# Общая грань некоторых 0/1-многогранников с NP-полным критерием несмежности вершин*

**А. Н. МАКСИМЕНКО**
*Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова*
e-mail: maximenko.a.n@gmail.com

УДК 519.854.2+519.161

**Ключевые слова:** NP-полные задачи, многогранники, смежные вершины, грани.

**Аннотация**

В работе рассматриваются многогранники двойных покрытий. В 1995 г. Мацуи установил, что задача проверки несмежности вершин для этих многогранников NP-полна. Мы покажем, что многогранники двойных покрытий являются гранями многогранников, ассоциированных со следующими задачами: задача о рюкзаке, задача о покрытии множества, задача о кубическом подграфе, задача о 3-выполнимости, задача о частичном упорядочении, задача коммивояжёра и некоторые другие.

**Abstract**

*A. N. Maksimenko, The common face of some* 0/1*-polytopes with NP-complete nonadjacency relation*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 105—118.

In this paper, we consider so-called double covering polytopes. In 1995, Matsui showed that the problem of checking nonadjacency on these polytopes is NP-complete. We show that double covering polytopes are faces of the following polytopes: knapsack polytopes, set covering polytopes, cubic subgraph polytopes, 3-SAT polytopes, partial order polytopes, traveling salesman polytopes, and some others.

В 1978 году Х. Пападимитриу [22] показал, что задача проверки вершин на несмежность для многогранника коммивояжёра NP-полна. Позднее аналогичные результаты были получены для многогранников задачи о рюкзаке [12, 15, 19], многогранников покрытий множества [19], многогранников кубических графов [11], многогранников задачи о назначениях с ограничениями [9], многогранников задачи о 3-выполнимости и частичном упорядочивании [13] и некоторых других. С другой стороны, существуют примеры многогранников, для которых смежность любой пары вершин проверяется за полиномиальное время. Наиболее известный пример — разрезные многогранники. Каждые две вершины разрезного многогранника смежны [3]. Другие примеры можно найти в [4, 16, 20]. Разумеется, сами эти комбинаторные задачи также NP-полны.

*Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Правительства РФ, договор № 11.G34.31.0053.

При попытке понять причины этого расслоения в классе многогранников NP-полных задач удалось обнаружить следующий факт. Все упомянутые выше многогранники с NP-полной проверкой несмежности вершин содержат в качестве грани многогранник двойных покрытий.

*Многогранником двойных покрытий* $\mathrm{DCP}_{mn}$ назовём выпуклую оболочку

$$\mathrm{DCP}_{mn} = \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^n \colon Ax = \mathbf{2}\}, \tag{1}$$

где $A$ — 0/1-матрица размера $m \times n$, каждая строка которой содержит ровно четыре единицы, $\mathbf{2}$ — $m$-мерный вектор, все координаты которого равны 2.

**Теорема 1 (Т. Мацуи [19, теорема 4.1]).** *Задача распознавания несмежности двух произвольных вершин многогранника* $\mathrm{DCP}_{mn}$ *NP-полна.*

Ниже предлагается способ структурирования множества комбинаторных многогранников, позволяющий выявить «родственные» взаимосвязи между многогранниками отдельных задач. Его основой служит классическое понятие полиномиальной сводимости задач [2]. Известно, что если задача $X$ сводится к задаче $Y$, то многогранник первой обычно оказывается аффинным образом некоторой грани многогранника второй. (Так, например, М. Яннакакис [25] показал, что всякий многогранник вершинных упаковок является проекцией грани многогранника коммивояжёра.) В некоторых случаях зависимость становится ещё более жёсткой: многогранник задачи $X$ аффинно подобен грани многогранника задачи $Y$. Следовательно, многогранник задачи $X$ имеет более простую структуру, чем многогранник задачи $Y$. (Так, С. Фьорини [13] показал, что любой многогранник задачи о 3-выполнимости аффинно подобен некоторой грани одного из многогранников частичных упорядочиваний и, наоборот, каждый многогранник частичных упорядочиваний аффинно подобен некоторой грани одного из многогранников задачи о 3-выполнимости.)

В целом схема взаимосвязей многогранников обсуждаемых ниже задач изображена на рис. 1. Стрелка из $X$ в $Y$ означает, что многогранник $X$ аффинно подобен некоторой грани многогранника $Y$, а размерность многогранника $Y$ ограничена сверху некоторым полиномом от размерности многогранника $X$. Обычные стрелки — известные ранее взаимосвязи — описаны в первом разделе. Справедливость пунктирных стрелок, составляющих основную часть настоящей работы, доказана во втором разделе. В третьем разделе показано, что граф многогранника двойных покрытий обладает суперполиномиальным кликовым числом. Следовательно, все многогранники на рис. 1 наследуют это свойство.

# 1. Предварительные сведения

## 1.1. Многогранники задачи коммивояжёра

Первый результат об NP-полноте распознавания несмежности вершин многогранника удалось получить Х. Пападимитриу [22] в 1978 г., а право быть первой

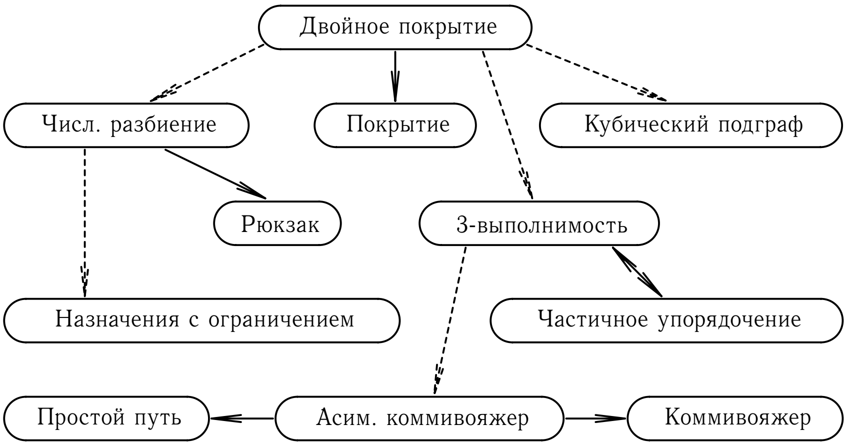


Рис. 1. Иерархия многогранников

задачей с таким свойством досталось и без того знаменитой задаче коммивояжёра в двух вариантах: для ориентированного и неориентированного графов.

Преследуя основную цель настоящей работы, опишем известную взаимосвязь между многогранниками этих задач.

Задача коммивояжёра в орграфе.

Дано: полный орграф $D = (V, A)$, где $V = \{v_1, \dots, v_n\}$ — множество вершин и каждой дуге $(v_i, v_j) \in A$, $i \neq j$, приписан некоторый вес $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Требуется: найти в графе $D$ гамильтонов контур, суммарный вес дуг которого минимален.

Многогранник $\mathrm{ATSP}_n$ этой задачи традиционно определяется в пространстве $\mathbb{R}^{n(n-1)}$ как выпуклая оболочка характеристических векторов всех гамильтоновых контуров графа $D$.

**Теорема 2 (X. Пападимитриу [22]).** *Задача распознавания несмежности двух произвольных вершин многогранника* $\mathrm{ATSP}_n$ *NP-полна.*

Симметричная задача коммивояжёра.

Дано: полный граф $G = (W, E)$, где $W = \{w_1, \dots, w_k\}$ — множество вершин и каждому ребру $(w_i, w_j) \in E$, $i < j$, приписан некоторый вес $c'_{ij} \in \mathbb{R}$.

Требуется: найти в графе $G$ гамильтонов цикл, суммарный вес рёбер которого минимален.

Вершинами многогранника $\mathrm{STSP}_k$ этой задачи являются характеристические векторы гамильтоновых циклов графа $G$.

**Теорема 3.** *Многогранник* $\mathrm{ATSP}_n$ *является гранью многогранника* $\mathrm{STSP}_k$ *при* $k = 2n$.

Идея доказательства состоит в следующем (см., например, [1, 17]). Множество вершин $W$ графа $G$ разбивается на два равномощных подмножества $T = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ и $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Рассматривается набор $S$ гамильтоновых циклов этого графа, каждый из которых обладает следующими свойствами:

1) не проходит по рёбрам вида $(t_i, t_j)$ и $(u_i, u_j)$, $1 \leqslant i < j \leqslant n$;

2) обязательно содержит рёбра $(t_i, u_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$.

Очевидно, множество характеристических векторов таких циклов образует некоторую грань многогранника $\mathrm{STSP}_k$. Кроме того, из описания следует, что каждый гамильтонов цикл из набора $S$ вместе с $n$ «обязательными» рёбрами должен содержать ещё $n$ рёбер вида $(t_i, u_j)$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Чтобы завершить доказательство, остаётся каждому ребру $(t_i, u_j)$ графа $G$ поставить в соответствие дугу $(v_i, v_j)$ орграфа $D$.

Легко заметить, что многогранник $\mathrm{STSP}_k$ в свою очередь есть проекция многогранника $\mathrm{ATSP}_n$ при $n = k$. Это уже пример «нежёсткой» связи многогранников.

С задачей коммивояжёра связан целый букет задач поиска оптимального маршрута. Так, например, в литературе (см. [17, 18, 23]) упоминаются задача о сельском почтальоне, задача о цикле Штейнера и обобщённая задача поиска маршрута. Этот список легко может быть продолжен, но его обсуждению пришлось бы посвятить отдельную работу. Что касается трёх упомянутых выше задач, то они являются обобщениями классической задачи коммивояжёра, а потому их многогранники содержат многогранник последней в качестве грани.

Продолжая перечислять в хронологическом порядке известные результаты об NP-полноте задачи распознавания несмежности вершин многогранников, обратимся к работе С. Чунга [12]. К сожалению, текст работы оказался труднодоступен, его можно найти только в библиотеке Мичиганского университета. В качестве оправдания заметим, что ссылки на неё удаётся обнаружить только в других работах самого автора и в работах К. Мурти [9]. Так, в последней говорится о том, что С. Чунгом была доказана NP-полнота распознавания несмежности вершин многогранников задачи о покрытии множества, о рюкзаке и задачи о «простой цепи». Для первых двух задач тот же результат был независимо получен Т. Мацуи [19] в 1995 г. и будет рассмотрен чуть ниже. Что касается задачи о «простой цепи», то, по-видимому, речь идёт о задаче поиска простого пути между двумя вершинами, более известной как задача о кратчайшем (длиннейшем) пути.

Задача о длиннейшем пути.

Дано: Полный орграф $D = (W, A)$, где $W = \{w_1, \ldots, w_n, s, t\}$ — множество вершин. Множество $A$ состоит из дуг вида $(w_i, w_j)$, $(s, w_j)$, $(w_i, t)$ и $(s, t)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $i \neq j$. Каждой дуге $a \in A$ приписан некоторый вес $c(a) \in \mathbb{R}$.

Требуется: найти в графе $D$ простой путь, ведущий из $s$ в $t$ и обладающий наибольшим суммарным весом входящих в него дуг.

Для каждого простого пути в графе $D$, ведущего из $s$ в $t$, рассмотрим его характеристический вектор в $\mathbb{R}^{|A|}$. Выпуклую оболочку всех таких векторов будем называть *многогранником задачи о длиннейшем пути* или *многогранником простых путей* и обозначать $\mathrm{LWP}_n$.

Эта задача, по сути, является обобщением задачи коммивояжёра в орграфе, и следовательно (см., например, [6]), многогранник коммивояжёра оказывается гранью многогранника простых путей.

## 1.2. Целочисленное программирование

Наиболее богатой на результаты, с точки зрения настоящей статьи, является работа Т. Мацуи [19]. Характерно то, что все рассматриваемые там задачи легко формулируются в виде задачи целочисленного программирования.

Задача 0/1-программирования.

Дано: 0/1-матрица $A$ размера $m \times n$, положительный целочисленный $m$-мерный вектор $b$.

Требуется: найти такой вектор $x \in \{0,1\}^n$, что $Ax \leqslant b$.

*Многогранником задачи 0/1-программирования* будем называть выпуклую оболочку

$$01\mathrm{P}_{mn} = \mathrm{conv}\{x \in \{0,1\}^n \colon Ax \leqslant b\}.$$

Заменив неравенство $Ax \leqslant b$ равенством $Ax = b$, получим описание *многогранника* $\mathrm{E01P}_{mn}$ *ограниченной равенством задачи 0/1-программирования*, частным случаем которой является задача о двойном покрытии. Ясно, что многогранник $\mathrm{E01P}_{mn}$ есть грань многогранника $01\mathrm{P}_{mn}$. Эти замечания уточняются следующей теоремой.

**Теорема 4 (Т. Мацуи [19, следствие 4.2]).** *Многогранник $\mathrm{DCP}_{mn}$ является гранью многогранника $01\mathrm{P}_{4m\,n}$, в описании которого все координаты вектора $b$ равны 2, а каждая строка матрицы $A$ содержит ровно три единицы.*

Идея доказательства проста [19]. Каждое неравенство вида

$$x_h + x_i + x_j + x_k \leqslant 2 \tag{2}$$

заменяется набором четырёх неравенств

$$\begin{cases} x_h + x_i + x_j \leqslant 2, \\ x_i + x_j + x_k \leqslant 2, \\ x_h + x_j + x_k \leqslant 2, \\ x_h + x_i + x_k \leqslant 2. \end{cases} \tag{3}$$

Ясно, что для любого 0/1-вектора $x$ ограничения (2) и (3) эквивалентны.

Пользуясь языком матриц, сформулируем условие ещё одной весьма популярной комбинаторной задачи.

Задача о покрытии множества.

Дано: 0/1-матрица $A$ размера $m \times n$.

Требуется: найти вектор $x \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющий неравенству $Ax \geqslant \mathbf{1}$.

Многогранником $\mathrm{SC}_{mn}$ этой задачи будем называть выпуклую оболочку всех 0/1-векторов $x$, удовлетворяющих неравенству $Ax \geqslant \mathbf{1}$.

**Теорема 5 (Т. Мацуи [19, теорема 4.3]).** *Многогранник* $01\mathrm{P}_{mn}$*, в описании которого* $b = \mathbf{2}$*, а каждая строка матрицы* $A$ *содержит ровно три единицы, аффинно подобен многограннику* $\mathrm{SC}_{mn}$ *с той же матрицей* $A$.

Справедливость теоремы следует из того, что если каждая строка матрицы $A$ содержит ровно три единицы, то условия $Ax \leqslant \mathbf{2}$ и $Ay \geqslant \mathbf{1}$ эквивалентны при $x = \mathbf{1} - y$.

В заключение этого раздела рассмотрим ещё одну вариацию задачи целочисленного программирования.

Задача о рюкзаке.

Дано: $n$-мерные положительные целочисленные векторы $a$ и $c$, целое число $b > 0$.

Требуется: найти вектор $x \in \{0,1\}^n$, удовлетворяющий неравенству $a^{\mathrm{T}}x \leqslant b$ и максимизирующий линейную функцию $c^{\mathrm{T}}x$.

*Многогранником* $\mathrm{KNP}_n$ *задачи о рюкзаке* называют выпуклую оболочку всех 0/1-векторов $x$, удовлетворяющих неравенству $a^{\mathrm{T}}x \leqslant b$. Заменив в условии задачи неравенство на равенство, получим *задачу о рюкзаке с равенством*. Для её многогранника введём обозначение $\mathrm{EKNP}_n$. Очевидно, что $\mathrm{EKNP}_n$ есть грань многогранника $\mathrm{KNP}_n$. Если же в задаче о рюкзаке с равенством положить $b = (a^{\mathrm{T}}\mathbf{1})/2$, то получим частный случай — задачу о разбиении чисел. Соответствующий многогранник обозначаем $\mathrm{PRT}_n$.

В [15,19] можно найти непосредственное доказательство NP-полноты распознавания несмежности вершин многогранника $\mathrm{EKNP}_n$. Автору настоящей работы известен более простой путь.

**Теорема 6.** *Многогранник* $\mathrm{DCP}_{mn}$ *задачи о двойном покрытии является многогранником* $\mathrm{PRT}_n$ *задачи о разбиении чисел.*

Чтобы убедиться в справедливости теоремы, достаточно заметить, что система линейных диофантовых уравнений $Ax = \mathbf{2}$, фигурирующая в (1), может быть агрегирована в одно уравнение (см. [5,21]).

## 1.3. Кубические подграфы и назначения с ограничением

Задача о кубическом подграфе.

Дано: полный граф $G = (V, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество вершин и каждому ребру $(v_i, v_j) \in E$, $i < j$, приписан некоторый вес $c_{ij} \in \mathbb{R}$.

Требуется: найти в графе $G$ кубический подграф (степень каждой вершины такого подграфа равна трём), суммарный вес рёбер которого минимален.

Под многогранником $\mathrm{QSP}_n$ этой задачи будем понимать выпуклую оболочку множества характеристических векторов кубических подграфов графа $G$.

**Теорема 7 (В. А. Бондаренко, С. В. Юров [1, 11]).** *Задача распознавания несмежности для двух произвольных вершин многогранника кубических подграфов NP-полна.*

В [9] изучается проблема проверки смежности вершин для задачи о назначениях с ограничением. Интерес к этой задаче обусловлен многочисленными приложениями (см., например, [24]).

Задача о назначениях с ограничением.

Дано: полный двудольный граф $G = (V, W, E)$, где $V = \{v_1, \ldots, v_n\}$, $W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ — множества вершин долей и каждому ребру $(v_i, w_j) \in E$ приписан некоторый вес $a_{ij} \in \mathbb{R}$; число-ограничение $b \in \mathbb{R}$.

Требуется: найти в графе $G$ совершенное паросочетание, суммарный вес рёбер которого равен $b$.

Многогранник $\mathrm{CAP}_n$ этой задачи определяется как выпуклая оболочка характеристических векторов $x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n^2}$ всех паросочетаний, удовлетворяющих соотношению $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_{ij} = b$.

**Теорема 8 (А. Альфаки, К. Мурти [9]).** *Распознавание несмежности двух произвольных вершин многогранника задачи о назначениях с ограничением NP-полно.*

## 1.4. 3-выполнимость и частичное упорядочение

Пусть $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ — множество булевых переменных. Если $u \in U$, то $u$ и $\bar{u}$ называются *литералами*. Множество литералов, например $\{u_2, \bar{u}_4, u_5\}$, будем называть *дизъюнкцией* над $U$. Говорят, что дизъюнкция *выполнена* при некотором наборе значений переменных, если хотя бы один из входящих в неё литералов принимает значение «истина». Пусть $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ — некоторый набор дизъюнкций (конъюнкция дизъюнкций). Набор значений переменных называется *выполняющим* для $C$, если выполненными оказываются все дизъюнкции из $C$.

Задача о 3-выполнимости.

Дано: множество $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ булевых переменных и набор дизъюнкций $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$, каждая из которых состоит ровно из трёх литералов.

Требуется: найти выполняющий набор значений переменных.

Для каждого выполняющего набора значений переменных рассмотрим его характеристический вектор $x \in \{0,1\}^d$. Координата $x_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, такого вектора равна 1, если переменная $u_i$ принимает значение «истина», и равна 0, если $u_i$ принимает значение «ложь». Выпуклая оболочка всех указанных характеристических векторов называется *многогранником задачи о 3-выполнимости*; обозначение $3\mathrm{SAT}_{kd}$. Из определения видно, что конструкция многогранника зависит от набора $C$.

**Теорема 9 (С. Фьорини [13]).** *Задача распознавания несмежности двух произвольных вершин многогранника* $3\mathrm{SAT}_{kd}$ *NP-полна.*

В той же работе [13] показано, что многогранники $3\mathrm{SAT}_{kd}$ тесно связаны с многогранниками задачи о частичном упорядочении. Сформулируем её на языке теории графов. Подграф $G'$ полного орграфа $G = (V, A)$ будем называть *частичным порядком*, если он не содержит контуров и для любой пары его дуг $(v_i, v_j)$, $(v_j, v_l)$ выполняется свойство транзитивности:

$$\big((v_i, v_j) \in G'\big)\&\big((v_j, v_l) \in G'\big) \Rightarrow (v_i, v_l) \in G'.$$

Задача о частичном упорядочении.

Дано: полный ориентированный граф $G = (V, A)$ на $n$ вершинах, каждой дуге которого приписан некоторый вес.

Требуется: найти в графе $G$ частичный порядок с наименьшим суммарным весом дуг.

Вершины многогранника $\mathrm{POP}_n$ этой задачи определяются как характеристические векторы всех частичных порядков графа $G$.

**Теорема 10 (С. Фьорини [13, лемма 3.2]).** *Многогранник* $3\mathrm{SAT}_{kd}$ *аффинно эквивалентен грани многогранника* $\mathrm{POP}_n$ *при* $n = 3d + 7k$.

**Теорема 11 (С. Фьорини [13, теорема 1.2]).** *Многогранник* $\mathrm{POP}_n$ *аффинно эквивалентен грани многогранника* $3\mathrm{SAT}_{kd}$, *где* $d = n(n-1)+1$, $k = n(n-1)(n-3/2)$.

## 2. Основная часть

**Теорема 12.** *Многогранник задачи о двойном покрытии* $\mathrm{DCP}_{mn}$ *является гранью многогранника задачи о кубическом подграфе* $\mathrm{QSP}_k$, *где* $6m \leqslant k \leqslant 6m + 4n$.

**Доказательство.** Через $x = (x_i) \in \{0,1\}^n$ будем обозначать вектор, удовлетворяющий условию $Ax = \mathbf{2}$ для многогранника $\mathrm{DCP}_{mn}$. Через $y = (y_{lh}) \in \mathbb{R}^{k(k-1)/2}$ — характеристический вектор кубического подграфа графа $G = (V, E)$ из описания многогранника $\mathrm{QSP}_k$. Воспользуемся тем, что для многогранника $\mathrm{QSP}_k$ гиперплоскости вида $y_{lh} = 0$ являются опорными. Искомую грань будем определять как пересечение нескольких таких гиперплоскостей. Очевидно, что если выполнено $y_{lh} = 0$, то мы можем рассматривать только те подграфы графа $G$, которые не содержат ребро $(v_l, v_h)$.

Разберём вначале случай, когда в каждом столбце матрицы $A$ присутствует не менее трёх единиц. Подразумевая использование гиперплоскостей вида $y_{lh} = 0$, определим подграф $G'$ графа $G$ следующим образом. Множество вершин $V$ разобьём на три подмножества: $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$, $W = \{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ и $T$, где $|T| = 4m$.

Обозначения элементов множества $T$ поставим в зависимость от содержимого матрицы $A$:

$$T = \{t_{ij} : a_{ij} = 1,\ 1 \leqslant i \leqslant m,\ 1 \leqslant j \leqslant n\}.$$

(Поскольку каждая строка матрицы $A$ содержит ровно четыре единицы, то $|T| = 4m$.) Все вершины $t_{ij}$ с одинаковым вторым индексом $j = \mathrm{const}$ соединяем рёбрами в циклы (порядок соединения не важен). Напомним, что по предположению в каждом столбце матрицы $A$ содержится не менее трёх ненулевых элементов. Всего образуется $n$ таких циклов. Вершины множества $W$ тоже соединяем циклом. Добавляем в граф $G'$ рёбра $(w_i, u_i)$ и рёбра $(u_i, v_{ij})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$.

Как уже было сказано ранее, построенный подграф $G'$ определяет некоторую опорную гиперплоскость к многограннику кубических подграфов. Рассмотрим ещё одну опорную гиперплоскость, положив степени вершин множества $W$ равными трём. Пересечение двух указанных гиперплоскостей с многогранником кубических подграфов и будет искомой гранью. Нетрудно проверить, что множество её вершин аффинно эквивалентно множеству вершин многогранника соответствующей задачи о двойном покрытии.

Остаётся рассмотреть случай, когда (некоторые) столбцы матрицы $A$ содержат одну или две единицы. Проблема здесь лишь в том, чтобы соединить соответствующие одну или две вершины множества $T$ в цикл. Чтобы сделать цикл «с одной вершиной», добавим в $T$ четыре вспомогательные вершины: $s_{j1}$, $s_{j2}$, $s_{j3}$, $s_{j4}$. Для цикла «с двумя вершинами» добавим в множество $T$ две вершины: $s_{j1}$, $s_{j2}$. Соединим их так, как показано на рис. 2.

Очевидно, что это не внесёт существенных изменений в общую конструкцию, а число вершин увеличится в худшем случае на $4n$. □

**Теорема 13.** *Многогранник задачи о рюкзаке с равенством* $\mathrm{EKNP}_n$ *является гранью многогранника задачи о назначениях с ограничением* $\mathrm{CAP}_k$*, где* $k = 2n$*.*

**Доказательство.** Из [10] известно, что многогранник задачи о назначениях имеет кубическую грань размерности $\lfloor k/2 \rfloor$. Пересекая эту грань гиперплоскостью $\sum\limits_{i,j} a_{ij} x_{ij} = b$ из условия задачи о назначениях с ограничением, мы получим многогранник задачи о рюкзаке с равенством и одновременно некоторую грань многогранника $\mathrm{CAP}_k$. □

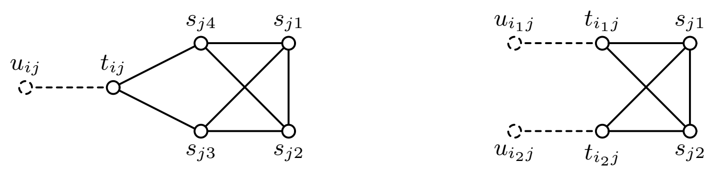


Рис. 2. Циклы с «одной» и «двумя» вершинами

**Теорема 14.** *Многогранник задачи о двойном покрытии* $\mathrm{DCP}_{mn}$ *является многогранником задачи о 3-выполнимость* $3\mathrm{SAT}_{kd}$*, где* $k = 8m$*,* $d = n$*.*

**Доказательство.** Каждое уравнение вида $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 2$ из условия задачи о двойном покрытии можно заменить набором из восьми дизъюнкций:

$$\bigvee_{j \neq i} x_j \quad \text{и} \quad \bigvee_{j \neq i} \bar{x}_j, \quad i = 1, 2, 3, 4. \qquad \square$$

**Теорема 15.** *Многогранник* $3\mathrm{SAT}_{kd}$ *является гранью многогранника асимметричной задачи коммивояжёра* $\mathrm{ATSP}_n$*, где* $n = d + 6k$*.*

**Доказательство.** Рассмотрим произвольный подграф $D'$ орграфа $D$ из задачи коммивояжёра. Очевидно, что выпуклая оболочка характеристических векторов всех гамильтоновых контуров графа $D'$ есть грань многогранника $\mathrm{ATSP}_n$. Теперь для того чтобы показать, что многогранник $3\mathrm{SAT}_{kd}$ является гранью многогранника $\mathrm{ATSP}_n$, достаточно для каждого экземпляра задачи о 3-выполнимости построить граф $D'$ таким образом, чтобы многогранник гамильтоновых контуров этого графа оказался аффинно подобен многограннику $3\mathrm{SAT}_{kd}$.

Рассмотрим множество переменных $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_d\}$ и набор трёхместных дизъюнкций $C = \{C_1, C_2, \ldots, C_k\}$ из условия задачи о 3-выполнимости. Граф $D'$ будем конструировать из вершин $v_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, и компонент $D_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Вершины $v_i$ будут соответствовать переменным $u_i \in U$, а компоненты $D_j$ — дизъюнктам $C_j$. Из каждой вершины $v_i$ в графе $D'$ будут выходить ровно две дуги, соответствующие значениям «истина» и «ложь» переменной $u_i$. Относительно вершины $v_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$, рассмотрим два подмножества в множестве компонент $D_j$:

$$H_i = \{D_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k \mid u_i \in C_j\}, \quad \bar{H}_i = \{D_j,\ 1 \leqslant j \leqslant k \mid \bar{u}_i \in C_j\}.$$

Из вершины $v_i$ дугу «$u_i = \mathrm{true}$» направим в «первую» (порядок не важен) компоненту из множества $H_i$. Затем «первую» компоненту соединим аналогичной дугой со «второй» компонентой из $H_i$ и т. д. Таким образом, все компоненты из $H_i$ будут соединены ориентированной цепью. Из последней компоненты соответствующую дугу направим в вершину $v_{i+1}$ (сложение по модулю $d$). Если множество $H_i$ пустое, то дугу «$u_i = \mathrm{true}$» из вершины $v_i$ направим непосредственно в $v_{i+1}$. Аналогичные построения проделаем с множеством $\bar{H}_i$, начав цепочку с дуги «$u_i = \mathrm{false}$», выходящей из $v_i$ (рис. 3). Итак, в каждую компоненту $D_j$ теперь входит и выходит по три дуги.

Рассмотрим подробно внутреннее устройство компоненты $D_j$. Она состоит из вершин $v_{jl}$ и $w_{jl}$, $1 \leqslant l \leqslant 3$. Таким образом, между па́рами $\{v_{jl}, w_{jl}\}$, $1 \leqslant l \leqslant 3$, и литералами дизъюнкта $C_j$ можно установить взаимно-однозначное соответствие. Следовательно, каждая такая пара оказывается «привязанной» к некоторой вершине $v_i$, точнее к одной из исходящих из этой вершины дуг: $u_i = \mathrm{true}$ или $u_i = \mathrm{false}$. Вершины компоненты соединены между собой «внутренними» дугами трёх типов: $(v_{j\,l}, w_{j\,l})$, $(v_{j\,l}, v_{j\,l+1})$ и $(w_{j\,l+1}, w_{j\,l})$, $1 \leqslant l \leqslant 3$ (сложение $l+1$ выполняется по модулю 3). Других «внутренних» дуг у компоненты $D_j$ нет.

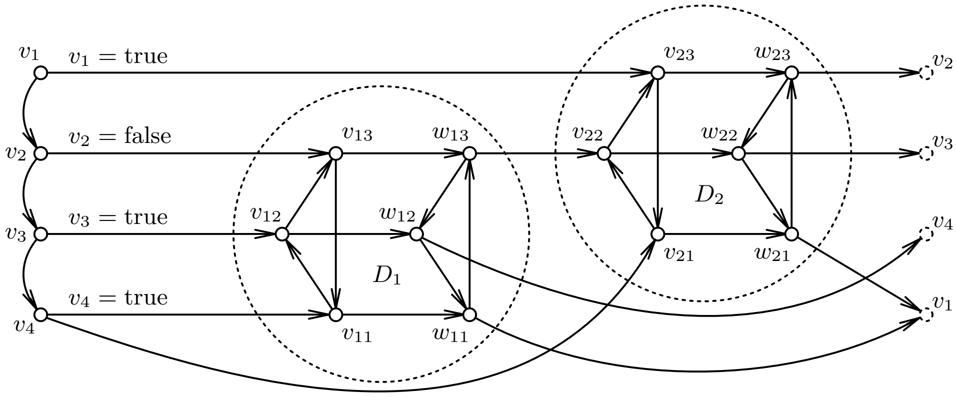


Рис. 3. Граф $D'$ для формулы $(\bar{u}_2 \vee u_3 \vee u_4) \wedge (u_1 \vee \bar{u}_2 \vee \bar{u}_4)$

О том, как «внешние» дуги соединяют $D_j$ с другими компонентами и вершинами $v_i$ конструируемого графа, в общих чертах было сказано выше. Остаётся лишь уточнить детали. Допустим, что пара вершин $v_{j1}$, $w_{j1}$ соответствует литералу $\bar{u}_i$, присутствующему в дизъюнкте $C_j$. Тогда, как было сказано, компонента $D_j$ является одним из звеньев цепи, соединяющей вершину $v_i$ и другие компоненты из множества $\bar{H}_i$, причём начало цепи проходит по дуге «ложь». Из двух дуг, соединяющих компоненту $D_j$ с соседями по этой цепи, входящая дуга будет оканчиваться в $v_{j1}$, а исходящая начинаться в $w_{j1}$.

Укажем некоторые свойства сконструированного графа $D'$. Заметим, что конфигурация любого гамильтонова контура в этом графе однозначно определяется набором дуг, берущих начало в вершинах $v_i$, или, что то же самое, набором значений булевых переменных $u_i$, $1 \leqslant i \leqslant d$. Кроме того, гамильтонов контур в графе $D'$ для каждой компоненты $D_j$ должен содержать хотя бы одну входящую в неё дугу (соответственно, дизъюнкт $C_j$ должен содержать хотя бы один литерал, принимающий значение «истина»). Таким образом, взаимно-однозначное соответствие между вершинами многогранника $3\mathrm{SAT}_{kd}$ и вершинами многогранника гамильтоновых контуров графа $D'$ установлено. Покажем, что соответствующее отображение аффинно.

Заметим, что все дуги, соединяющие множество компонент $H_i$ (или $\bar{H}_i$), присутствуют (или отсутствуют) в некотором гамильтоновом контуре вместе с дугой «истина», выходящей из $v_i$. Таким образом, наличие «внешних» дуг в гамильтоновом контуре линейно зависит от значений переменных из $U$. Остаётся установить аналогичное свойство для «внутренних» дуг. Для этого выберем произвольно компоненту $D_j$ и рассмотрим пару вершин $v_{jl}$ и $w_{jl}$ $(1 \leqslant l \leqslant 3)$. Среди инцидентных этим вершинам дуг есть две «внешние». Одна из них входит в $v_{jl}$, другая берёт начало в $w_{jl}$, причём их присутствие однозначно определяется значением соответствующей переменной $u_i \in U$ (зависимость «внешних» дуг от переменной $u_i$ линейна). Далее возможны два случая.

1. Если указанные «внешние» дуги участвуют в некотором гамильтоновом контуре, то вместе с ними в контур обязательно войдёт и дуга $(v_{j\,l-1}, w_{j\,l-1})$, а дуги $(v_{j\,l-1}, v_{j\,l})$ и $(w_{j\,l}, w_{j\,l-1})$ будут отсутствовать (вычитание $l-1$ по модулю 3).
2. Если же «внешние» дуги не принадлежат некоторому гамильтонову контуру, то дуга $(v_{j\,l-1}, w_{j\,l-1})$ тоже в него не входит, а дуги $(v_{j\,l-1}, v_{j\,l})$ и $(w_{j\,l}, w_{j\,l-1})$ будут ему принадлежать.

Таким образом, наличие или отсутствие любой «внутренней» дуги компоненты $D_j$ однозначно определяется наличием или отсутствием соответствующей «внешней» дуги. Аффинность отображения доказана. □

## 3. Булев квадратичный многогранник является гранью многогранника двойных покрытий

Выпуклая оболочка

$$\mathrm{BQP}(n) = \mathrm{conv}\{x = (x_{ij}) \in \{0,1\}^{n(n+1)/2} \mid x_{ij} = x_{ii}x_{jj},\ 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n\}$$

встречается в литературе под названиями «булев квадратичный многогранник» и «корреляционный многогранник» [3].

Напомним два хорошо известных свойства этого многогранника. Во-первых, множество его вершин однозначно определяется условиями

$$x_{ij} \leqslant x_{ii},\quad x_{ij} \leqslant x_{jj},\quad x_{ii} + x_{jj} - x_{ij} \leqslant 1,\quad x_{ij} \in \{0,1\},\quad 1 \leqslant i \leqslant j \leqslant k. \tag{4}$$

Во-вторых, этот многогранник 3-смежностный, т. е. любые три его вершины образуют 2-грань [3, следствие 31.6.2]. В частности, граф этого многогранника полон.

**Теорема 16.** *Булев квадратичный многогранник* $\mathrm{BQP}_k$ *является гранью многогранника задачи о двойном покрытии* $\mathrm{DCP}_{mn}$, *где* $m = 3k(k-1)/2$, $n = 2k^2 - k + 1$.

**Доказательство.** Неравенства (4) заменой $x_{ij} = 1 - y_{ij}$, $1 \leqslant i < j \leqslant k$, и введением пассивных переменных $z_{ij}^l \in \{0,1\}$, $l = 1,2,3$, и $t = 0$ переводим в

$$\begin{aligned} &x_{ii} + y_{ij} + z_{ij}^1 + t = 2, \\ &x_{jj} + y_{ij} + z_{ij}^2 + t = 2, \qquad 1 \leqslant i < j \leqslant k. \\ &x_{ii} + x_{jj} + y_{ij} + z_{ij}^3 = 2, \end{aligned}$$

Набор таких уравнений, очевидно, определяет некоторую задачу о двойном покрытии. Так как $t = 0$, то мы имеем дело с некоторой гранью многогранника этой задачи. Переменные $y_{ij}$ линейно зависят от $x_{ij}$. В свою очередь переменные $z_{ij}^l$ линейно зависят от $x_{ii}$, $x_{jj}$ и $y_{ij}$. □

**Следствие 17.** *Для любых $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 2$ существует пример многогранника $\mathrm{DCP}_{mn}$, кликовое число графа которого оценивается снизу суперполиномиальной величиной*

$$2^{[p]}, \quad \text{где} \quad p = \min\left\{\sqrt{\frac{2m}{3}+\frac{1}{4}}+\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{n}{2}-\frac{7}{16}}+\frac{1}{4}\right\}.$$

Ясно, что теперь аналогичные утверждения легко могут быть получены для всех остальных семейств многогранников, упомянутых выше: $\{\mathrm{ATSP}_n\}$, $\{\mathrm{STSP}_k\}$, $\{\mathrm{LWP}_n\}$, $\{01\mathrm{P}_{mn}\}$, $\{\mathrm{E01P}_{mn}\}$, $\{\mathrm{SC}_{mn}\}$, $\{\mathrm{KNP}_n\}$, $\{\mathrm{EKNP}_n\}$, $\{\mathrm{PRT}_n\}$, $\{\mathrm{QSP}_n\}$, $\{\mathrm{CAP}_n\}$, $\{3\mathrm{SAT}_{kd}\}$, $\{\mathrm{POP}_n\}$.

## 4. Заключительные замечания

Результаты настоящей работы были анонсированы в [7, 8]. Примерно в это же время, в конце 2011 года, С. Фьорини, С. Массар, С. Покутта, Х. Тивари и Р. де Вольф [14] показали, что булев квадратичный многогранник имеет экспоненциальную сложность расширенной формулировки. С учётом изложенных выше результатов это означает, что сложность расширенных формулировок упоминаемых выше многогранников как минимум суперполиномиальна.

## Литература


[1] Бондаренко В. А., Максименко А. Н. Геометрические конструкции и сложность в комбинаторной оптимизации. — М.: ЛКИ, 2008.

[2] Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи. — М.: Мир, 1982.

[3] Деза М. М., Лоран М. Геометрия разрезов и метрик. — М.: МЦНМО, 2001.

[4] Емеличев В. А., Ковалёв М. М., Кравцов М. К. Многогранники, графы, оптимизация. — М.: Наука, 1981.

[5] Ковалёв М. М. Дискретная оптимизация (целочисленное программирование). — Минск: БГУ, 1977.

[6] Максименко А. Н. Комбинаторные свойства многогранника задачи о кратчайшем пути // ЖВМ и МФ. — 2004. — Т. 44, № 9. — С. 1693—1696.

[7] Максименко А. Н. О комбинаторных свойствах многогранника двойных покрытий // Инф. бюллетень Ассоциации математического программирования. № 12. (Тез. докл. XIV Всероссийской конф. «Математическое программирование и приложения».). — Екатеринбург: УрО РАН, 2011. — С. 197—198.

[8] Максименко А. Н. Об аффинной сводимости комбинаторных многогранников // Докл. РАН. — 2012. — Т. 443, № 6. — С. 661—663.

[9] Alfakih A. Y., Murty K. G. Adjacency on the constrained assignment problem // Discrete Appl. Math. — 1998. — Vol. 87, no. 1. — P. 269—274.

[10] Billera L. J., Sarangarajan A. All 0-1 polytopes are travelling salesman polytopes // Combinatorica. — 1996. — Vol. 16, no. 2. — P. 175—188.

[11] Bondarenko V. A., Yurov S. V. About a polyhedron of cubic graphs // Fund. Inform. — 1996. — P. 28—35.

[12] Chung S.-J. Structural Complexity of Adjacency on 0-1 Convex Polytopes: PhD thesis. — Univ. of Michigan, 1980.

[13] Fiorini S. A combinatorial study of partial order polytopes // Eur. J. Combin. — 2003. — Vol. 24, no. 2. — P. 149—159.

[14] Fiorini S., Massar S., Pokutta S., Tiwary H. R., de Wolf R. Linear vs. semidefinite extended formulations: Exponential separation and strong lower bounds. — 2011. — arXiv:1111.0837v3.

[15] Geist D., Rodin E. Y. Adjacency of the 0-1 knapsack problem // Comput. Operat. Res. — 1992. — Vol. 19, no. 8. — P. 797—800.

[16] Hausmann D. Adjacency on Polytopes in Combinatorial Optimization. — Konigstein: A. Hain, 1980. — (Math. Systems Econ.; Vol. 49).

[17] Junger M., Reinelt G., Rinaldi G. The traveling salesman problem // Handbooks in Operations Research and Management Science. Vol. 7: Network Models. — Amsterdam: Elsevier, 1995. — P. 225—330.

[18] Letchford A. N. The general routing polyhedron: a unifying framework // Eur. J. Operat. Res. — 1999. — Vol. 112, no. 1. — P. 122—133.

[19] Matsui T. NP-completeness of non-adjacency relations on some 0-1-polytopes // Operations Research with Applications in Engineering, Technology and Management. Int. Symp. 1st. — Beijing World Publ., 1995. — (Lect. Notes Operat. Res. 1995; Vol. 1). — P. 249—258.

[20] Matsui T., Tamura S. Adjacency on combinatorial polyhedra // Discrete Appl. Math. — 1995. — Vol. 56. — P. 311—321.

[21] Padberg M. W. Equivalent knapsack-type formulations of bounded integer linear programs: An alternative approach // Naval Res. Logistics Quart. — 1972. — Vol. 19, no. 4. — P. 699—708.

[22] Papadimitriou C. H. The adjacency relation on the traveling salesman polytope is NP-complete // Math. Programming. — 1978. — Vol. 14, no. 1. — P. 312—324.

[23] Salazar-Gonzalez J.-J. The Steiner cycle polytope // Eur. J. Operat. Res. — 2003. — Vol. 147, no. 3. — P. 671—679.

[24] Toktas B., Yen J. W., Zabinsky Z. B. Addressing capacity uncertainty in resource-constrained assignment problems // Comput. Operat. Res. — 2006. — Vol. 33, no. 3. — P. 724—745.

[25] Yannakakis M. Expressing combinatorial optimization problems by linear programs // J. Comput. System Sci. — 1991. — Vol. 43, no. 3. — P. 441—466.