

Перечисление неприводимых контактных графов на сфере*

О. Р. МУСИН

*Институт проблем передачи информации РАН,
Техасский университет в Браунсвилле, США
e-mail: oleg.musin@utb.edu*

А. С. ТАРАСОВ

*Институт проблем передачи информации РАН
e-mail: tarasov.alexey@gmail.com*

УДК 514.17

Ключевые слова: контактные графы, сферические упаковки, контактное число.

Аннотация

В этой статье перечислены все найденные с помощью компьютера локально-жесткие упаковки N конгруэнтных кругов (сферических шапочек) на единичной сфере \mathbb{S}^2 для $N < 12$. Эта задача эквивалентна перечислению сферических неприводимых контактных графов.

Abstract

O. R. Musin, A. S. Tarasov, Enumeration of irreducible contact graphs on the sphere, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 125–145.

In this article, using the computer, are enumerated all locally-rigid packings by N congruent circles (spherical caps) on the unit sphere \mathbb{S}^2 with $N < 12$. This is equivalent to the enumeration of irreducible spherical contact graphs.

1. Введение

Упаковка шаров в пространстве называется *жесткой* или иногда *локально-жесткой*, если они расположены так, что каждый шар из упаковки зажат соседями и его нельзя сдвинуть в сторону с тем, чтобы увеличить минимальное расстояние между центром этого шара и центрами других шаров.

Рассмотрим N не пересекающихся шаров одинакового радиуса r в \mathbb{R}^3 , которые расположены так, что все они касаются одного (центрального) шара единичного радиуса. Обозначим через $P := \{A_1, \dots, A_N\}$ точки касания внешними шарами центрального шара. Соединим точки A_i и A_j ребром (минимальной

*Работа выполнена при частичной поддержке гранта Правительства Российской Федерации 11.G34.31.0053, гранта РФФИ 11-01-00735 и гранта Национального научного фонда США DMS-1101688.

дугой большого круга), если соответствующие внешние шары касаются. Полученный граф будем называть *контактным* и обозначать $CG(P)$. Если же эта упаковка на \mathbb{S}^2 является локально-жесткой, то будем называть граф $CG(P)$ *неприводимым*. Таким образом, задача изучения жестких упаковок локально сводится к изучению неприводимых графов.

Эта геометрическая задача связана с другими задачами упаковки шаров. Одно из основных приложений вне математики — это материаловедение, где рассматриваются локально-жесткие упаковки твердыми телами и наночастицами (см., например, [14, 17]). Заметим также, что большинство конфигураций физических частиц, задающих минимум потенциальной энергии, тоже являются локально-жесткими.

В математике В. Хабиخت, К. Шютте, Б. Л. ван дер Варден и Л. Данцер применяли неприводимые контактные графы при решении проблемы контактных чисел и проблемы Таммеса [13, 16, 31, 32, 34]. Разберём здесь коротко эти две классические проблемы.

Контактным числом $k(n)$ называют наибольшее число непересекающихся шаров одинакового радиуса в \mathbb{R}^n , которые можно расположить так, чтобы все они касались одного (центрального) шара такого же радиуса. Очевидно, что $k(2) = 6$. В трёхмерном пространстве в задаче о контактных числах спрашивается: «Как много белых бильярдных шаров могут одновременно касаться чёрного бильярдного шара?»

Наиболее симметричная конфигурация (12 бильярдных шаров вокруг одного) — это когда центры 12 шаров расположены в вершинах правильного икосаэдра, а центральный шар расположен в центре икосаэдра. Однако эти 12 внешних шаров не касаются друг друга и могут свободно перемещаться по поверхности центрального шара. Таким образом, возможно, что эти 12 шаров можно сдвинуть в одну сторону, так что найдётся место для 13-го шара?

Этот вопрос был предметом спора между И. Ньютоном и Д. Грегори в 1694 году. Ньютон считал, что $k(3) = 12$, в то время как Грегори думал, что ответ может быть равен 13. Эту задачу Ньютона—Грегори часто называют *проблемой тринадцати шаров*.

Проблема тринадцати шаров оказалось достаточно трудной и была решена только в 1953 году. К. Шютте и Б. Л. ван дер Варден [32] доказали, что Ньютон был прав и $k(3) = 12$. В 1956 году Дж. Лич [19] напечатал двухстраничный набросок элегантного доказательства. Это доказательство было приведено в первом издании известной книги М. Айгнера и Г. Циглера «Доказательства из Книги» [2]. Однако эта глава была исключена из книги при втором издании, так как авторам не удалось привести подробное доказательство без громоздких вычислений, основанных на сферической тригонометрии. В последние 12 лет было опубликовано несколько новых решений этой старой проблемы [3, 7, 18, 20, 21, 23].

Несложно убедиться, что проблема тринадцати шаров сводится к следующей задаче: доказать, что на единичной сфере \mathbb{S}^2 нельзя расположить 13 точек

так, чтобы расстояния между ними были не меньше чем 60° в угловом измерении. (Эта задача эквивалентна тому, что на единичной сфере \mathbb{S}^2 не найдётся контактного графа Γ с рёбрами одинаковой длины не меньше чем 60° .)

У проблемы 13 шаров имеется естественное обобщение: найти расположение множества X , состоящего из N точек на \mathbb{S}^2 , такое что минимальное расстояние между точками X максимально возможное. Эту задачу впервые поставил голландский ботаник Р. М. Л. Таммес [33] (см. также [10, раздел 1.6, задача 6]).

Задача Таммеса решена только для нескольких значений N : для $N = 3, 4, 6, 12$ её решил Л. Фейеш Тот [15], для $N = 5, 7, 8, 9$ — К. Шютте и Б. Л. ван дер Варден [31], для $N = 10, 11$ — Л. Данцер [13] (для $N = 11$ см. также [6]) и для $N = 24$ — Р. М. Робинсон [30]. Недавно мы решили эту задачу для $N = 13$ [28].

Заметим, что проблема контактных чисел решена только для размерностей $n = 3, 4, 8$ и 24 (см. [5, 22, 24, 26]). Доказательства в этих работах основаны на методе Дельсарта и его обобщениях (см., например, [4, 12, 25, 27]).

2. Неприводимые контактные графы

2.1. Основные определения

Обозначим через \mathbb{S}^2 единичную сферу в \mathbb{R}^3 . Для точек x и y на сфере $\text{dist}(x, y)$ — это расстояние в угловом измерении.

Пусть X — конечное подмножество единичной сфере \mathbb{S}^2 . Обозначим

$$\psi(X) := \min_{x, y \in X} \{\text{dist}(x, y)\}, \text{ где } x \neq y.$$

Пусть d_N обозначает наибольшее значение $\psi(X)$, которое может достигаться для $X \subset \mathbb{S}^2$ при $|X| = N$, т. е.

$$d_N := \max_{X \subset \mathbb{S}^2} \{\psi(X)\} \text{ при } |X| = N.$$

Контактные графы

Как и выше, X — конечное подмножество \mathbb{S}^2 . *Контактным графом* $CG(X)$ называется граф на \mathbb{S}^2 с вершинами в X и рёбрами (дугами) xy , $x, y \in X$, минимальной длины, т. е. $\text{dist}(x, y) = \psi(X)$.

Сдвиг вершины

Будем говорить, что вершину $x \in X$ можно *сдвинуть в сторону*, если в любой открытой окрестности x найдётся такая точка $x' \in \mathbb{S}^2$, что

$$\text{dist}(x', X \setminus \{x\}) > \text{dist}(x, X \setminus \{x\}).$$

Неприводимые графы

Назовём контактный граф $CG(X)$ *неприводимым*, если ни одну из его вершин нельзя сдвинуть в сторону. Этот термин используется в [1, 13, 31, 32].

Обозначим через J_N семейство всех конечных множеств X в \mathbb{S}^2 при $|X| = N$, таких что граф $CG(X)$ неприводим.

Д-неприводимые графы

Л. Данцер [13, раздел 1] определил следующую операцию. Пусть x, y, z — вершины $CG(X)$, $\text{dist}(x, y) = \text{dist}(x, z) = \psi(X)$. Обозначим через x^0 зеркальный образ точки x относительно дуги большого круга yz (рис. 1). Мы назовём эту операцию *Д-отражением*, если $\text{dist}(x^0, X \setminus \{x, y, z\}) > \psi(X)$.

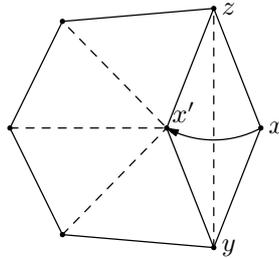


Рис. 1. Д-отражение

Неприводимый контактный граф $CG(X)$ будем называть *Д-неприводимым*, если он не допускает ни одного Д-отражения.

2.1.1. Максимальные графы

Предположим, что для $X \subset \mathbb{S}^2$ при $|X| = N$ имеет место равенство $\psi(X) = d_N$. Тогда будем называть контактный граф $CG(X)$ *максимальным*.

2.2. Свойства неприводимых контактных графов

В этом разделе мы рассматриваем подмножества $X \subset \mathbb{S}^2$, для которых граф $CG(X)$ является неприводимым, т. е. $X \in J_N$. Следующие свойства неприводимых графов были опубликованы в [8, 9, 13, 31] (см. также [1, гл. VI]).

Пусть $a, b, x, y \in X$, $\text{dist}(a, b) = \text{dist}(x, y) = \psi(X)$. Тогда кратчайшие дуги ab и xy не пересекаются. В противном случае длина одной из дуг ax , ay , bx , by будет меньше, чем $\psi(X)$. Из этого вытекает следующее утверждение.

Предложение 2.1. Если X — конечное подмножество \mathbb{S}^2 , то $CG(X)$ является планарным графом.

Предложение 2.2. Если $X \in J_N$, то все грани $CG(X)$ являются выпуклыми в \mathbb{S}^2 .

Предложение 2.3. Если X является максимальным, то для $N > 5$ граф $CG(X)$ является D -неприводимым и, в частности, неприводимым.

Предложение 2.4. Если $X \in J_N$, то степени вершин графа $CG(X)$ могут быть равны только 0 (изолированные вершины), 3, 4 или 5.

Предложение 2.5. Если $X \in J_N$, то грани $CG(X)$ являются многоугольниками не более чем с $\lfloor 2\pi/\psi(X) \rfloor$ вершинами.

Следующее свойство было найдено К. Бёрёцким и Л. Сабо [8, лемма 8, лемма 9 (iii)].

Предложение 2.6. Пусть $X \in J_N$. Если $CG(X)$ содержит изолированные вершины, то эти вершины лежат внутри граней $CG(X)$ с шестью или более вершинами. Более того, внутри шестиугольника не может лежать две изолированные вершины.

Комбинируя эти предложения, получаем следующие комбинаторные свойства неприводимых контактных графов.

Следствие 2.1. Если $X \in J_N$, то $G := CG(X)$ обладает следующими свойствами:

- 1) G является планарным графом;
- 2) степень любой вершины G равна 0, 3, 4 или 5;
- 3) если у G есть изолированная вершина v , то v лежит в грани с $m \geq 6$ вершинами. Гексагональная грань G не может содержать две изолированные вершины.

3. Работа Л. Данцера по неприводимым графам

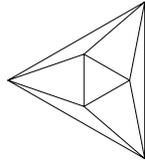
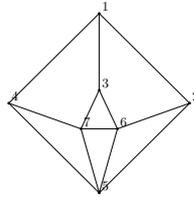
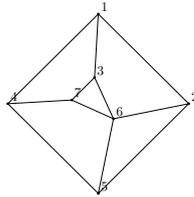
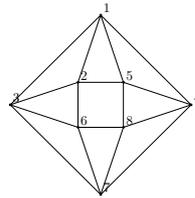
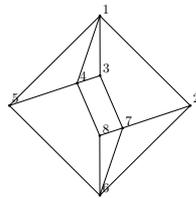
В [13] Л. Данцер приводит решение проблемы Таммеса для $N = 10$ и $N = 11$. Эта статья — английский перевод его докторской диссертации «Endliche Punktmengen auf der 2-sphäre mit möglichst großem Minimalabstand», Гёттингенский университет, 1963 г. В этой работе, в частности, к понятию приводимости было добавлено понятие D -отражения и D -приводимости (в статье применяется другая терминология, но здесь мы используем « D » в честь Л. Данцера).

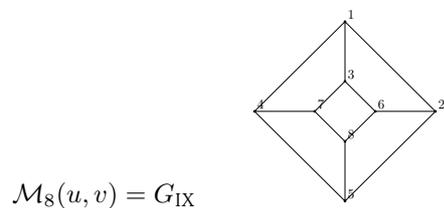
В [13] Л. Данцер приводит список D -неприводимых графов для $6 \leq N \leq 10$. Так как максимальные контактные графы являются D -неприводимыми, то в этот список включены и графы, дающие решение проблемы Таммеса для этих n . Заметим, что для случая $N = 11$ Л. Данцер рассматривал только максимальные контактные графы.

Ниже приводится список Данцера D -неприводимых графов. Мы сохранили обозначения из [13].

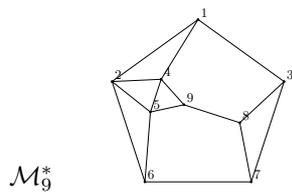
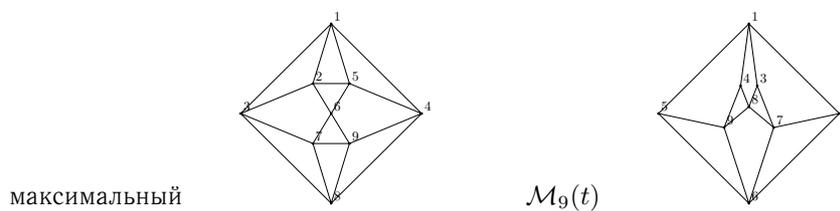
3.1. $N = 6$

максимальный

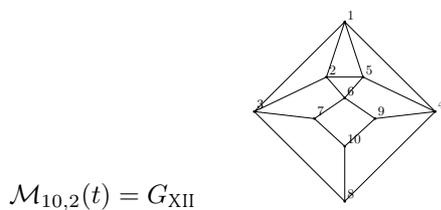
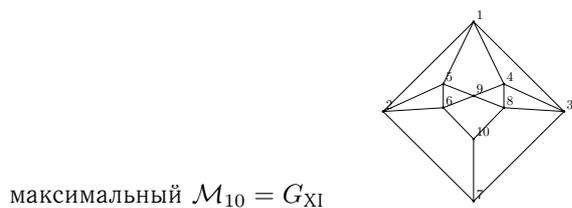
 $G_I = \mathcal{M}_6(t)$ **3.2. $N = 7$** максимальный $\mathcal{M}_7 = G_{III}$  $\mathcal{M}_7(t) = G_{II}$ **3.3. $N = 8$** максимальный $\mathcal{M}_8 = G_V$  $\mathcal{M}_8(t) = G_{IV}$ 

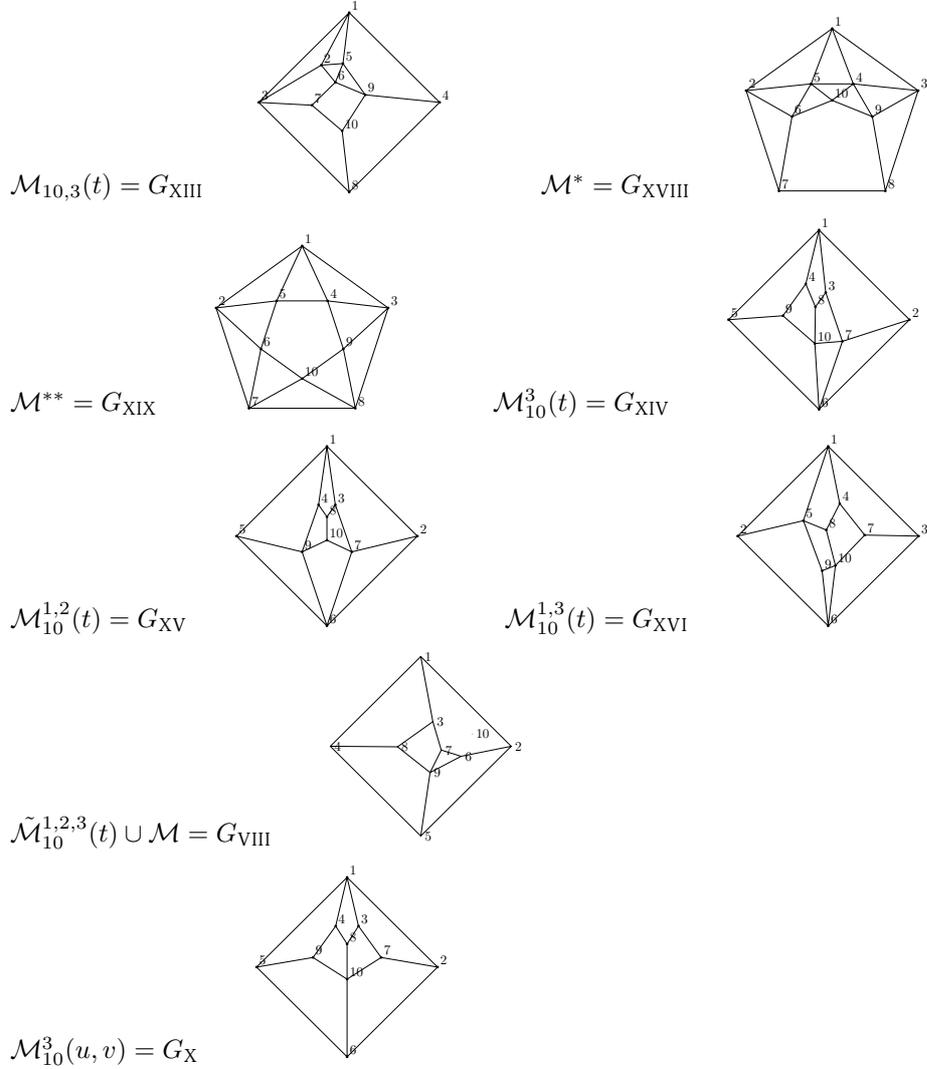


3.4. $N = 9$



3.5. $N = 10$





4. Перечисление неприводимых контактных графов

4.1. Геометрические вложения неприводимых контактных графов

Пусть конечное множество точек $X \subset \mathbb{S}^2$ такое, что контактный граф $CG(X)$ является неприводимым. В следствии 2.1 мы собрали вместе комбинаторные свойства $CG(X)$. Имеется целый ряд геометрических свойств этих графов.

Напомним, что все грани $CG(X)$ являются выпуклыми (предложение 2.2). Поскольку все рёбра $CG(X)$ имеют одинаковую длину $\psi(X)$, то грани — выпуклые равносторонние сферические многоугольники с числом вершин, не превосходящим $\lfloor 2\pi/\psi(X) \rfloor$.

Рассмотрим теперь планарный граф G с заданными гранями $\{F_k\}$, который удовлетворяет следствию 2.1. Мы будем рассматривать вложения этого графа в \mathbb{S}^2 как неприводимого контактного графа $CG(X)$ для некоторого $X \subset \mathbb{S}^2$.

Вложение графа G в \mathbb{S}^2 однозначно задаётся следующим набором параметров (переменных):

- 1) длина ребра d ;
- 2) наборы углов u_{ki} , $i = 1, \dots, m_k$, граней F_k (здесь m_k обозначает число вершин у грани F_k).

В нашей работе [28] по проблеме Таммеса для $N = 13$ были рассмотрены основные геометрические соотношения между этими параметрами [28, утверждения 3.6—3.11]. Приведём здесь основные утверждения из этой работы. (Мы добавили сюда общее утверждение для любого $m > 4$.)

Предложение 4.1.

1. $u_{ki} < \pi$ для всех i и k .
2. $u_{ki} \geq \alpha(d)$ для всех i и k , где

$$\alpha(d) := \arccos\left(\frac{\cos d}{1 + \cos d}\right)$$

является углом равностороннего сферического треугольника со стороной d .

3. $\sum_{\tau \in I(v)} u_\tau = 2\pi$ для всех вершин v графа G . Здесь $I(v)$ — множество индексов углов при вершине v .
4. Если $m_k = 3$, то F_k — равносторонний треугольник с углами

$$u_{k1} = u_{k2} = u_{k3} = \alpha(d).$$

5. В случае $m_k = 4$ F_k является сферическим ромбом, и стало быть, $u_{k1} = u_{k3}$, $u_{k2} = u_{k4}$. По правилу Непера для прямоугольного сферического треугольника получаем равенство

$$\operatorname{ctg} \frac{u_{k1}}{2} \operatorname{ctg} \frac{u_{k2}}{2} = \cos d.$$

6. В случае $m_k > 3$ $F_k = A_1 A_2, \dots, A_{m_k}$ является выпуклым равносторонним сферическим многоугольником с углами u_{k1}, \dots, u_{m_k} . Многоугольник F_k однозначно (с точностью до изометрии) определяется $s := m_k - 3$ углами и d . Тогда однозначно заданы такие функции g_i и ζ_{ij} , что $u_{ki} = g_i(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d)$ и $\operatorname{dist}(A_i, A_j) = \zeta_{i,j}(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d)$. Из этого вытекают следующие соотношения:

- а) $u_{ki} = g_i(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d)$ для $i = m_k - 2, m_k - 1, m_k$;
- б) $\zeta_{i,j}(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d) \geq d$ для всех $i \neq j$.

7. Рассмотрим теперь случай, когда внутри $F_k = A_1A_2, \dots, A_{m_k}$ имеется изолированная вершина (это может быть только если $m_k > 5$). Зададим

$$\lambda(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d) =: \max_{p \in F_k} \min_i \{\text{dist}(p, A_i)\}.$$

Тогда $\lambda(u_{k1}, \dots, u_{ks}, d) > d$.

4.2. Описание алгоритма

В этом разделе мы кратко коснёмся алгоритма по перечислению неприводимых контактных графов с N вершинами. Более детальная информация содержится в <http://dcs.isa.ru/taras/irreducible/>.

Алгоритм состоит из двух частей.

- I. На первом этапе составляется список L_N , состоящий из всех графов с N вершинами и удовлетворяющий следствию 2.1.
- II. С использованием линейной аппроксимации соотношений из предложения 4.1 из L_N удаляются все графы, которые не могут быть вложены в сферу.

I. Чтобы создать список L_N мы используем программу «plantri» Г. Бринкманна и Б. Маккея (см. [29]). Эта программа является генератором неизоморфных планарных графов различных классов, включая триангуляции и другие разбиения на выпуклые многоугольники. (В [11] описываются принципы работы программы «plantri» и приводятся основные алгоритмы, на основе которых написана программа.)

II. Рассмотрим граф G из L_N . Мы начнём с уровня приближения $\ell = 1$. Используя предложение 4.1, выпишем линейные равенства и неравенства на параметры (углы) $\{u_i\}$ этого графа.

Для $\ell = 1$ мы используем следующие соотношения:

- 1) N линейных равенств

$$\sum_{k \in I(v)} u_k = 2\pi$$

(пункт 3 предложения 4.1);

- 2) при $2\pi/N \leq d$ получаем $2\pi/N \leq \alpha$;
- 3) для четырёхугольника из пункта 5 предложения 4.1 получаем равенства $u_3 = u_1$, $u_4 = u_2$ и неравенства $\alpha \leq u_i \leq 2\alpha$, $i = 1, 2$;
- 4) из равенства $u_2 = \rho(u_1, d)$, пользуясь монотонностью функции ρ по обоим параметрам, получаем минимальные и максимальные оценки для u_2 :

$$\rho(u_{1,\max}, d_{\min}) \leq u_2 \leq \rho(u_{1,\min}, d_{\max}).$$

Используя этот набор линейных равенств и неравенств, мы можем получить минимальное и максимальное значение каждой из переменных. Это даёт нам область D_1 , в которой содержатся заведомо все решения данной системы (если

они есть). Если область D_1 оказалась пустой, значит, мы можем исключить рассматриваемый граф.

Этот шаг «убивает» подавляющее большинство графов.

Далее мы переходим к шагу $\ell = 2$. На этом шаге область параметров D_1 разбивается на две области и для каждой из них добавляются линейные равенства и неравенства, аналогичные соотношениям шага 1. Кроме того, на этом шаге добавляются новые линейные ограничения для многоугольников с числом сторон пять и выше. Некоторые детали этого процесса приведены ниже, а также в нашей работе [28, раздел 4] и в <http://dcs.isa.ru/taras/irreducible/~>.

На этом этапе мы получаем область параметров D_2 . Если эта область пуста, то граф не может быть вложен в \mathbb{S}^2 и его надо отбросить.

Далее мы переходим к уровню $\ell = 3$, разбиваем D_2 на две части и повторяем процедуру, как при $\ell = 2$, независимо для каждой части.

Повторяя эту процедуру и увеличивая ℓ , мы получаем удваивающееся каждый раз число подслучаев. Однако на каждом шаге часть из них отбрасывается.

Повторяя этот процесс для $\ell = 1, 2, \dots, m$, мы получаем цепочку вложенных областей:

$$D_m \subset \dots \subset D_2 \subset D_1.$$

Если эта цепочка приводит к пустому множеству, то мы можем отбросить граф.

Если граф после некоторого числа шагов m «выживает», т. е. $D_m \neq \emptyset$, то проводится поиск решения существующими численными методами, так называемыми нелинейными «солверами». (Мы использовали, в частности, ipopt.) Для этого формируется описание нелинейной задачи на языке AMPL. Если решение найдено успешно, то граф записывается в список найденных графов. Графы, для которых не было найдено решения, удаляются из списка проверяемых графов.

Ниже мы приводим некоторые детали данного алгоритма.

4.3. Линейные оценки, использующие сферическую теорему косинусов

В предложении 4.1 для многоугольников с четырьмя и более вершинами мы определили функции $g_i(u_{k_1}, \dots, u_{k_s}, d)$ и $\zeta_{i,j}(u_{k_1}, \dots, u_{k_s}, d)$. Эти функции вычисляются на основе сферической теоремы косинусов. Здесь мы рассмотрим более подробно процесс линеаризации этих функций.

Рассмотрим многоугольник M с числом сторон $m > 3$. Разобьём его на треугольники и пронумеруем дополнительные углы. Например, для пятиугольника (рис. 2) у нас будет девять углов (переменных), которые с углами самого пятиугольника (наши переменные в алгоритме) связаны очевидными линейными уравнениями.

В действительности при заданном d у нас всего $m - 3$ независимых переменных. Для нахождения всех зависимостей нам нужен только один результат из сферической тригонометрии — теорема косинусов:

$$\cos \phi = \cos \theta_1 \cos \theta_2 + \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi,$$

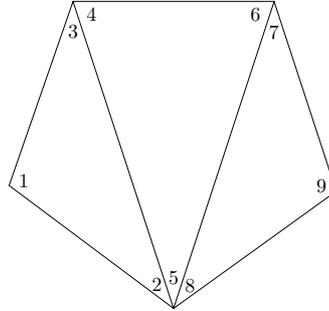


Рис. 2. Нумерация углов у пятиугольника

где для сферического треугольника ABC расстояния обозначены $\text{dist}(A, B) = \theta_1$, $\text{dist}(A, C) = \theta_2$, $\text{dist}(B, C) = \phi$ и $\angle BAC = \varphi$.

Для каждого треугольника из триангуляции мы будем применять теорему косинусов. Далее на основе полученных нелинейных неравенств методом интервального анализа мы построим аппроксимирующую систему линейных неравенств. Для этого мы сделали несколько независимых блоков.

4.3.1. Линейные оценки для функций \sin и \cos

Нам нужно получить линейные оценки для функции f , где $f(x) = \cos(x)$ или $f(x) = \sin(x)$. Если x находится внутри заданного интервала $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$, то

$$C \leq kx - f(x) \leq D.$$

Разложим функцию f в ряд Тейлора в точке x_0 :

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)(x - x_0)^n}{n!} + \dots$$

Легко убедиться, что сумма чётных членов ряда начиная со второго может быть оценена величиной $f''(x_0)(x - x_0)^2/2$, а сумма нечётных элементов начиная с третьего ограничена $f'''(x_0)/(x - x_0)^3/6$. Поэтому мы получаем $k = f'(x_0)$ и

$$C = -f(x_0) + kx_0 + \min\left(0, \frac{f''(x_0)\delta^2}{2}\right) - \frac{|f'''(x_0)|\delta^3}{6},$$

$$D = -f(x_0) + kx_0 + \max\left(0, \frac{f''(x_0)\delta^2}{2}\right) + \frac{|f'''(x_0)|\delta^3}{6}.$$

Этими линейными неравенствами можно заменить все функции \sin и \cos в уравнениях и неравенствах.

4.3.2. Оценка произведения ab

Если есть две переменные с заданными интервалами

$$a \in [a_0 - \delta_a, a_0 + \delta_a], \quad b \in [b_0 - \delta_b, b_0 + \delta_b],$$

то линейная оценка на произведение может быть записана в виде

$$C \leq k_a a + k_b b - ab \leq D,$$

где $k_a = b_0$, $k_b = a_0$, $C = a_0 b_0 - \delta_a \delta_b$ и $D = a_0 b_0 + \delta_a \delta_b$.

4.3.3. Оценка тройного произведения

Аналогично предыдущему случаю пусть

$$a \in [a_0 - \delta_a, a_0 + \delta_a], \quad b \in [b_0 - \delta_b, b_0 + \delta_b], \quad c \in [c_0 - \delta_c, c_0 + \delta_c].$$

Мы можем выписать линейные неравенства

$$C \leq k_a a + k_b b + k_c c - abc \leq D,$$

где $k_a = b_0 c_0$, $k_b = a_0 c_0$, $k_c = a_0 b_0$,

$$C = 2a_0 b_0 c_0 - |a_0 \delta_b \delta_c| - |\delta_a b_0 \delta_c| - |\delta_a \delta_b c_0| - |\delta_a \delta_b \delta_c|,$$

$$D = 2a_0 b_0 c_0 + |a_0 \delta_b \delta_c| + |\delta_a b_0 \delta_c| + |\delta_a \delta_b c_0| + |\delta_a \delta_b \delta_c|.$$

4.3.4. Линейные неравенства для сферической теоремы косинусов

Имеем

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos \gamma.$$

Используя интервалы для переменных \cos и \sin и оценки на произведения, мы получаем линейные оценки. Для каждого треугольника мы записываем шесть таких двойных линейных неравенств: для каждой стороны и каждого угла.

4.4. Оптимизация скорости алгоритма

Оптимизация — это важный момент, так как без ускорения алгоритма время работы будет слишком большим для реального применения. Мы используем несколько идей ускорения.

1. На каждом шаге при отбрасывания графов методом ветвей и границ выбирается переменная, область определения которой делится на две части.

Для каждого графа определяется минимальный набор переменных, однозначно задающих все остальные переменные графа. Далее мы разделяем только эти переменные и переменную d , вернее переменную $a = \alpha(d)$, которая равна углу равностороннего треугольника со стороной d (см. предложение 4.1). В зависимости от графа эта идея ускоряет перебор до 1000 раз.

2. Для этапа уточнения интервалов каждой переменной мы разработали следующий эвристический алгоритм. После успешного уменьшения какой-либо переменной рассматриваются переменные, «соседние» с ней (т. е. присутствующие в одной формуле). Скорость сходимости при таком подходе существенно увеличилась.

4.5. О сложности вычислений

Как мы уже отмечали, перечисление неприводимых контактных графов состоит из двух этапов. На первом создаётся таблица L_N , т. е. список всех графов с N вершинами, удовлетворяющих следствию 2.1. Количество этих графов быстро возрастает. Например, при $N = 6, 7, 8$ имеем $|L_N| = 7, 34, 257$, а $|L_{13}| = 94\,754\,965$.

На втором этапе большинство графов отбрасывается на первом шаге $\ell = 1$. Вместе с тем, с ростом N число «плохих» (т. е. не реализуемых на сфере, но «выживающих» после многих разбиений) графов значительно возрастает, для них нужно использовать солвер, и объём вычислений резко возрастает. Это главная причина, почему мы довели таблицу неприводимых графов только до $N = 11$.

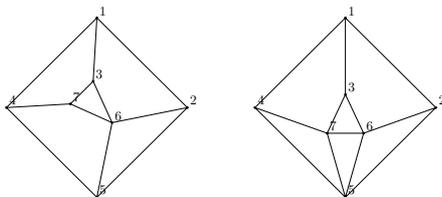
5. Результаты

Мы применили указанный выше метод для перечисления неприводимых графов на сфере.

Теорема 1. Список всех неприводимых контактных графов для $N = 7, 8, 9, 10, 11$ на сфере \mathbb{S}^2 приводится в таблицах в разделах 5.1—5.5. Здесь * означает, что соответствующий неприводимый граф является также и D -неприводимым, а ** означает, что этот граф максимальный. В таблице также показаны предельные значения d , $d_{\min} \leq d \leq d_{\max}$. (Однако отметим, что величины d_{\min} и d_{\max} найдены численно и могут немного отличаться от истинных.)

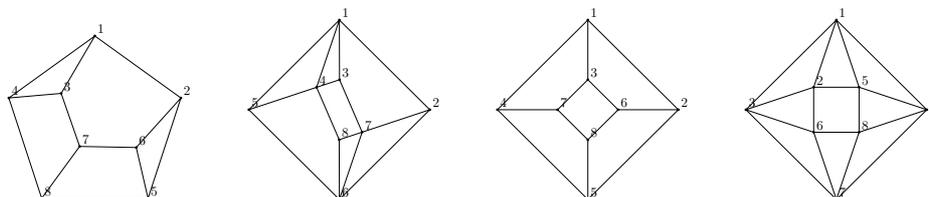
5.1. Неприводимые графы для 7 вершин

N	d_{\min}	d_{\max}
1*	1,34978	1,35908
2**	1,35908	1,35908



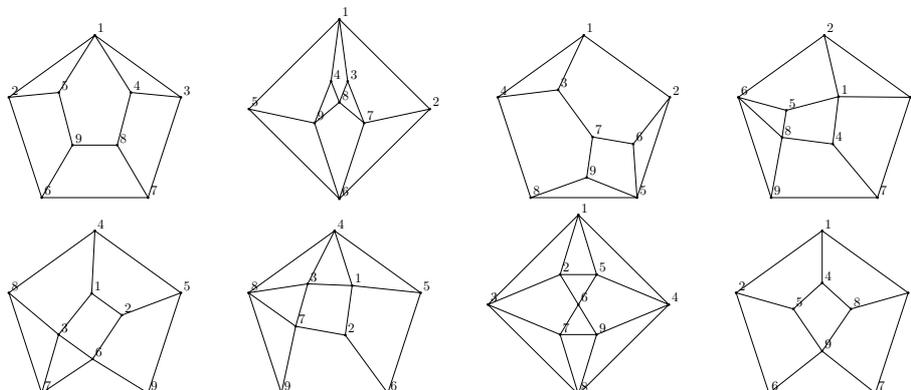
5.2. Неприводимые графы для 8 вершин

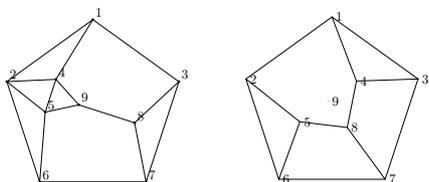
N	d_{\min}	d_{\max}
1	1,17711	1,18349
2*	1,28619	1,30653
3*	1,23096	1,30653
4**	1,30653	1,30653



5.3. Неприводимые графы для 9 вершин

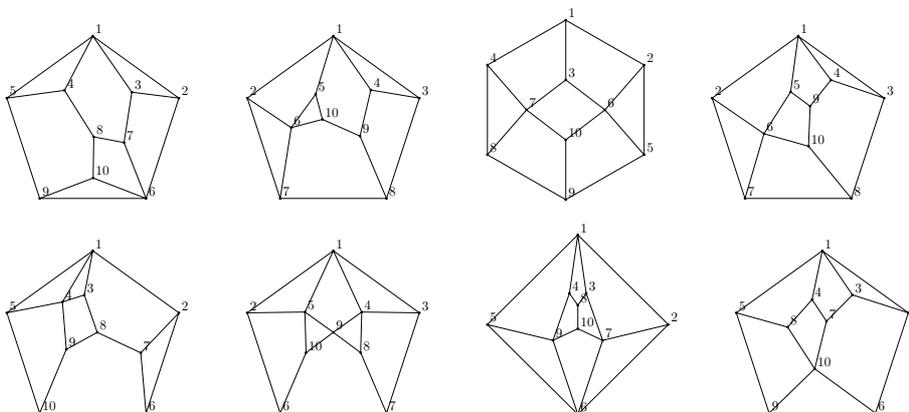
N	d_{\min}	d_{\max}
1	1,14099	1,14143
2*	1,22308	1,23096
3	1,10525	1,14349
4	1,17906	1,18106
5	1,15448	1,17906
6	1,17906	1,17906
7**	1,23096	1,23096
8	1,15032	1,18106
9*	1,10715	1,14342
10	1,17906	1,18428

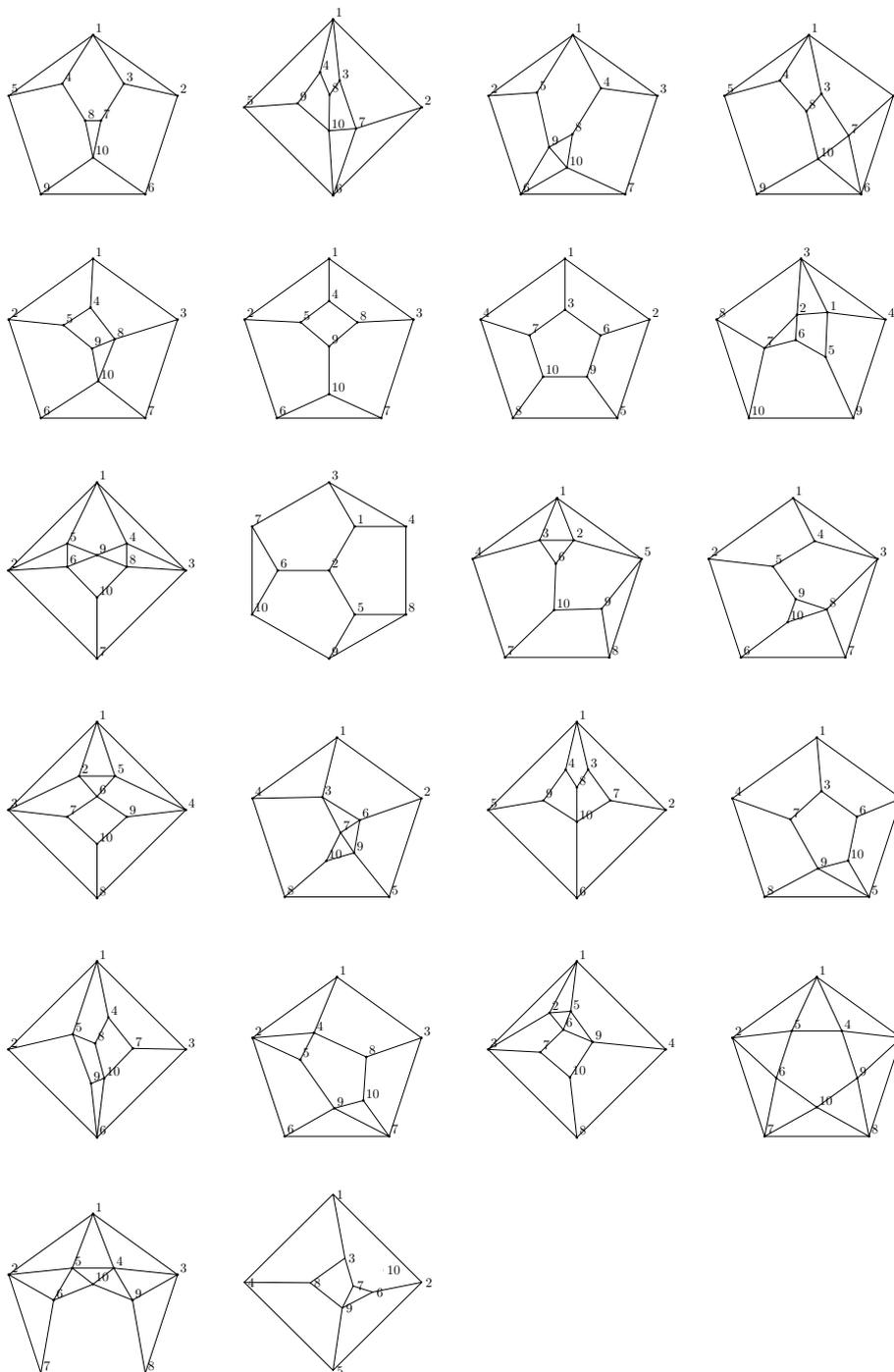




5.4. Неприводимые графы для 10 вершин

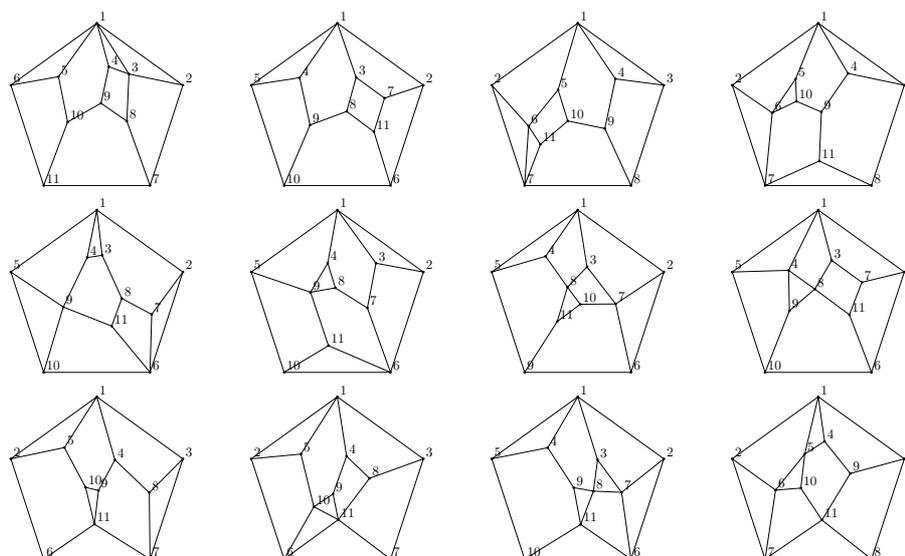
N	d_{\min}	d_{\max}	N	d_{\min}	d_{\max}
1	1,0839	1,09751	2	1,08161	1,08439
3	1,03067	1,04695	4	1,10715	1,0988
5	1,07529	1,09431	6	1,09386	1,12285
7*	1,15278	1,15448	8	1,10012	1,10801
9	1,06344	1,07834	10*	1,15074	1,15191
11	1,0843	1,08442	12	1,10055	1,10889
13	1,09504	1,10429	14	1,06032	1,09604
15	1,06278	1,1098	16	1,09567	1,10715
17**	1,15448	1,15448	18	0,99865	1,0467
19	1,0843	1,0844	20	1,08334	1,09547
21*	1,15341	1,15341	22	1,0988	1,10608
23*	1,14372	1,15191	24	1,09249	1,1098
25*	1,15191	1,15245	26	1,09658	1,10977
27*	1,15191	1,15191	28*	1,10715	1,10715
29*	1,10715	1,10715	30	1,15103	1,15341

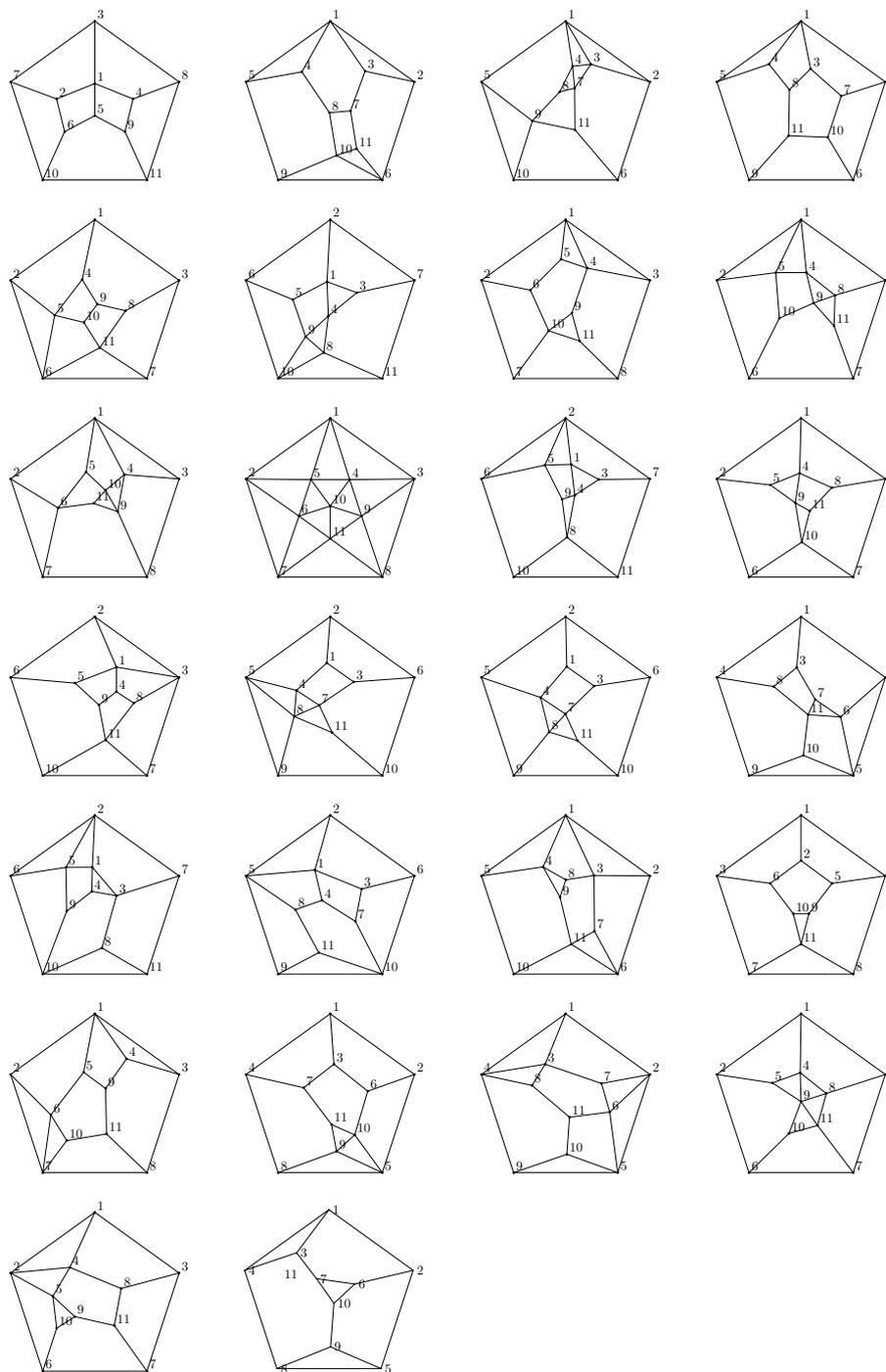




5.5. Неприводимые графы для 11 вершин

N	d_{\min}	d_{\max}	N	d_{\min}	d_{\max}
1	1,05601	1,05602	2	1,0538	1,05842
3	1,05834	1,05842	4	1,04765	1,05455
5	1,06975	1,06974	6	1,06306	1,06308
7	1,0522	1,06131	8	1,06621	1,06846
9	1,0538	1,05531	10	1,0795	1,07961
11	1,05331	1,0737	12	1,07163	1,07197
13	1,0404	1,06635	14	1,04759	1,05637
15	1,06974	1,06974	16	1,02726	1,06117
17	1,04712	1,06167	18	1,06043	1,06209
19	1,05386	1,05947	20	1,05846	1,05882
21	1,0632	1,0636	22**	1,10715	1,10715
23	1,05388	1,06537	24	1,05375	1,0737
25	1,06167	1,0636	26	1,06506	1,06673
27	1,04636	1,05882	28	1,05426	1,06822
29	1,07832	1,07836	30	1,07886	1,07962
31	1,05429	1,06105	32	1,00523	1,05671
33	1,061	1,06117	34	1,02751	1,05828
35	1,05447	1,06679	36	1,0561	1,05627
37	1,05431	1,05827	38(iv)	1,0064	1,03613





Литература

- [1] Фейеш Тот Л. Расположения на плоскости, на сфере и в пространстве. — М.: Физматлит, 1958.
- [2] Aigner M., Ziegler G. M. Proofs from THE BOOK. — Berlin: Springer, 1998; 2002.
- [3] Anstreicher K. The thirteen spheres: A new proof // Discrete Comput. Geom. — 2004. — Vol. 31. — P. 613–625.
- [4] Barg A., Musin O. R. Codes in spherical caps // Adv. Math. Commun. — 2007. — Vol. 1. — P. 131–149.
- [5] Boyvalenkov P., Dodunekov S., Musin O. R. A survey on the kissing numbers // Serdica Math. J. — 2012. — Vol. 38. — P. 507–522.
- [6] Böröczky K. The problem of Tammes for $n = 11$ // Stud. Sci. Math. Hungar. — 1983. — Vol. 18. — P. 165–171.
- [7] Böröczky K. The Newton–Gregory problem revisited // Discrete Geometry / A. Bezdek, ed. — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 103–110.
- [8] Böröczky K., Szabó L. Arrangements of 13 points on a sphere // Discrete Geometry / A. Bezdek, ed. — New York: Marcel Dekker, 2003. — P. 111–184.
- [9] Böröczky K., Szabó L. Arrangements of 14, 15, 16 and 17 points on a sphere // Stud. Sci. Math. Hungar. — 2003. — Vol. 40. — P. 407–421.
- [10] Brass P., Moser W. O. J., Pach J. Research Problems in Discrete Geometry. — Berlin: Springer, 2005.
- [11] Brinkmann G., McKay B. D. Fast generation of planar graphs // <http://cs.anu.edu.au/~bdm/papers/plantri-full.pdf>.
- [12] Conway J. H., Sloane N. J. A. Sphere Packings, Lattices, and Groups. — New York: Springer, 1999.
- [13] Danzer L. Finite point-sets on S^2 with minimum distance as large as possible // Discrete Math. — 1986. — Vol. 60. — P. 3–66.
- [14] Donev A., Torquato S., Stillinger F. H., Connelly R. Jamming in hard sphere and disk packings // J. Appl. Phys. — 2004. — Vol. 95. — P. 989–999.
- [15] Fejes Tóth L. Über die Abschätzung des kürzesten Abstandes zweier Punkte eines auf einer Kugelfläche liegenden Punktsystems // Jber. Deutsch. Math.-Verein. — 1943. — Vol. 53. — P. 66–68.
- [16] Habicht W., van der Waerden B. L. Lagerungen von Punkten auf der Kugel // Math. Ann. — 1951. — Vol. 123. — P. 223–234.
- [17] Hopkins A. B., Stillinger F. H., Torquato S. Densest local sphere-packing diversity: General concepts and application to two dimensions // Phys. Rev. E. — 2010. — Vol. 81. — P. 041305.
- [18] Hsiang W.-Y. Least Action Principle of Crystal Formation of Dense Packing Type and Kepler's Conjecture. — River Edge: World Scientific, 2001.
- [19] Leech J. The problem of the thirteen spheres // Math. Gazette. — 1956. — Vol. 41. — P. 22–23.
- [20] Maehara H. Isoperimetric theorem for spherical polygons and the problem of 13 spheres // Ryukyu Math. J. — 2001. — Vol. 14. — P. 41–57.
- [21] Maehara H. The problem of thirteen spheres—a proof for undergraduates // Eur. J. Combin. — 2007. — Vol. 28. — P. 1770–1778.

- [22] Musin O. R. The problem of the twenty-five spheres // *Russ. Math. Surv.* — 2003. — Vol. 58. — P. 794–795.
- [23] Musin O. R. The kissing problem in three dimensions // *Discrete Comput. Geom.* — 2006. — Vol. 35. — P. 375–384.
- [24] Musin O. R. The one-sided kissing number in four dimensions // *Period. Math. Hungar.* — 2006. — Vol. 53. — P. 209–225.
- [25] Musin O. R. Bounds for codes by semidefinite programming // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2008. — Vol. 263. — P. 134–149.
- [26] Musin O. R. The kissing number in four dimensions // *Ann. Math.* — 2008. — Vol. 168. — P. 1–32.
- [27] Musin O. R. Positive definite functions in distance geometry // *European Congress of Mathematics Amsterdam, 14–18 July, 2008.* — EMS Publ., 2010. — P. 115–134.
- [28] Musin O. R., Tarasov A. S. The strong thirteen spheres problem // *Discrete Comput. Geom.* — 2012. — Vol. 48. — P. 128–141.
- [29] plantri and fullgen. — <http://cs.anu.edu.au/~bdm/plantri/>.
- [30] Robinson R. M. Arrangement of 24 circles on a sphere // *Math. Ann.* — 1961. — Vol. 144. — P. 17–48.
- [31] Schütte K., van der Waerden B. L. Auf welcher Kugel haben 5, 6, 7, 8 oder 9 Punkte mit Mindestabstand 1 Platz? // *Math. Ann.* — 1951. — Vol. 123. — P. 96–124.
- [32] Schütte K., van der Waerden B. L. Das Problem der dreizehn Kugeln // *Math. Ann.* — 1953. — Vol. 125. — P. 325–334.
- [33] Tammes R. M. L. On the origin number and arrangement of the places of exits on the surface of pollen grains // *Rec. Trav. Bot. Neerl.* — 1930. — Vol. 27. — P. 1–84.
- [34] Van der Waerden B. L. Punkte auf der Kugel. Drei Zusätze // *Math. Ann.* — 1952. — Vol. 125. — P. 213–222.

