Оценки отношения Штейнера—Громова римановых многообразий

В. А. МИЩЕНКО
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: vladamisch@gmail.com

УДК 519.711.7

Ключевые слова: минимальные сети, минимальные заполнения, отношение Штейнера, отношение Штейнера—Громова.

Аннотация

Отношение Штейнера—Громова метрического пространства X характеризует отношение веса минимального заполнения к длине минимального остовного дерева для конечного подмножества X. Доказано, что отношение Штейнера—Громова произвольного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера—Громова евклидова пространства той же размерности.

Abstract

V. A. Mishchenko, Estimates for the Steiner–Gromov ratio of Riemannian manifolds, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 119—124.

The Steiner—Gromov ratio of a metric space X characterizes the ratio of the minimal filling weight to the minimal spanning tree length for a finite subset of X. It is proved that the Steiner—Gromov ratio of an arbitrary Riemannian manifold does not exceed the Steiner—Gromov ratio of the Euclidean space of the same dimension.

1. Введение

Задача точного поиска кратчайшего дерева и минимального заполнения алгоритмически очень сложна (известны только экспоненциальные алгоритмы). Поэтому велик интерес к приближённым решениям и к погрешностям таких приближений. Отношения типа Штейнера — это меры относительных погрешности приближений такого типа в наихудших возможных ситуациях.

В 2003 г. в [3] рассматривалось отношение Штейнера на многообразиях. Авторами было показано, что отношение Штейнера произвольного связного n-мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера евклидова пространства $\mathbb{R}^n$. Кроме того, в этой работе были даны оценки отношения Штейнера пространства Лобачевского, а также произвольной двумерной поверхности постоянной отрицательной кривизны.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 119—124.

Оказалось, что техника, разработанная в [3], может быть использована для оценки отношения Штейнера—Громова римановых многообразий.

Отношение Штейнера—Громова показывает отклонение длины минимального остовного дерева от длины минимального заполнения. Напомним основные определения.

Пусть $\mathcal{M}=(M,\rho)$ — конечное псевдометрическое пространство, $G=(V,E)$ — связный граф, соединяющий M, и $\omega\colon E \to \mathbb{R}_+$ — некоторое отображение в неотрицательные вещественные числа, называемое *весовой функцией*, порождающее взвешенный граф $\mathcal{G} = (G,\omega)$. Функция ω задаёт на V псевдометрику d_ω: расстоянием между вершинами графа $\mathcal{G}$ называется наименьший из весов путей, соединяющих эти вершины. Если для любых точек p и q из M выполняется $\rho(p,q) \leqslant d_\omega(p,q)$, то взвешенный граф $\mathcal{G}$ называется *заполнением* пространства $\mathcal{M}$, а граф G — *типом* этого заполнения. Число $\operatorname{mf} M$, равное $\inf \omega(\mathcal{G})$, где инфимум берётся по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства $\mathcal{M}$, называется *весом* минимального заполнения, а заполнение $\mathcal{G}$, для которого $\omega(\mathcal{G}) = \operatorname{mf}(\mathcal{M})$, — *минимальным заполнением*.

Пусть X — множество, ρ — некоторая метрика на X и N — произвольное конечное подмножество в X. Пусть G — граф с множеством вершин N. Метрика ρ порождает весовую функцию, ставящую в соответствие каждому ребру $xy \in E(G)$ число $\rho(x,y)$. Эту весовую функцию обозначим той же буквой ρ. Дерево G на N с наименьшим возможным весом $\rho(G)$ назовём *минимальным остовным деревом на* N. Его вес обозначим через $\operatorname{mst}(N,\rho)$, а множество всех таких деревьев — через MST_N.

Отношением Штейнера—Громова подмножества N называется число

$$\operatorname{sgr}(N,\rho) = \frac{\operatorname{mf}(N,\rho)}{\operatorname{mst}(N,\rho)}.$$

Число $\inf \operatorname{sgr}(N,\rho)$, где инфимум берётся по всем нетривиальным (т. е. состоящим не менее чем из двух точек) конечным подмножествам N из X с не более чем $n > 1$ вершинами, обозначим через $\operatorname{sgr}_n(X,\rho)$ и назовём *отношением Штейнера—Громова степени* n *пространства* (X,ρ). Число $\inf \operatorname{sgr}_n(X,\rho)$, где инфимум берётся по всем натуральным $n > 1$, назовём *отношением Штейнера-Громова пространства* (X,ρ) и обозначим $\operatorname{sgr}(X,\rho)$. Заметим, что $\operatorname{sgr}_2(X,\rho)$=1 для любого нетривиального метрического пространства.

2. Основные результаты

Теорема 1. *Отношение Штейнера—Громова произвольного связного* n*-мерного риманова многообразия не превосходит отношения Штейнера—Громова евклидова пространства* $\mathbb{R}^n$.

Докажем сначала несколько вспомогательных результатов.

Лемма 1. *Пусть* X *— некоторое множество,* ρ_1 *и* ρ_2 *— метрики на множестве* X*. Предположим, что для некоторых чисел* $c_2 \geqslant c_1 > 0$ *неравенства*

$c_1\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant c_2\rho_2(x,y)$ выполнены для любых двух точек x и y из X. Тогда

$$\frac{c_1}{c_2}\operatorname{sgr}(X,\rho_2) \leqslant \operatorname{sgr}(X,\rho_1) \leqslant \frac{c_2}{c_1}\operatorname{sgr}(X,\rho_2).$$

Доказательство. Действительно, если G — минимальное остовное дерево для N в метрике ρ_1, то G является остовным деревом для N в любой другой метрике. Следовательно,

$$\operatorname{mst}(N,\rho_1) = \rho_1(G) \geqslant c_1 \operatorname{mst}(N,\rho_2).$$

Аналогично

$$\operatorname{mst}(N,\rho_2) \geqslant \frac{1}{c_2}\operatorname{mst}(N,\rho_1),$$

откуда следует, что

$$\operatorname{mst}(N,\rho_1) \leqslant c_2 \operatorname{mst}(N,\rho_2).$$

Если (G,ω) — минимальное заполнение для (N,ρ_1), то для любых двух вершин x и y дерева G

$$c_1\rho_2(x,y) \leqslant \rho_1(x,y) \leqslant d_\omega(x,y),$$

поэтому взвешенное дерево $(G,\omega/c_1)$ является заполнением для (N,ρ_2), откуда следует, что

$$\operatorname{mf}(N,\rho_2) \leqslant \frac{\omega(G)}{c_1} = \frac{\operatorname{mf}(N,\rho_1)}{c_1},$$

т. е.

$$c_1 \operatorname{mf}(N,\rho_2) \leqslant \operatorname{mf}(N,\rho_1).$$

Аналогично если (G,ω) — минимальное заполнение для (N,ρ_2), то

$$\frac{1}{c_2}\rho_1(x,y) \leqslant \rho_2(x,y) \leqslant d_\omega(x,y),$$

поэтому $(G,c_2\omega)$ — заполнение для (N,ρ_1). Тогда

$$\operatorname{mf}(N,\rho_1) \leqslant c_2\omega(G) = c_2 \operatorname{mf}(N,\rho_2).$$

Из двух полученных двойных неравенств вытекает требуемое. □

Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и (X',ρ') — его подпространство, т. е. $X' \subseteq X$, и для любых точек $u,v \in X'$ выполнено $\rho'(u,v) = \rho(u,v)$. Так как каждое конечное подмножество подпространства X' является также конечным подмножеством всего пространства X, справедливо следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть (X,ρ) — метрическое пространство, и (X',ρ') — его подпространство. Тогда*

$$\operatorname{sgr}(X',\rho') \geqslant \operatorname{sgr}(X,\rho).$$

Предложение 1. *Пусть $f\colon X \to Y$ — отображение метрического пространства (X,ρ_X) в метрическое пространство (Y,ρ_Y), не увеличивающее расстояний, т. е. для любых двух точек x и y из X выполняется*

$$\rho_Y\bigl(f(x),f(y)\bigr) \leqslant \rho_X(x,y).$$

Тогда для любого конечного множества $N \subset X$ выполняется

$$\mathrm{mf}(N) \geqslant \mathrm{mf}\big(f(N)\big)$$

и

$$\mathrm{mst}(N, \rho_X) \geqslant \mathrm{mst}(f(N), \rho_Y).$$

Доказательство. Докажем первое неравенство. Достаточно проверить, что если (G, ω) — заполнение для N, то тот же граф является заполнением и для $f(N)$. Действительно, если $x, y \in N$, то

$$d_\omega(x, y) \geqslant \rho_X(x, y) \geqslant \rho_Y\big(f(x), f(y)\big).$$

Рассмотрим минимальное остовное дерево T на N. Построим на $f(N)$ граф, соединив те и только те вершины, среди прообразов которых есть смежные в T. Полученный граф T' связен (действительно, возьмём любые две его вершины, любые их прообразы, эти прообразы соединены в T путём, образ пути соединяет исходные вершины). Таким образом, $\rho_Y(T') \leqslant \rho_X(T)$, что и требовалось. □

Пусть M — произвольное связное n-мерное риманово многообразие. Для каждой кусочно-гладкой кривой γ обозначим через $\mathrm{len}(\gamma)$ её длину по отношению к римановой метрике. Обозначим через ρ внутреннюю метрику, порождённую римановой метрикой, т. е. $\rho(x, y) = \inf\limits_{\gamma} \mathrm{len}(\gamma)$, где точная нижняя грань берётся по всем кусочно-гладким кривым γ, соединяющим точки x и y.

Пусть P — некоторая точка из M. Рассмотрим нормальные координаты $x^1, \ldots, x^n$ с центром в точке P, для которых риманова метрика g_{ij}, вычисленная в точке P , совпадает с δ_{ij}. Пусть $U(\delta)$ — выпуклый открытый геодезический шар радиуса δ с центром в точке P, для которого каждая его пара точек x и y соединяется единственной кратчайшей геодезической γ, причём эта геодезическая лежит в $U(\delta)$. При этом $\rho(x, y) = \mathrm{len}(\gamma)$. Таким образом, шар $U(\delta)$ является метрическим пространством с внутренней метрикой, т. е. метрикой, в которой расстояние между точками равно точной нижней грани длин всех измеримых кривых, соединяющих эти точки. В координатах x^i шар $U(\delta)$ задаётся так:

$$U(\varepsilon) = \{(x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2 < \delta^2\},$$

поэтому если на $U(\delta)$ задать евклидово расстояние ρ_ε (по отношению к нормальным координатам x^i), то метрическое пространство $(U(\delta), \rho_\varepsilon)$ тоже будет пространством с внутренней метрикой, порождённой евклидовой метрикой δ_{ij}.

В силу гладкой зависимости метрики $g_{ij}(x)$ от точки $x \in U(\delta)$ для любого ε, $1/n^2 > \varepsilon > 0$, существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x \in U(\delta)$ выполняется

$$|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \varepsilon.$$

Следующее предложение было доказано в [3].

Предложение 2. *Пусть $\|v\|_g$ обозначает длину касательного вектора $v \in T_xM$ в метрике g_{ij}, а $\|v\|_{\mathrm{e}}$ — длину этого вектора в евклидовой метрике δ_{ij}. Если для любых i и j выполняется неравенство $|g_{ij}(x) - \delta_{ij}| < \varepsilon$, то*

$$\sqrt{1 - n^2\varepsilon}\|v\|_{\mathrm{e}} \leqslant \|v\|_g \leqslant \sqrt{1 + n^2\varepsilon}\|v\|_{\mathrm{e}}.$$ □

Следствие 1. *Пусть M — произвольное n-мерное риманово многообразие, ρ и ρ_{e} такие, как выше. Тогда для любого $1/n^2 > \varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что для всех точек $x, y \in U(\delta)$ выполняется*

$$\sqrt{1-n^2\varepsilon}\rho_{\mathrm{e}}(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant \sqrt{1+n^2\varepsilon}\rho_{\mathrm{e}}(x,y).$$

Лемма 3. $\operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n) = \operatorname{sgr}(B)$, *где B — открытый шар в $\mathbb{R}^n$ со стандартной евклидовой метрикой.*

Доказательство. В силу своей выпуклости шар является подпространством в $\mathbb{R}^n$ как в метрическом пространстве, поэтому по лемме 2

$$\operatorname{sgr}(B) \geqslant \operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n).$$

С другой стороны, каждое $N \subset \mathbb{R}^n$ можно сжатием и сдвигом поместить в шар. При этом все расстояния умножаются на одно и то же λ. Следовательно, на λ умножаются вес заполнения и длина остовного дерева. Таким образом, имеет место неравенство

$$\operatorname{sgr}(B) \leqslant \operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n),$$

что и требовалось доказать. □

Из лемм 1 и 3 и следствия 1 вытекает следующий результат.

Следствие 2. *Пусть M — произвольное n-мерное риманово многообразие и $U(\varepsilon) \subset M$ — открытый выпуклый шар малого радиуса ε с центром в некоторой точке P. Обозначим через ρ внутреннюю метрику на M, порождённую римановой метрикой. Тогда*

$$\sqrt{\frac{1-n^2\varepsilon}{1+n^2\varepsilon}}\operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n) \leqslant \operatorname{sgr}(U(\varepsilon),\rho) \leqslant \sqrt{\frac{1+n^2\varepsilon}{1-n^2\varepsilon}}\operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n).$$

Доказательство теоремы 1. Пусть M — произвольное связное n-мерное риманово многообразие и ρ — внутренняя метрика, порождённая римановой метрикой многообразия M. Пусть $P \in M$ — произвольная точка из M и $U(\varepsilon)$ — открытый выпуклый шар радиуса $\varepsilon < 1/n^2$ с центром в P. Введём в $U(\varepsilon)$ нормальные координаты x^i, и пусть ρ_{e} — метрика на $U(\varepsilon)$, порождённая евклидовой метрикой δ_{ij}.

Возьмём некоторую убывающую последовательность ε_i положительных чисел, такую что $\varepsilon_i < \varepsilon$ для любого i и $\varepsilon_i \to 0$ при $i \to \infty$, и рассмотрим семейство вложенных подмножеств $X_i = U(\varepsilon_i)$. По лемме 3 имеем

$$\operatorname{sgr}(U(\varepsilon_i),\rho_{\mathrm{e}}) = \operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n).$$

Кроме того, в силу выпуклости шаров $U(\varepsilon_i)$ по отношению к внутренней метрике ρ', порождённой внутренней метрикой g_{ij}, эта внутренняя метрика совпадает с ограничением метрики ρ. Таким образом, шар $U(\varepsilon)$ с внутренней метрикой ρ' является подпространством в (M,ρ), откуда по лемме 2 получаем, что $\operatorname{sgr}(M,\rho) \leqslant \operatorname{sgr}(X_i,\rho)$. По следствию 2

$$\operatorname{sgr}(X_i,\rho) \leqslant \sqrt{\frac{1+n^2\varepsilon_i}{1-n^2\varepsilon_i}}\operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n).$$

Так как
$$\sqrt{\frac{1+n^2\varepsilon_i}{1-n^2\varepsilon_i}} \to 1 \quad \text{при} \quad i \to \infty$$
в силу выбора последовательности ε_i, получаем
$$\inf_i \operatorname{sgr}(X_i, \rho) \leqslant \operatorname{sgr}(\mathbb{R}^n),$$
но по лемме 2
$$\operatorname{sgr}(M, \rho) \leqslant \inf_i \operatorname{sgr}(X_i, \rho).$$
Доказательство закончено. □

Теорема 2. *Отношение Штейнера—Громова пространства Лобачевского равно* $1/2$.

Доказательство теоремы 2 вытекает из приводимого в [2] утверждения, что отношение Штейнера—Громова произвольно метрического пространства не меньше $1/2$, а также теоремы Н. Иннами и Б. Кима [4], утверждающей, что отношение Штейнера односвязной поверхности постоянной отрицательной кривизны без границы равно в точности $1/2$. Осталось заметить, что отношение Штейнера—Громова не превосходит отношения Штейнера в силу того, что длина минимального заполнения не превосходит длины дерева Штейнера.

Литература

[1] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — М.; Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.

[2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А., Цислик Д. Отношение Штейнера для многообразий // Мат. заметки. — 2003. — Т. 74, № 3. — С. 387—395.

[4] Innami N., Kim B. H. Steiner ratio for hyperbolic surfaces // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 2006. — Vol. 82, no. 6. — P. 77—79.