описания булева квадратичного многогранника?

Литература

[1] Барвинок А. И., Вершик А. М. Выпуклые оболочки орбит представлений конечных групп и комбинаторная оптимизация // Функц. анализ и его прил. — 1988. — Т. 22, № 3. — С. 66—67.

[2] Бондаренко В. А., Бродский А. Г. О случайных 2-смежностных 0/1-многогранниках // Дискрет. мат. — 2008. — Т. 20, № 1. — С. 64—69.

[3] Максименко А. Н. Многогранники задачи о выполнимости являются гранями многогранника задачи коммивояжёра // Дискрет. анализ и исслед. опер. — 2011. — Т. 18, № 3. — С. 76—83.

[4] Максименко А. Н. Об универсальных свойствах многогранника разрезов // Проблемы теоретической кибернетики. Матер. XVI междунар. конф. — Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2011. — С. 294—296.

[5] Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Докл. РАН. — 2012. — Т. 443, № 6. — С. 661—663.

[6] Billera L. J., Sarangarajan A. All 0-1 polytopes are traveling salesman polytopes // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16, no. 2. — P. 175—188.

[7] Christof T., Reinelt G. Decomposition and parallelization techniques for enumerating the facets of combinatorial polytopes // Int. J. Comput. Geom. Appl. — 2001. — Vol. 11, no. 4. — P. 423—437.

[8] Deza M. M., Laurent M. Geometry of Cuts and Metrics. — Berlin: Springer, 1997.

[9] Deza M. M., Laurent M., Poljak S. The cut cone III: On the role of triangle facets // Graphs Combin. — 1992. — Vol. 8, no. 2. — P. 125—142.

[10] Fiorini S., Massar S., Pokutta S., Tiwary H. R., de Wolf R. Linear vs. semidefinite extended formulations: exponential separation and strong lower bounds. — 2011. — arXiv:1111.0837.

[11] Gillmann R. 0/1-Polytopes: Typical and Extremal Properties: PhD Thesis. — TU Berlin, 2006.

[12] Henk M., Richter-Gebert J., Ziegler G. M. Basic properties of convex polytopes // Handbook of Discrete and Computational Geometry / J. E. Goodman, J. O'Rourke, eds. — Chapman and Hall/CRC, 2004. — P. 355—382.

[13] Onn S. Geometry, complexity, and combinatorics of permutation polytopes // J. Combin. Theory Ser. A. — 1993. — Vol. 64. — P. 31—49.

[14] De Simone C. The cut polytope and the Boolean quadric polytope // Discrete Math. — 1990. — Vol. 79. — P. 71—75.

[15] http://www.iwr.uni-heidelberg.de/groups/comopt/software/SMAPO/.