Вычисление максимального в симплексе отрезка данного направления*

М. В. НЕВСКИЙ

Ярославский государственный
университет им. П. Г. Демидова
e-mail: mnevsk@uniyar.ac.ru

УДК 514.17+517.51

Ключевые слова: n -мерный симплекс, барицентрические координаты, максимальный отрезок, осевой диаметр, гомотетия.

Аннотация

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$, v — ненулевой n -мерный вектор. В статье приводятся формулы для вычисления максимальной длины отрезка, принадлежащего S и параллельного v .

Abstract

M. V. Nevskii, Computation of the longest segment of a given direction in a simplex, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 147–152.

Let S be a nondegenerate simplex in $\mathbb{R}^n$ and let v be a nonzero n -dimensional vector. We give the computational formulas for the length and endpoints of the longest segment in S parallel to v .

1. Введение

Пусть S — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^n$ и v — ненулевой n -мерный вектор. Обозначим через $d^v(S)$ максимальную длину отрезка, принадлежащего S и параллельного v . В статье выводятся формулы для вычисления величины $d^v(S)$ и концов максимального отрезка по координатам вектора v и вершин S .

В случае когда v коллинеарен i -й координатной оси, положим $d_i(S) := d^v(S)$. Величину $d_i(S)$ будем называть i -м осевым диаметром S . Понятие осевого диаметра было введено П. Р. Скоттом [4, 5]. Для этого частного случая указанные формулы получены в [1].

Обозначим через $x^{(j)} = (x_1^{(j)}, \dots, x_n^{(j)})$ ($1 \leq j \leq n$) вершины S . Пусть $\lambda_1(x), \dots, \lambda_{n+1}(x)$ — барицентрические координаты точки $x \in \mathbb{R}^n$ относительно S . Они определяются свойствами

$$\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) x^{(j)} = x, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j(x) = 1. \quad (1)$$

*Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ, договор № 11.G34.31.0053.

Симплекс S задаётся неравенствами $\lambda_j(x) \geq 0$; точки его $(n-1)$ -мерных граней удовлетворяют уравнениям $\lambda_j(x) = 0$. Рассмотрим матрицу

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} x_1^{(1)} & \dots & x_n^{(1)} & 1 \\ x_1^{(2)} & \dots & x_n^{(2)} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x_1^{(n+1)} & \dots & x_n^{(n+1)} & 1 \end{pmatrix}.$$

По определению положим $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$. Тогда справедливы равенства

$$\lambda_j(x) = l_{1j}x_1 + \dots + l_{nj}x_n + l_{n+1,j}$$

(подробнее см. [1, 3]).

Обозначим через $v_1, \dots, v_n$ координаты данного вектора v . Введём в рассмотрение числа

$$m_j := \sum_{k=1}^n l_{kj}v_k, \quad (2)$$

$$\alpha_j := \frac{|m_j| - m_j}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|}, \quad \beta_j := \frac{|m_j| + m_j}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|}. \quad (3)$$

($1 \leq j \leq n+1$). Через $\|\cdot\|$ обозначим евклидову норму в $\mathbb{R}^n$. Основной результат настоящей статьи состоит в следующем.

Теорема. Величина $d^v(S)$ удовлетворяет равенству

$$d^v(S) = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|}. \quad (4)$$

Концы единственного отрезка максимальной длины, принадлежащего S и параллельного v , — это точки

$$a = \sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j x^{(j)}, \quad b = \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j x^{(j)}. \quad (5)$$

2. Вспомогательные предложения

Установим используемые ниже вспомогательные предложения.

Лемма 1. Пусть I — отрезок, параллельный v и расположенный в S таким образом, что каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит хотя бы один из его концов. Тогда длина I совпадает с правой частью (4).

Доказательство. Пусть $I = [s, t]$. Обозначим через σ_j и τ_j барицентрические координаты относительно S точек s и t соответственно. Тогда

$$\sigma_j, \tau_j \geq 0, \quad \sum \sigma_j = \sum \tau_j = 1.$$

Рассмотрим множества

$$B := \{j: \tau_j > 0\}, \quad A := \{1, \dots, n+1\} \setminus B.$$

Для $j \in A$ верно $\tau_j = 0$. Из условий леммы следует, что если $j \in B$, то $\sigma_j = 0$. Обозначим $w := t - s$, $\mu_j := \tau_j - \sigma_j$. Справедливы равенства

$$w = \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j x^{(j)}, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \mu_j = 0$$

(см. (1)). Запишем их в матричном виде:

$$\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 \\ \vdots \\ w_n \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Так как $(\mathbf{A}^T)^{-1} = (\mathbf{A}^{-1})^T$ и $\mathbf{A}^{-1} = (l_{ij})$, то получаем $\mu_j = \sum_{k=1}^n l_{kj} w_k$. Далее,

$$\sum_{j=1}^{n+1} |\mu_j| = \sum_{j \in A} \sigma_j + \sum_{j \in B} \tau_j = 2.$$

Поэтому длина I равна

$$d = \|w\| = \frac{2\|w\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |\mu_j|} = \frac{2\|w\|}{\sum_{j=1}^{n+1} \left| \sum_{k=1}^n l_{kj} w_k \right|}.$$

Теперь учтём, что с некоторым $\tau \neq 0$ при любом k верно $v_k = \tau w_k$. Умножим числитель и знаменатель последней дроби на $|\tau|$. Получим

$$d = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} \left| \sum_{k=1}^n l_{kj} v_k \right|} = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|}.$$

Это выражение совпадает с правой частью (4). Лемма 1 доказана. $\square$

Лемма 2. В S существует единственный отрезок, параллельный вектору v и расположенный таким образом, что каждая $(n-1)$ -мерная грань S содержит хотя бы один из его концов. Этот отрезок является единственным отрезком из S максимальной длины, параллельным v .

Доказательство. Существование отмеченного отрезка доказано в [1]. Для установления единственности достаточно рассмотреть случай, когда отрезок параллелен оси x_i при некотором i . В этом случае в качестве v достаточно взять i -й базисный вектор (i -й орт). При таком выборе $m_j = l_{ij}$. Применяя лемму 1, получаем, что длина отрезка равна

$$\frac{2}{\sum_{j=1}^{n+1} |l_{ij}|}.$$

Как доказано в [1], эта величина совпадает с i -м осевым диаметром $d_i(S)$. Значит, рассматриваемый отрезок является самым длинным отрезком из S , параллельным i -й координатной оси. В [1] также установлено, что такой отрезок является единственным. Лемма 2 доказана. $\square$

3. Доказательство теоремы

Перейдём теперь к доказательству теоремы, сформулированной во введении.

Рассмотрим для данного ненулевого вектора v числа m_j из (2). По схеме доказательства леммы 1 нетрудно установить, что

$$\mathbf{A}^T \begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ \vdots \\ m_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Будем считать, что v направлен из нуля и сохраним для конца этого вектора то же обозначение v . Равенство (6) эквивалентно соотношениям

$$\sum_{j=1}^{n+1} m_j x^{(j)} = v, \quad \sum_{j=1}^{n+1} m_j = 0.$$

Так как $v \neq 0$, то

$$\sum_{k=1}^{n+1} |m_k| \neq 0.$$

Поэтому числа α_j и β_j , определяемые равенствами (3), существуют. Заметим, что

$$\sum_{j=1}^{n+1} \alpha_j = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j| - \sum_{j=1}^{n+1} m_j}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n+1} \beta_j = \frac{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j| + \sum_{j=1}^{n+1} m_j}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|} = 1.$$

Следовательно, найдутся точки a и b , барицентрические координаты которых относительно S равны соответственно α_j и β_j ($1 \leq j \leq n+1$), т. е. выполняются

равенства (5). Так как $\alpha_j, \beta_j \geq 0$, то $a, b \in S$. В силу выпуклости S имеем $[a, b] \subset S$. При любом j по крайней мере одно из чисел α_j, β_j обращается в 0. Поэтому каждая $(n - 1)$ -мерная грань S содержит хотя бы одну из точек a, b . Далее,

$$b - a = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j - \alpha_j) x^{(j)} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|} \sum_{j=1}^{n+1} m_j x^{(j)} = \frac{2}{\sum_{k=1}^{n+1} |m_k|} v.$$

Получаем, что отрезок $[a, b]$ параллелен данному вектору v . Таким образом, этот отрезок удовлетворяет условию леммы 2. Значит, он является единственным отрезком из S максимальной длины, параллельным v . Следовательно,

$$d^v(S) = \|b - a\| = \frac{2\|v\|}{\sum_{j=1}^{n+1} |m_j|}.$$

Теорема доказана. □

4. Следствия

Приведём утверждения, которые получаются из теоремы с привлечением результатов [1, 3]. Пусть $\Sigma(S; v)$ есть $(n - 1)$ -мерная мера проекции симплекса S на гиперплоскость, ортогональную вектору v .

Следствие 1. *Имеют место равенства*

$$\Sigma(S; v) = \frac{n \cdot \text{vol}(S)}{d^v(S)} = \frac{|\det(\mathbf{A})|}{2(n - 1)! \|v\|} \sum_{j=1}^{n+1} |m_j|.$$

Для частного случая, когда v коллинеарен координатной оси, этот результат был получен в [1].

Через σS обозначим образ S при гомотетии с коэффициентом σ и центром гомотетии в центре тяжести S . Пусть V — невырожденный параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, рёбра которого задаются линейно независимыми векторами $v^{(1)}, \dots, v^{(n)}$. Через $\alpha(V; S)$ обозначим минимальное $\sigma > 0$, такое что V содержится в трансляте симплекса σS . Вычислим величину

$$M := \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{n+1} \left| \sum_{k=1}^n l_{kj} v_k^{(i)} \right|.$$

Следствие 2. *Справедливы равенства*

$$\alpha(V; S) = \sum_{i=1}^n \frac{|v^{(i)}|}{d^{v^{(i)}}(S)} = M.$$

Следствие 3. *Неравенство $M \leq 1$ эквивалентно тому, что V содержится в трансляте симплекса S . Равенство $M = 1$ эквивалентно тому, что некоторый транслят S' симплекса S описан вокруг V , т. е. $V \subset S'$ и каждая $(n-1)$ -мерная грань S' содержит вершину V .*

В частном случае $V = [0, 1]^n$ следствия 2 и 3 были доказаны в [3].

В заключение заметим, что представленные результаты имеют приложения, связанные с получением оценок для норм интерполяционных проекторов. Подробное изложение этих вопросов можно найти в [2].

Литература

- [1] Невский М. В. Об одном свойстве n -мерного симплекса // *Мат. заметки.* — 2010. — Т. 87, № 4. — С. 580–593.
- [2] Невский М. В. Геометрические оценки в полиномиальной интерполяции. — Ярославль: ЯрГУ, 2012.
- [3] Nevskii M. Properties of axial diameters of a simplex // *Discrete Comput. Geom.* — 2011. — Vol. 46, no. 2. — P. 301–312.
- [4] Scott P. R. Lattices and convex sets in space // *Quart. J. Math. Oxford.* — 1985. — Vol. 36, no. 3. — P. 359–362.
- [5] Scott P. R. Properties of axial diameters // *Bull. Austral. Math. Soc.* — 1989. — Vol. 39, no. 3. — P. 329–333.