Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости и четырёх точек в пространстве

З. Н. ОВСЯННИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: agent.wd28@gmail.com

УДК 514.774+519.176+514.747

Ключевые слова: суботношение Штейнера, минимальные заполнения.

Аннотация

Суботношение Штейнера — это фундаментальная характеристика метрического пространства, введённая А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным. В данной работе предпринята попытка оценить это отношение для пятиточечных подмножеств евклидовой плоскости и четырёхточечных подмножеств трёхмерного пространства.

Abstract

Z. N. Ovsyannikov, The Steiner subratio of five points on a plane and four points in three-dimensional space, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 167—179.

The Steiner subratio is a fundamental characteristic of a metric space, introduced by A. Ivanov and A. Tuzhilin. This work tries to estimate this subratio for five-point sets on a plane and four-point sets in three-dimensional space.

1. Введение

Понятие минимального заполнения было введено в [2], там же были поставлены задачи о минимальном отношении минимального заполнения и кратчайшей сети (так называемом суботношении Штейнера) и минимальном отношении минимального заполнения и минимального остовного дерева (отношении Громова—Штейнера). В [3] эти задачи были решены для случая четырёх точек на евклидовой плоскости. Мы некоторым образом расширяем полученные результаты для случая пяти точек на плоскости и четырёх точек в трёхмерном пространстве. Будут доказаны следующие утверждения.

Утверждение 1.1. *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости не больше*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 167—179.

отношение Громова—Штейнера в той же конфигурации не больше

$$\frac{1}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}}<\frac{3}{4}.$$

Теорема 1.2. *Для пяти точек на плоскости, образующих выпуклый пятиугольник, суботношение Штейнера равно* $\sqrt{3}/2$*, отношение Громова—Штейнера равно* $3/4$.

Теорема 1.3. *Для четырёх точек в трёхмерном евклидовом пространстве суботношение Штейнера равно* $(1/7)(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$*, а отношение Громова—Штейнера равно* $2/3$.

2. Необходимые определения и обозначения

Нам понадобятся определения различных отношений, которые мы будем рассматривать. Эти определения взяты из [2].

Определение 2.1. Пусть (X,ρ) — метрическое пространство и $G=(V,E)$ — произвольный граф. Отображение $\Gamma\colon V\to X$ называется *сетью в X, параметризованной графом G* или *сетью типа G*.

Определение 2.2. Будем говорить, что сеть типа $G=(V,E)$ *соединяет конечное множество* M, если $M\subset V$. Вершины из M будем называть *граничными*, а вершины из $V\setminus M$ — *внутренними*.

Определение 2.3. Длиной ребра $e=(vw)$ назовём расстояние между вершинами, соединяемыми этим ребром $\rho\big(\Gamma(v),\Gamma(w)\big)$, а длиной сети Γ — сумму длин всех рёбер сети.

Теперь мы готовы определить понятия кратчайших сетей разного вида.

Определение 2.4. Число

$$\operatorname{smt}(M)=\inf_{\Gamma\text{ — сеть, соединяющая }M} d(\Gamma)$$

назовём *длиной кратчайшей сети*. Если сеть с такой длиной существует, она называется *кратчайшей сетью, соединяющей M*.

В пространстве $\mathbb{R}^n$ для любого конечного набора точек существует кратчайшая сеть.

Определение 2.5. Число

$$\operatorname{mst}(M)=\inf_{\Gamma\text{ — сеть, соединяющая }M\text{ и не имеющая внутренних вершин}} d(\Gamma)$$

назовём *длиной минимального остовного дерева*. Сеть такой длины всегда существует и называется *минимальным остовным деревом на M*.

Определение 2.6. Пусть (M,d) — конечное метрическое пространство, граф $G=(V,E)$ — произвольное дерево, такое что M — подмножество множества его вершин и $\omega\colon E\to R_+$ — неотрицательная функция, заданная на рёбрах графа.

Можно определить функцию $d_\omega\colon M \times M \to R_+$ как сумму функций ω от рёбер на пути между вершинами.

Если для любых точек $a, b \in M$ выполняется условие $d_\omega(a,b) \geqslant d(a,b)$, то взвешенный граф (G,ω) называется *заполнением пространства M типа G* (или *топологии G*). Функция $\omega(e)$ называется *весом ребра*, а сумма весов всех рёбер графа называется *весом заполнения* и обозначается $\omega(G)$.

Определение 2.7. Пусть (M,d) — конечное метрическое пространство, граф $G=(V,E)$ — произвольное дерево, такое что M — подмножество множества его вершин. Тогда *весом минимального параметрического заполнения* называется

$$\mathrm{mpf}(M) = \inf\{\omega(G) \mid (G,\omega) \text{ — заполнение}\}.$$

Заполнение такой длины типа G существует и называется *минимальным параметрическим заполнением типа G*.

Минимум веса минимального параметрического заполнения, взятый по всем деревьям, называется *весом минимального заполнения* и обозначается как

$$\mathrm{mf}(M) = \inf_G\{\mathrm{mpf}(G)\}.$$

Заполнение такого веса называется *минимальным заполнением*.

Нам понадобятся несколько свойств минимальных заполнений и кратчайших сетей, возьмём их из [2] без доказательства.

Утверждение 2.8. *Если M — конечный набор точек из $\mathbb{R}^n$, то угол между любыми двумя рёбрами кратчайшей сети не меньше 120° (откуда следует, что степень каждой вершины не может быть больше 3). Более того, достаточно рассматривать только деревья, у которых все вершины степени 1 граничные.*

Определение 2.9. Сети в $\mathbb{R}^n$, в которых угол между любыми двумя рёбрами не меньше 120°, а все вершины степени 1 граничные, называются *локально минимальными сетями*.

Определение 2.10. *Усами* называется множество граничных вершин сети степени 1, инцидентных фиксированной внутренней вершине.

Теперь можно определить отношения.

Определение 2.11. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X,ρ). Тогда *отношением Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{sr}(M) = \frac{\mathrm{smt}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Отношением Штейнера для метрического пространства (X,ρ) называется число

$$\mathrm{sr}(X) = \inf\{\mathrm{sr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Определение 2.12. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда *отношением Громова—Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{sgr}(M) = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{mst}(M)}.$$

Отношением Громова—Штейнера для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{sgr}(X) = \inf\{\mathrm{sgr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Определение 2.13. Пусть M — конечное подмножество метрического пространства (X, ρ). Тогда *суботношением Штейнера* для этого подмножества называется отношение

$$\mathrm{ssr}(M) = \frac{\mathrm{mf}(M)}{\mathrm{smt}(M)}.$$

Суботношением Штейнера для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{ssr}(X) = \inf\{\mathrm{ssr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X\}.$$

Суботношением Штейнера типа n для метрического пространства (X, ρ) называется число

$$\mathrm{ssr}_n(X) = \inf\{\mathrm{ssr}(M) \mid M \text{ — конечное подмножество } X \text{ из } n \text{ элементов}\}.$$

Нам понадобятся также несколько необычных утверждений.

Пусть дано пять точек a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 на плоскости, образующих выпуклый пятиугольник. Назовём различные обходы этих точек «домик» (обозначение H), «звёздочка» (обозначение S), «рыбка с носиком в a_i» (обозначение F_i) и «бабочка с носиком в a_i» (обозначение B_i) [4] (рис. 1).

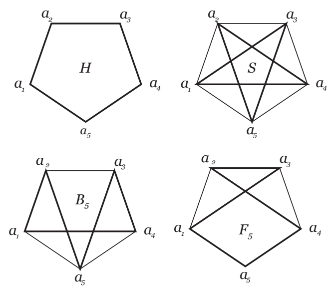

Рис. 1. Виды обходов пятиточечного множества

Также нам понадобится *формула Ерёмина* для нахождения весов минимального и минимального параметрического заполнений:

$$\mathrm{mf}_-(X) = \min_{X \subset G} \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p\bigl(\pi(X)\bigr),$$

$$\mathrm{mpf}_{G-}(X) = \max_{\pi \in \mathcal{O}(G)} p\bigl(\pi(X)\bigr).$$

Здесь $\mathcal{O}(G)$ — множество *планарных мультиобходов дерева* G. Это очень нетривиальный объект, и нам будет достаточно знать, что для случая четырёх- и пятиточечных пространств это такая последовательность точек $\{x_1, \ldots, x_n\} = X$, что можно нарисовать дерево G на плоскости и соединить точки $\{x_1, \ldots, x_n\}$ замкнутой линией так, что она не будет иметь самопересечений. При этом

$$p\bigl(\pi(X)\bigr) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \rho(x_i, x_{i+1}) \quad (x_{n+1} = x_1).$$

3. Выпуклый плоский случай пяти точек

Начнём с рассмотрения выпуклого случая. Нам понадобятся две леммы о бабочках.

Лемма 3.1. *Пусть точки a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 образуют выпуклый пятиугольник на плоскости. Тогда вес любой бабочки B_i не менее чем в $\sqrt{3}$ раз больше длины кратчайшей сети на этих пяти точках.*

Доказательство. Без ограничения общности можно рассмотреть только бабочку B_3. Построим сеть, затягивающую точки a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 так, как показано на рис. 2. Заметим, что сеть разбивается на три части. В [2] было показано,

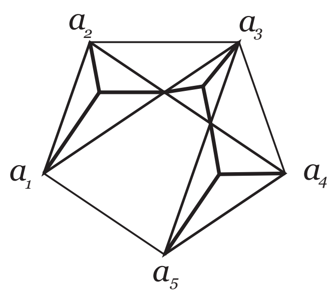

Рис. 2. Бабочка B_3 и соответствующая ей сеть

что суботношение Штейнера для трёх точек на плоскости равно $\sqrt{3}/2$. При этом вес минимального заполнения для трёх точек равен половине веса единственного обхода. Заметим, что бабочка B_3 разбивается на три таких обхода. Значит, вес бабочки не меньше чем $\sqrt{3}/2 \times 2 = \sqrt{3}$ веса данной сети, а значит, и кратчайшей. □

Лемма 3.2. *Для каждой из бинарных топологий на пяти точках существует планарная бабочка.*

Доказательство. Пусть задана какая-то бинарная топология, для пяти точек она может иметь единственный вид, так что достаточно задать пары усов. Очевидно, что для такой топологии планарными являются все обходы, содержащие рёбра, соответствующие рёбрам на усах. Таким образом, достаточно для каждой пары рёбер полного графа, не имеющих общих вершин, предъявить бабочку, содержащую их.

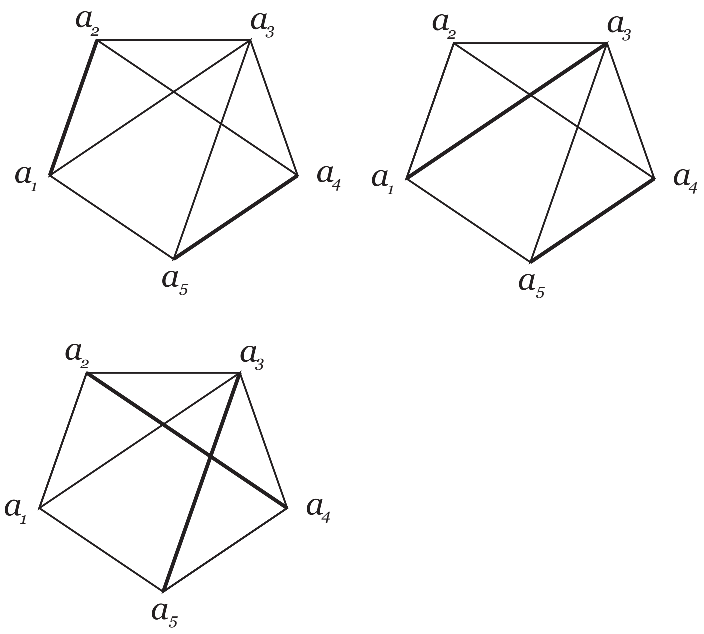

Рис. 3. Возможные пары усов и бабочки, планарные для этих пар

Всего может быть три различных случая: оба ребра лежат на границе выпуклого пятиугольника, оба ребра лежат внутри, одно ребро лежит на границе, одно внутри. Бабочки для этих случаев показаны на рис. 3. □

Из этих двух лемм и формулы Ерёмина следует, что суботношение Штейнера не меньше $\sqrt{3}/2$. Однако для правильного треугольника (частный случай выпуклого пятиугольника) суботношение Штейнера равно $\sqrt{3}/2$.

Следствие 3.3. *Для пяти точек на плоскости, образующих выпуклый пятиугольник, суботношение Штейнера не меньше $\sqrt{3}/2$, при этом минимум достигается.*

Для завершённости изложения докажем следующее утверждение.

Утверждение 3.4. *Для пяти точек на плоскости, образующих выпуклый пятиугольник, отношение Громова—Штейнера не меньше $3/4$, причём минимум достигается.*

Доказательство. Так как отношение Штейнера для пяти точек на плоскости равно $\sqrt{3}/2$ [6], а отношение Штейнера—Громова не меньше произведения суботношения Штейнера и отношения Штейнера, то отношение Штейнера—Громова для пяти точек в выпуклом случае не меньше $\sqrt{3}/2 \times \sqrt{3}/2 = 3/4$. У правильного треугольника это отношение равно $3/4$. □

4. Невыпуклый случай пяти точек

Существовала гипотеза, аналогичная гипотезе Гильберта—Поллака, что суботношение Штейнера равно $\sqrt{3}/2$, а отношение Громова—Штейнера равно $3/4$. Как оказалось, это не так. Приведём пример: рассмотрим два правильных треугольника со стороной 1, общей вершиной и углом между треугольниками 90° (рис. 4).

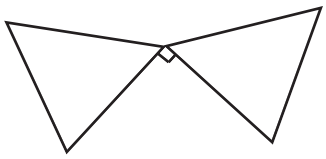

Рис. 4. Пример пяти точек на плоскости, для которых суботношение Штейнера и отношение Громова—Штейнера меньше предполагаемого минимума

Длина минимального остовного дерева в таком случае равна 4. Так как отношение Штейнера для пяти точек равно $\sqrt{3}/2$, то длина кратчайшей сети не меньше $2\sqrt{3}$. Но если взять сети, затягивающие треугольники отдельно, и объединить их, то получим длину, равную $2\sqrt{3}$, значит, это кратчайшая сеть. Вес минимального заполнения можно найти из формулы Ерёмина, и он будет равен $2 + (1 + \sqrt{3})/(2\sqrt{2})$. Это накладывает следующие ограничения на соответствующие отношения.

Утверждение 4.1. *Суботношение Штейнера для пяти точек на плоскости не больше*

$$\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1+\sqrt{3}}{4\sqrt{6}} < \frac{\sqrt{3}}{2},$$

отношение Громова—Штейнера в той же конфигурации не больше

$$\frac{1}{2} + \frac{1+\sqrt{3}}{8\sqrt{2}} < \frac{3}{4}.$$

5. Четыре точки в трёхмерном пространстве

Определение 5.1. Для четырёх точек A, B, C, D фиксируем бинарную топологию G, в которой они являются граничными. Отношение веса минимального параметрического заполнения с топологией G для этих четырёх точек к минимальной длине сети топологии G, затягивающей эти точки, будем называть *параметрическим суботношением Штейнера* и обозначать

$$\mathrm{ssrp}_G(\{A,B,C,D\}) = \frac{\mathrm{mpf}_G(\{A,B,C,D\})}{\mathrm{mpn}_G(\{A,B,C,D\})}.$$

Если же X — семейство четырёхточечных множеств, то для него определим это суботношение как инфимум суботношений его элементов:

$$\mathrm{ssrp}_G(X) = \inf_{P_4\in X} \frac{\mathrm{mpf}_G(P_4)}{\mathrm{mpn}_G(P_4)}.$$

Далее будем считать, что бинарная топология G такова, что точки A и B (C и D) лежат на одних усах.

Пусть K_G — множество четырёхточечных подмножеств в $\mathbb{R}^3$, для элементов $X \in K_G$ которого $\mathrm{mpf}_G(X) = \mathrm{mf}(X)$. Будем искать для него параметрическое суботношение Штейнера. Множество K_G естественным образом разбивается на три подмножества: множество таких четырёхточечных наборов, что внутреннее ребро локально минимальной сети вырожденно (K_G^1), множество таких наборов, что внутреннее ребро локально минимальной сети топологии G невырожденно, но имеются вырожденные рёбра (K_G^2), и множество таких наборов, что существует невырожденная локально минимальная сеть топологии G (K_G^3).

Пусть E_G — такое множество четырёхточечных подмножеств $\mathbb{R}^3$, что для любого $X \in E_G$ существует невырожденная локально минимальная сеть топологии G. Очевидно, $K_G^3 = K_G \cap E_G$. Замыкание $\overline{E_G}$ будем обозначать H_G.

Лемма 5.2. *Параметрическое суботношение Штейнера равно*

$$\mathrm{ssrp}_G(H_G) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3}+\sqrt{5}),$$

при этом $\mathrm{ssrp}_G(H_G) = \mathrm{ssrp}_G(K_G^3)$.

Доказательство. Пусть на множестве $X = \{A,B,C,D\}$ достигается инфимум

$$\inf_{X\in H_G} \frac{\mathrm{mpf}_{G-}(X)}{\mathrm{mpn}_G(X)}.$$

Это отношение не больше $\mathrm{ssrp}_G(H_G)$. Пусть локально минимальная сеть выглядит следующим образом: внутреннее ребро имеет длину 1, рёбра, инцидентные вершинам A, B, C, D имеют длину a, b, c, d соответственно. Пусть также плоскости усов AB и CD расположены под углом $\varphi \leqslant \pi/2$ друг к другу.

Длину локально кратчайшей сети можно представить в виде функции от пяти аргументов

$$\mathrm{mpn}(a,b,c,d,\varphi) = 1+a+b+c+d,$$

так же можно представить и $\mathrm{mpf}_{G-}(a,b,c,d,\varphi)$. Рассмотрим такое движение точек A, B, C, D, что они движутся вдоль инцидентных рёбер кратчайшего дерева так, что длины рёбер, лежащих на одних усах, в итоге «меняются местами»:

$$a(t) = at+b(1-t), \quad b(t) = bt+a(1-t), \quad c(t) = ct+d(1-t), \quad d(t) = dt+c(1-t).$$

Заметим, что mpn при этом преобразовании не меняется, а mpf_{G-} выпукла по t и симметрична относительно $t = 1/2$. Значит, минимум отношения достигается при $t = 1/2$, и без ограничения общности можно предположить, что $a = b$, $c = d$.

Аналогичными действиями можно показать, что без ограничения общности можно считать, что $a = b = c = d$.

Пусть $\varphi < \pi/2$. Проведём плоскость, перпендикулярную плоскости усов AB и содержащую внутреннее ребро; она делит пространство на две части. Пусть вершины A и C оказались в одной части. Тогда $AC + BD \leqslant AD + BC$, и из формулы Ерёмина следует, что

$$\mathrm{mpf}_{G-} = \frac{1}{2}(AB + BC + CD + DA).$$

Повернём усы так, что угол между ними станет равен $\pi/2$. Тогда mpf_{G-} уменьшится, значит, $\varphi = \pi/2$.

В таком случае

$$\mathrm{mpn}(\{A,B,C,D\}) = 4a+1, \quad \mathrm{mpf}_{G-}(\{A,B,C,D\}) = \sqrt{3}a + \sqrt{\frac{3}{2}a^2 + (a+1)^2}.$$

Найдём a, при котором достигается минимум отношения mpf к mpn, в нём производная функции

$$f(a) = \frac{\sqrt{3}a + \sqrt{\frac{3}{2}a^2 + (a+1)^2}}{4a+1}$$

равна 0:

$$f'(a) = \frac{\left(\sqrt{3} + \frac{5a+2}{2\sqrt{(3/2)a^2+(a+1)^2}}\right)(4a+1) - 4\left(\sqrt{3}a + \sqrt{\frac{3}{2}a^2+(a+1)^2}\right)}{(4a+1)^2} \vee 0.$$

Это эквивалентно тому, что

$$\sqrt{3}\sqrt{\frac{3}{2}a^2 + (a+1)^2} - \frac{3}{2}a - 3 \vee 0.$$

Если перенести $(3/2)a + 3$ в правую часть выражения, разделить обе части на $\sqrt{3}$ и возвести обе части в квадрат (правая часть при этом больше нуля, так что неравенство сохраняется), получим

$$\frac{3}{2}a^2 + (a+1)^2 \vee 2\left(\frac{a}{2}+1\right)^2.$$

Полученное неравенство имеет знак $<$ на интервале

$$\left(\frac{2}{7}(1-\sqrt{15}), \frac{2}{7}(1+\sqrt{15})\right),$$

значит, минимум достигается при

$$a = \frac{2}{7}(1+\sqrt{15}).$$

При этом

$$AB = \frac{2}{7}(1+\sqrt{15})\sqrt{3} < \frac{1}{7}\sqrt{3(79+16\sqrt{15})} = BC,$$

значит, $\{A, B, C, D\}$ — аддитивное пространство и его порождающее дерево имеет топологию G. Отсюда следует, что, во-первых, $\mathrm{mpf}_{G-}(X) = \mathrm{mpf}_G(X)$ и на этом же четырёхточечном множестве достигается $\inf\limits_{H_G} \mathrm{ssrp}_G(X)$, а во-вторых, выбранное заполнение является минимальным и $X \in K_G^3$.

Если посчитать значение ssrp для полученного множества X, получим $(1/7)(2\sqrt{3}+\sqrt{5})$. □

Следующая лемма тривиально следует из теоремы косинусов.

Лемма 5.3. *Пусть дан треугольник со сторонами длиной a, b, c, причём угол напротив стороны длины c не меньше $120°$. Тогда*

$$c \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(a+b).$$

Лемма 5.4. *Если $X \in K_G^1$, то*

$$\mathrm{ssrp}_G(X) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что локально кратчайшая сеть топологии G устроена следующим образом: есть вершина O, от которой к вершинам A, B, C, D идут рёбра с длинами a, b, c, d соответственно. При этом углы между отрезками OA и OB, а также между отрезками OC и OD не меньше $120°$, так как сеть локально кратчайшая.

Так как $\mathrm{mpf}_G(X) \geqslant (AB + CD)$, то по предыдущей лемме

$$\mathrm{mpf}_G(X) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}(OA+OB+OC+OD) = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{mpn}_G(X).$$ □

Осталось рассмотреть последний случай.

Лемма 5.5. *Минимум*

$$\inf_{X \in K_G^2} \mathrm{ssrp}_G(X)$$

не меньше минимума

$$\inf_{X \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(X).$$

Доказательство. Пусть D_G — такое множество четырёхточечных подмножеств $\mathbb{R}^3$, что для любого $X \in D_G$ существует локально минимальная сеть топологии G с невырожденным внутренним ребром, но одним или больше вырожденными внешними. Очевидно, $K_G^2 = K_G \cap D_G$.

Пусть на $X = \{A, B, C, D\}$ достигается минимум $\mathrm{ssrp}_G(X)$ на D_G и

$$\mathrm{ssrp}_G(X) < \inf_{Y \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(Y).$$

Если на усах вырождены оба ребра, то все точки X лежат в одной плоскости, а значит,

$$\mathrm{ssrp}_G(X) \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2} > \inf_{Y \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(Y).$$

Значит, на каждых усах имеется хотя бы по одному невырожденному ребру.

Возможны два случая: на каждых усах имеются вырожденные ребра или такие ребра имеется только на одних усах.

Рассмотрим первый случай. Пусть являются вырожденными рёбра, инцидентные вершинам A и C, а рёбра, инцидентные вершинам B и D, невырожденные. Заметим, что если поворачивать невырожденные рёбра вокруг внутреннего ребра, то будет изменяться лишь расстояние между вершинами B и D, прочие расстояния между вершинами, а также длина сети изменяться не будут. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что X таково, что это расстояние минимально, что достигается, когда все точки лежат в одной плоскости. При этом при уменьшении углов между граничными рёбрами и внутренним все расстояния между вершинами не увеличиваются, а длина локально кратчайшей сети не изменяется. Следовательно, без ограничения общности можно считать, что X таково, что эти углы равны $120°$, но тогда $X \in H_G$ и

$$\mathrm{ssrp}(X) \geqslant \inf_{Y \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(Y).$$

Пусть теперь имеет место второй случай, и вырожденно только ребро, инцидентное вершине D. Пусть вершины A и C лежат по одну сторону плоскости, проходящей через внутреннее ребро перпендикулярно плоскости усов. Пусть

$$k(X) = \frac{AB + BC + CD + DA}{\mathrm{mpn}_G(X)} \leqslant \mathrm{ssrp}(X).$$

Пусть вершина E минимальной параметрической сети инцидентна вершинам A и B. При повороте ребра CD вокруг внутреннего ребра из набора расстояний AB, BC, CD, DA изменяется только BC. Повернём ребро CD так, что плоскость ECD станет перпендикулярна плоскости ABD. Если уменьшать угол между ребром CD и внутренним ребром, то все расстояния между вершинами не увеличиваются, а длина минимального параметрического дерева не изменится. Наклоним ребро DC так, чтобы угол между ним и внутренним стал равен $120°$. Получим набор $Y = \{A, B, C', D\}$, причём $k(Y) \leqslant k(X)$. Теперь можно добавить ребро DD', лежащее в плоскости ECD и находящееся под углом $120°$

к рёбрам CD и ED. Пусть длины рёбер AE, BE, CD равны a, b, c соответственно. Пусть изначально длина ребра DD' равна 0. Будем двигать вершины A, B, C, D' вдоль инцидентных им граничных рёбер так, что длины рёбер A_tE, B_tE, C_tD, D'_tD будут равны $a(1-t)+bt$, $at+b(1-t)$, $c(1-t)$, ct соответственно. Пусть

$$k(t) = \frac{A(t)B(t) + B(t)C(t) + C(t)D'(t) + A(t)C(t)}{\mathrm{mpn}_G(\{A, B, C, D'\})}.$$

Заметим, что функция $k(t)$ выпукла по t и симметрична относительно $t = 1/2$. Пусть

$$Z = \left\{A\left(\frac{1}{2}\right), B\left(\frac{1}{2}\right), C\left(\frac{1}{2}\right), D'\left(\frac{1}{2}\right)\right\},$$

при этом

$$k(Z) \leqslant k(Y) \leqslant k(X) \leqslant \mathrm{ssrp}_G(X).$$

Заметим, что $Z \in H_G$ и $k(Z) = \mathrm{ssrp}_G(Z)$, значит, $\mathrm{ssrp}_G(H_G) \leqslant \mathrm{ssrp}_G(X)$.

Получили противоречие с предположением, значит,

$$\mathrm{ssrp}_G(X) \geqslant \inf_{Y \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(Y).$$

Но

$$\inf_{X \in K_G^2} \mathrm{ssrp}_G(X) \geqslant \inf_{X \in D_G} \mathrm{ssrp}_G(X) = \mathrm{ssrp}_G(X) \geqslant \inf_{X \in H_G} \mathrm{ssrp}_G(X). \qquad \square$$

Из лемм 5.4, 5.5 и 5.2 тривиальным образом следует утверждение.

Лемма 5.6. *Параметрическое суботношение Штейнера равно*

$$\mathrm{ssrp}_G(K_G) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

Замечание 5.7. Параметрическая сеть для множества $X = \{A, B, C, D\}$ из леммы 5.2 будет кратчайшей, так как для любой бинарной топологии $G' \neq G$ выполнено

$$\mathrm{mpn}_{G'}(X) \geqslant \mathrm{mpf}_{G-}(X) \geqslant \frac{1}{2}\big((BC + BC) + \max(AB + AB, BC + BC)\big) =$$
$$= 2BC > \frac{AB + BC}{\mathrm{ssrp}_G(K_G)(X)} = \mathrm{mpn}_G(X).$$

Замечание 5.8. Суботношение Штейнера для четырёх точек в $\mathbb{R}^3$ не меньше $\mathrm{ssrp}_G(K_G)$.

Неравенство в обратную сторону следует из замечания 5.7.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.9.

$$\mathrm{ssrp}_4(\mathbb{R}^3) = \frac{1}{7}(2\sqrt{3} + \sqrt{5}).$$

Литература

[1] Ерёмин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51—72.

[2] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[3] Лаут И., Степанова Е. — В печати.

[4] Рублёва О. — arXiv (to appear).

[5] Стрелкова Н. — В печати.

[6] Ding-Zhu Du, Hwang F. K., Yao E. Y. The Steiner ratio conjecture is true for five points // J. Combin. Theory Ser. A. — 1985. — Vol. 38. — P. 230—240.