

Открытое семейство множеств, для которых минимальное заполнение не единственно

З. Н. ОВСЯННИКОВ

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: agent.wd28@gmail.com

УДК 514.774+519.176+514.747

Ключевые слова: метрическое пространство, граф, минимальное заполнение.

Аннотация

Понятие минимального заполнения n -точечных метрических пространств было введено А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным. Ранее предполагалось, что в каком-то смысле «почти для всех пространств» такое заполнение единственно. В работе приводится контрпример к этой гипотезе.

Abstract

Z. N. Ovsyannikov, An open family of sets that have several minimal fillings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 153–156.

Minimal fillings of n -point metric spaces were introduced by Ivanov and Tuzhilin. It was thought that “for almost all sets” in some sense such a filling is unique. Here we introduce a counterexample to this hypothesis.

1. Введение

Заполнение метрического пространства (M, ρ) — это взвешенный граф (G, ω) , содержащий M как подмножество множества своих вершин, такой что расстояние по графу между вершинами из M , индуцированное весом рёбер ω , не меньше расстояний в M . Граф G называется *типом* заполнения. Вес заполнения — это сумма весов всех его рёбер. Заполнение называется *минимальным*, если не существует заполнения с меньшим весом. В [2] было показано, что минимальное заполнение существует для любого конечного пространства.

Метрическое пространство (M, ρ) , содержащее n точек, можно представить как точку в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, если координатами представить расстояния между соответствующими точками. Можно разделить $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ по типам минимальных заполнений, имеющих в этой точке, на клетки. Существовала гипотеза, что не существует $(n(n-1)/2)$ -мерной клетки, в которой для всех точек существует не менее двух типов заполнений. Эта гипотеза оказалась ложной, что и будет показано в настоящей работе.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 153–156.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

2. Необходимые определения и обозначения

Определения заполнения и минимального заполнения взяты из [2].

Определение 2.1. Пусть (M, d) — конечное метрическое пространство, граф $G = (V, E)$ — произвольное дерево, такое что M — подмножество множества его вершин и $\omega: E \rightarrow R_+$ — положительная функция, заданная на рёбрах графа. Можно определить функцию $d_\omega: M \times M \rightarrow R_+$ как сумму функций ω от рёбер на пути между вершинами.

Если для любых точек $a, b \in M$ выполняется условие $d_\omega(a, b) \geq d(a, b)$, то взвешенный граф (G, ω) называется *заполнением пространства M типа G* (или *топологии G*). Функция $\omega(e)$ называется *весом ребра*, а сумма весов всех рёбер графа называется *весом заполнения* и обозначается $\omega(G)$.

Определение 2.2. Пусть (M, d) — конечное метрическое пространство, граф $G = (V, E)$ — произвольное дерево, такое что M — подмножество множества его вершин. Тогда *весом минимального параметрического заполнения* называется число

$$\text{mpf}(M) = \inf\{\omega(G) \mid (G, \omega) \text{ — заполнение}\}.$$

Заполнение такой длины типа G существует и называется *минимальным параметрическим заполнением типа G* .

Минимум веса минимального параметрического заполнения, взятый по всем деревьям, называется *весом минимального заполнения* и обозначается

$$\text{mf}(M) = \inf_G \{\text{mpf}(G)\}.$$

Заполнение такого веса называется *минимальным заполнением*.

Определение 2.3. Пусть $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ — конечное множество. Множество всех возможных метрик на этом множестве будем обозначать через Ω . Тогда *естественным* отображением $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ будем называть отображение, переводящее метрику ρ в

$$f(\rho) = (\rho(m_1, m_2), \rho(m_1, m_3), \dots, \rho(m_1, m_n), \rho(m_2, m_3), \dots, \rho(m_{n-1}, m_n)).$$

Это отображение, очевидно, инъективно.

Определение 2.4. Пусть M — n -точечное множество и $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^{n(n-1)/2}$ — естественное отображение. Пусть даны деревья $\{G_1, \dots, G_k\}$. Тогда *клеткой типа $H = \{G_1, \dots, G_k\}$* назовём множество точек в $\mathbb{R}^{n(n-1)/2}$, таких что метрические пространства, задаваемые их прообразами в Ω , имеют минимальные заполнения типа G_1, \dots, G_k и не имеют других.

Замечание 2.5. Образ естественного отображения разбивается в конечное объединение непересекающихся клеток.

Нам также понадобится результат А. Ю. Ерёмкина из [1].

Определение 2.6. *Мультиобходом порядка k* конечного множества $M = \{m_1, \dots, m_n\}$ называется упорядоченный цикл $m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(kn)}$, такой что для любого i прообраз $\sigma^{-1}(i)$ содержит ровно k элементов. Если

(M, ρ) — метрическое пространство, то *полупериметром* мультиобхода $\pi = \{m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(kn)}\}$ называется число

$$p(\pi) = \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{kn} \rho(m_{\sigma(i)}, m_{\sigma(i+1)}).$$

Множество всех мультиобходов обозначается через $\mathcal{O}(M)$.

Определение 2.7. Мультиобход $\pi = \{m_{\sigma(1)}, \dots, m_{\sigma(kn)}\}$ называется *планарным* относительно дерева G , содержащего M как подмножество своих вершин, если, взяв для каждой пары $m_{\sigma(i)}, m_{\sigma(i+1)}$ рёбра пути, соединяющего эти вершины в дереве, мы получим, что каждое ребро дерева взято ровно $2k$ раз. Множество мультиобходов, планарных для графа G , обозначим через $\mathcal{O}(G)$.

Теорема 2.8. Вес минимального параметрического заполнения типа G конечного метрического пространства (M, ρ) равен

$$\text{mpf}(G) = \sup_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p(\pi).$$

3. Основной результат

Ранее предлагалась следующая гипотеза.

Гипотеза 3.1. Для любого естественного отображения не существует клетки максимальной размерности, тип которой содержит более одного графа.

К этой гипотезе был получен контрпример.

Утверждение 3.2. Пусть $M = \{m_1, \dots, m_6\}$ — шеститочечное пространство, f — естественное отображение. Тогда в его образе существует как минимум одна клетка максимальной размерности, тип которой состоит из двух графов.

Доказательство. Для доказательства будет использована программа, написанная А. О. Ивановым для программного пакета «Wolfram Mathematica», вычисляющая все минимальные параметрические заполнения конечного метрического пространства.

Рассмотрим метрику ρ на множестве M , заданную матрицей расстояний

$$\begin{pmatrix} 0 & 13783 & 13200 & 17254 & 12758 & 13170 \\ 13783 & 0 & 19324 & 15679 & 12512 & 18790 \\ 13200 & 19324 & 0 & 12174 & 12307 & 13797 \\ 17254 & 15679 & 12174 & 0 & 14446 & 12616 \\ 12758 & 12512 & 12307 & 14446 & 0 & 17870 \\ 13170 & 18790 & 13797 & 12616 & 17870 & 0 \end{pmatrix}.$$

С такой метрикой M имеет ровно два минимальных заполнения (рис. 1) типа G_1 и G_2 , вес равен 43695. Покажем, что если любой набор расстояний изменить не более чем на некоторое ε , то типы минимальных заполнений не изменятся.

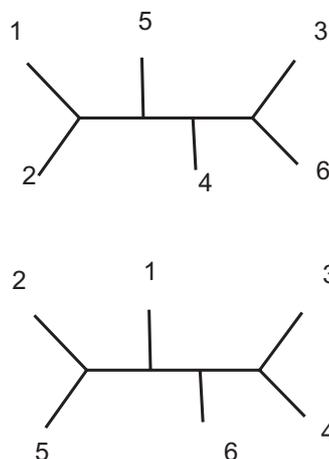


Рис. 1. Два типа минимальных заполнений

Так как вес минимального заполнения — непрерывная функция относительно расстояний, то при достаточно малом ε не может появиться минимальных заполнений нового типа. Остаётся показать, что оба минимальных заполнения останутся минимальными при малых изменениях.

У двух типов минимальных заполнений, представленных на рис. 1, имеется общий для них планарный мультиобход порядка 1 $\pi = \{m_1, m_4, m_3, m_6, m_5, m_2\}$. Этот мультиобход имеет полупериметр, равный весу минимального заполнения. Предположим, при малом изменении расстояний между вершинами одно из заполнений перестало быть минимальным. Тогда по формуле Ерёмкина существует мультиобход, планарный относительно одного из деревьев, не равный π и имеющий тот же вес. Рассмотрим новую метрику ρ' , в которой все расстояния, не входящие в мультиобход π , увеличены на ε , и посчитаем в программе новые минимальные параметрические заполнения. При этом веса минимальных параметрических заполнений останутся теми же, как следует из программы. Значит, такого мультиобхода не существует, что противоречит нашему исходному предположению об уменьшении числа минимальных заполнений.

Значит, существует открытый куб, для любая точка которого лежит в клетке $H = \{G_1, G_2\}$. Значит, эта клетка имеет максимальную размерность. \square

Литература

- [1] Ерёмин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51–72.
- [2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65–118.