Отношения Штейнера, Штейнера—Громова и суботношения Штейнера для пространства компактов в евклидовой плоскости с расстоянием Хаусдорфа

З. Н. ОВСЯННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: agent.wd28@gmail.com

УДК 514.774+519.176+514.747

Ключевые слова: расстояние Хаусдорфа, отношение Штейнера, минимальные заполнения.

Аннотация

Отношения Штейнера, Громова—Штейнера и суботношение Штейнера — это фундаментальные характеристики метрического пространства. В данной работе предпринята попытка найти эти отношения для пространства компактов с введённым на них расстоянием Хаусдорфа.

Abstract

Z. N. Ovsyannikov, The Steiner and Gromov–Steiner ratios and Steiner subratio in the space of compacta in the Euclidean plane with Hausdorff distance, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 157—165.

The Steiner and Gromov–Steiner ratios and Steiner subratio are fundamental characteristics of metric spaces. In this work, an attempt is made to find these ratios for the space of compacts in Euclidean space with Hausdorff metric.

1. Введение

Расстояние Хаусдорфа было предложено в начале XX века для измерения расстояний между компактами. Эта функция ведёт себя как функция расстояния на множестве компактов произвольного метрического пространства X, обозначаемом как $\mathcal{H}(X)$.

Отношения Штейнера, Громова—Штейнера и суботношение Штейнера — это фундаментальные характеристики метрического пространства, связанные с минимальными остовными деревьями, кратчайшими сетями и минимальными заполнениями. Последние были введены А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным в [1].

В данной работе будут рассматриваться указанные отношения для пространства компактов в евклидовом пространстве с метрикой Хаусдорфа.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 157—165.
© 2013 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

Теорема 1.1. *Пусть $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — пространство компактов. Тогда*

1) *отношение Штейнера для $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ равно $1/2$;*
2) *отношение Громова—Штейнера для $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ равно $1/2$;*
3) *параметрическое суботношение Штейнера типа 3 для $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ равно $3/4$;*
4) *параметрическое суботношение Штейнера типа 4 для $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ равно $2/3$.*

2. Необходимые определения и обозначения

Будем пользоваться определением расстояния Хаусдорфа непосредственно через определение функции.

Определение 2.1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, точка a и непустое множество B лежат в X. Тогда *расстоянием от точки до множества* называется

$$\rho(a, B) = \inf_{b \in B} \rho(a, b).$$

Определение 2.2. *Расстоянием Хаусдорфа* между двумя компактами A и B в метрическом пространстве (X, ρ) называется

$$\rho_H(A, B) = \max\Big(\sup_{a \in A} \rho(a, B), \sup_{b \in B} \rho(b, A)\Big).$$

Так как A и B — компакты, то полученное число конечно и максимумы достигаются. Доказательства следующего утверждения мы приводить не будем.

Утверждение 2.3. *Если рассмотреть множество компактов $K(X)$ в метрическом пространстве X, то расстояние Хаусдорфа задаёт метрику на этом множестве. Полученное метрическое пространство называют пространством компактов с расстоянием Хаусдорфа и обозначают $\mathcal{H}(X)$.*

Также нам понадобятся определения различных отношений, которые мы будем рассматривать. Эти определения взяты из [1].

Определение 2.4. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство и $G = (V, E)$ — произвольный граф. Отображение $\Gamma\colon V \to X$ называется *сетью в X, параметризованной графом G* или *сетью типа G*.

Определение 2.5. Будем говорить, что сеть типа $G = (V, E)$ *соединяет конечное множество M*, если $M \subset V$. Вершины из M будем называть *граничными*, а вершины из $V \setminus M$ — *внутренними*.

Определение 2.6. Длиной ребра $e = (vw)$ назовём расстояние между вершинами, соединяемыми этим ребром $\rho\big(\Gamma(v), \Gamma(w)\big)$, а длиной сети Γ — сумму длин всех рёбер сети.

Теперь мы готовы дать определения кратчайших сетей разного вида.

Определение 2.7. Число

$$\operatorname{smt}(M) = \inf_{\Gamma \text{ — сеть, соединяющая } M} d(\Gamma)$$

назовём *длиной кратчайшей сети*. Если сеть с такой длиной существует, она называется *кратчайшей сетью, соединяющей* M.

Определение 2.8. Число

$$\operatorname{mst}(M) = \inf_{\Gamma\text{ — сеть, соединяющая } M \text{ и не имеющая внутренних вершин}} d(\Gamma)$$

назовём *длиной минимального остовного дерева*. Сеть такой длины всегда существует и называется *минимальным остовным деревом на* M.

Определение 2.9. Пусть (M, d) — конечное метрическое пространство. Тогда число

$$\operatorname{mf}(M) = \inf_{(X,\,\rho)\text{ — метрическое пространство}} \inf\bigl\{\operatorname{smt}\bigl(f(M)\bigr) \mid f\colon M \to X \text{ — изометрия}\bigr\}$$

называется *весом минимального заполнения*, а сеть такой длины (она всегда существует) называется *минимальным заполнением*.

Нам понадобятся несколько свойств минимальных заполнений и кратчайших сетей, возьмём их из [1] без доказательства.

Утверждение 2.10. *Для нахождения длины кратчайшей сети достаточно рассматривать сети с типом — деревом, в котором все граничные вершины и только они имеют степень* 1, *а все внутренние вершины имеют степень* 3. *Такие деревья называются* бинарными.

Утверждение 2.11. *Пусть* $(M = \{m_1, \ldots, m_n\}, \rho)$ *— конечное метрическое пространство и* Ω *— множество перестановок* n *элементов. Тогда длина минимального заполнения*

$$\operatorname{mf}(M) \geqslant \inf_{\sigma\in\Omega} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho\bigl(m_{\sigma(i)}, m_{\sigma(i+1)}\bigr),$$

где $\sigma(n+1) = \sigma(1)$.

Следствие 2.12. *Если все расстояния в конечном метрическом пространстве* $(M = \{m_1, \ldots, m_n\}, \rho)$ *равны* 1, *то*

$$\operatorname{mf}(M) = \frac{n}{2}.$$

Доказательство. Действительно, по предыдущему утверждению $\operatorname{mf}(M) \geqslant n/2$ (все перестановки дают одинаковую сумму), а если добавить в пространство M точку o, продолжить функцию расстояния, положив $\rho(o, m_i) = 1/2$, взять сеть, соединяющую все точки m_i с точкой o, то длина такой сети будет равна $n/2$. □

Следствие 2.13. *Если* (M, ρ) *— конечное метрическое пространство из* n *точек, то*

$$\operatorname{mf}(M) \geqslant \frac{n}{2(n-1)} \operatorname{mst}(M).$$

Теперь можно определить отношения.

Определение 2.14. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда *отношением Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{sr}(M) = \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Отношением Штейнера для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{sr}(X) = \inf\{\mathrm{sr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Определение 2.15. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда *отношением Громова—Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{sgr}(M) = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Отношением Громова—Штейнера для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{sgr}(X) = \inf\{\mathrm{sgr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Определение 2.16. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда *суботношением Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{ssr}(M) = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)}.$$

Суботношением Штейнера для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{ssr}(X) = \inf\{\mathrm{ssr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Параметрическим суботношением Штейнера типа n для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{ssr}_n(X) = \inf\{\mathrm{ssr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X \text{ из } n \text{ элементов}\}.$$

3. Отношения Штейнера и Громова—Штейнера

Сначала зададим более удобную структуру, с которой и будем работать в дальнейшем.

Пусть $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — пространство компактов евклидовой плоскости с метрикой Хаусдорфа. Будем обозначать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ декартово произведение m копий пространства $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ с метрикой максимума расстояний:

$$\rho(\{x_1, \ldots, x_m\}, \{y_1, \ldots, y_m\}) = \max_{i=1,\ldots,m} \rho(x_i, y_i).$$

Утверждение 3.1. *У пространств $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ и $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ все вышеприведённые отношения совпадают, т. е.*

1) $\operatorname{sr}\bigl(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\bigr) = \operatorname{sr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$,
2) $\operatorname{ssr}\bigl(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\bigr) = \operatorname{ssr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$,
3) $\operatorname{ssr}_n\bigl(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\bigr) = \operatorname{ssr}_n(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$,
4) $\operatorname{sgr}\bigl(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\bigr) = \operatorname{sgr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$.

Доказательство. Сначала заметим, что $\operatorname{sr}\bigl(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\bigr) \leqslant \operatorname{sr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$. Действительно, можно рассмотреть подпространство $\bigl\{\mathcal{H}(\mathbb{R}^n), \{a\}, \{a\}, \dots, \{a\}\bigr\}$, оно совпадает с $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, и все кратчайшие сети для множества точек из этого подпространства можно рассматривать внутри него же. Такое же неравенство выполняется и для всех других отношений.

Пусть теперь
$$M = \{m_1, \dots, m_k\} \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m.$$
Пусть $m_i = \{m_i^1, m_i^2, \dots, m_i^m\}$, при этом $m_i^j \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$. Пусть все m_i^j содержатся в кубе
$$I_p^n = \{p = \{p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{R}^n \mid -p < p_i < p\}.$$
Пусть $q = \max\bigl(p, \operatorname{mst}(M)\bigr)$.

Рассмотрим отображение
$$f\colon M \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^n),$$
такое что
$$f(m_i) = \bigcup_{j=1}^{m} f_j(m_i^j),$$
где
$$f_j\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n, \quad f_j(\{p_1, \dots, p_n\}) = \{p_1 + 10qj, p_2, p_3, \dots, p_n\}.$$
Заметим, что образы $f_j(m_i^j)$ и $f_k(m_{i'}^k)$ для различных j и k не пересекаются и находятся на расстоянии не менее $8q$, а $f_j(m_i^j)$ и $f_j(m_k^j)$ находятся по отношению друг к другу в том же положении, что и m_i^j и m_k^j. Следовательно, отображение f — изометрия, и $\operatorname{mst}\bigl(f(M)\bigr) = \operatorname{mst}(M)$ и $\operatorname{mf}\bigl(f(M)\bigr) = \operatorname{mf}(M)$.

Если естественно продолжить отображение f на внутренние точки кратчайшей сети, то, так как для каждой точки кратчайшей сети $\{u_1, \dots, u_m\} \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ все её компакты u_i содержатся в I_{p+q}^n, продолжение отображения также изометрично и $\operatorname{smt}\bigl(f(M)\bigr) \leqslant \operatorname{smt}(M)$.

Пусть теперь дана кратчайшая сеть для $M' = \{f(m_1), \dots, f(m_k)\}$ и $u \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ — её внутренняя вершина. Заметим, что u не может содержать точки вне объединения кубов с центрами в $\{10qj, 0, 0, \dots, 0\}$ и диаметром $4q$, так как тогда расстояние от u до любой точки из M' больше q. Значит,
$$\operatorname{smt}(M') > q = \operatorname{mst}(M) \geqslant \operatorname{smt}(M) \geqslant \operatorname{smt}(M'),$$
что приводит к противоречию. Но на этом объединении кубов функция f имеет естественное обратное отображение $f^{-1}\colon \cup I_q^n \to \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$, которое также изометрично, значит, $\operatorname{smt}(M) = \operatorname{smt}(M')$.

Из равенства весов минимальных заполнений, длин кратчайших сетей и минимальных остовных деревьев для $M \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ и $f(M) \subset \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$ следует, что $\mathrm{sr}\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) \leqslant \mathrm{sr}(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m)$ (и подобные неравенства для других отношений). $\square$

Дальше мы будем рассматривать $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^m$ вместо $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, при этом m будем изменять так, как нам нужно.

Утверждение 3.2.

$$\mathrm{sr}_n(X) = \mathrm{sgr}_n(X) = \frac{n}{2(n-1)}.$$

Доказательство. В одну сторону утверждение очевидно:

$$\mathrm{sr}_n(X) \geqslant \mathrm{sgr}_n(X) \geqslant \frac{n}{2(n-1)}.$$

Значит, достаточно привести пример такого набора компактов $M = (p_1, \ldots, p_n)$, что

$$\mathrm{mst}(M) = n-1, \quad \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mf}(M) = \frac{n}{2}.$$

Рассмотрим $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^k$. Обозначим точки $(0,0)$, $(1/2,0)$, $(1,0) \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)_i$ через 0_i, c_i и 1_i соответственно. Можно задать отображение из E^k (здесь $E = \{0,1\}$) в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^k$ следующим образом: $e = (e^1, \ldots, e^k)$ переходит в $m = \{e_1^1, \ldots, e_k^k\}$. Заметим, что расстояния между образами двух разных точек из E^k равны 1, а расстояние от образа произвольной точки из E^k до точки $c = (c_1, \ldots, c_k)$ из X^k равно $1/2$.

Таким образом, взяв n различных точек из E^k (мы можем это сделать при достаточно большом k) в качестве M, получим

$$\mathrm{mst}(M) = n-1, \quad \mathrm{smt}(M) = \mathrm{mf}(M) = \frac{n}{2},$$

что и требовалось. $\square$

Следствие 3.3.

$$\mathrm{sr}\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) = \mathrm{sgr}\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) = \frac{1}{2}.$$

4. Суботношение Штейнера для случая трёх компактов

Здесь и далее, когда мы будем говорить о множестве точек $M = \{p_1, \ldots, p_n\}$ в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$, мы будем подразумевать множество в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{n!}$ вида $K = \{k_1, \ldots, k_n\}$, где $k_i = \big(p_{\sigma_1(i)}, \ldots, p_{\sigma_{n!}(i)}\big)$. Здесь σ_j — каким-либо образом занумерованные перестановки n элементов. Это позволит нам без ограничения общности говорить о заданности топологии минимального дерева Штейнера на данном наборе точек из $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)$.

Утверждение 4.1.

$$\mathrm{ssr}_3\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) = \frac{3}{4}.$$

Доказательство. Рассмотрим пять точек a, b, c, d, e, лежащих на прямой так, как на рис. 1, расстояние между соседними точками равно 1. Рассмотрим три набора точек: $p_1 = \{a, d, e\}$, $p_2 = \{a, b, e\}$ и $p_3 = \{a, b, c, d, e\}$. Расстояние по Хаусдорфу между любыми двумя из них равно 1, значит,

$$\mathrm{mst}(\{p_1, p_2, p_3\}) = 2, \quad \mathrm{mf}(\{p_1, p_2, p_3\}) = \frac{3}{2}, \quad \mathrm{smt}(\{p_1, p_2, p_3\}) = x \leqslant 2.$$

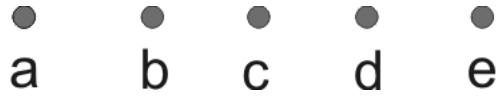

Рис. 1

Пусть $x < 2$. Пусть y — внутренняя точка в кратчайшей сети в $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^6$, и пусть расстояния от p_1, p_2, p_3 до y равны r_1, r_2, r_3 соответственно. Без ограничения общности (см. начало раздела) можно предположить, что $r_1 \geqslant r_2 \geqslant r_3$. Тогда в данной плоскости y будет лежать внутри закрашенной области (рис. 2). Расстояние от точки c до закрашенной области — $2 - r_1 \leqslant r_3$, поэтому $r_1 + r_3 \geqslant 2$, противоречие с предположением $x < 2$.

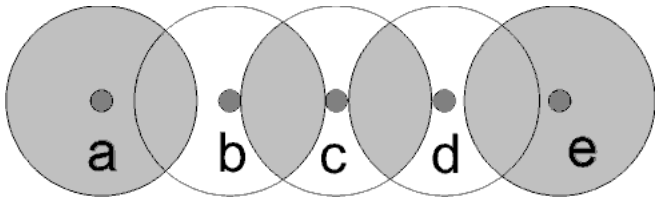

Рис. 2

Значит, $x = 2$,

$$\mathrm{ssr}_3\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) \leqslant \frac{3}{4}.$$

В обратную сторону неравенство очевидно. □

Замечание. По всей видимости, вес дерева Штейнера останется таким же, если рассматривать произвольное пространство компактов с расстоянием по Громову—Хаусдорфу.

5. Суботношение Штейнера для случая четырёх компактов

Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^{24}$, пусть в дереве Штейнера внутренние точки x_5, x_6 инцидентны точкам x_1, x_2 и x_3, x_4 соответственно. Обозначим

$$r_1 = \rho(x_1, x_5), \quad r_2 = \rho(x_2, x_5), \quad r_3 = \rho(x_3, x_6), \quad r_4 = \rho(x_4, x_6), \quad w = \rho(x_5, x_6),$$

вес минимального дерева Штейнера равен $x = r_1 + r_2 + r_3 + r_4 + w$.

Утверждение 5.1.

$$\mathrm{ssr}_4\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) = \frac{2}{3}.$$

Доказательство. Пусть точки a, b, c, d, e, f расположены на прямой так, как на рис. 3, расстояние между двумя соседними точками равно 1. Определим четыре множества $p_2 = \{a, d, e, f\}$, $p_4 = \{a, b, e, f\}$, $p_1, p_3 = \{a, b, c, f\}$.

Рис. 3

Рассмотрим в качестве x_1, x_2, x_3, x_4 точки, полученные из p_1, p_2, p_3, p_4 способом, описанным в предыдущем разделе. Расстояние между любыми двумя точками x_i равно 1, значит, вес минимального заполнения равен 2, длина x минимальной сети не больше 3. Пусть $x < 3$. Тогда так как $r_1 + r_2 \geqslant 1$ и $r_3 + r_4 \geqslant 1$, то $r_1 + r_2 < 2$, $r_3 + r_4 < 2$.

Рассмотрим одно из измерений $\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)^2 4$, в котором проекции $x_1, \ldots, x_4$ соответственно равны $p_1, \ldots, p_4$. Тогда проекции x_5 и x_6 лежат внутри соответствующих закрашенных областей (рис. 4), причём внутри пересечения окружностей s должна лежать хотя бы одна точка. Расстояние от s до области, содержащей проекцию x_5, равно $2 - r_1 - r_4 \leqslant w$. Аналогично для другого измерения получим $w \geqslant 2 - r_2 - r_3$. Тогда $2w \geqslant 4 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)$, или $w \geqslant 2 - (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/2$, $x \geqslant 2 + (r_1 + r_2 + r_3 + r_4)/2 \geqslant 3$, противоречие с предположением. Значит, $\mathrm{smt}(\{x_1, x_2, x_3, x_4\}) = 3$, $\mathrm{ssr}_4\big(\mathcal{H}(\mathbb{R}^n)\big) \leqslant 2/3$. В обратную сторону неравенство очевидно. $\square$

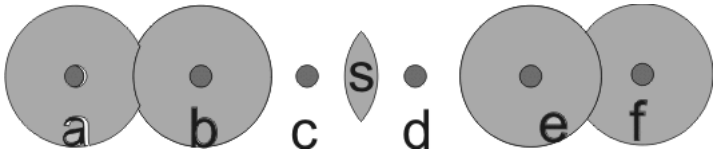

Рис. 4

Хотелось бы заметить, что все примеры были одномерными, поэтому утверждения и следствия верны для случая пространства компактов на прямой $\mathcal{H}(\mathbb{R})$.

Литература

[1] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.