Вероятностные характеристики топологий минимальных заполнений конечных метрических пространств

В. Н. САЛЬНИКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова,
Международная научно-исследовательская лаборатория
«Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б. Н. Делоне
e-mail: vs.salnikov@gmail.com

УДК 514.7

Ключевые слова: минимальные заполнения, конечные метрические пространства, аддитивные пространства, вероятность, приближённые решения.

Аннотация

В работе рассматривается подход к определению вероятностной меры для пространства минимальных заполнений конечных метрических пространств. Приводимый вариант является весьма естественным и в то же время не очень сложным для вычислений. С его помощью возможно вычисление асимптотик отношений вероятностей различных семейств топологий, а получаемые величины подтверждаются компьютерным экспериментом.

Abstract

V. N. Salnikov, Probabilistic properties of topologies of finite metric spaces' minimal fillings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 181—196.

In this work, we provide a way to introduce a probability measure on the space of minimal fillings of finite additive metric spaces as well as an algorithm for its computation. The values of probability, got from the analytical solution, coincide with the computer simulation for the computed cases. Also the built technique makes possible to find the asymptotic of the ratio for families of graph structures.

1. Введение

В середине XVII века Пьер Ферма в одной из своих работ сформулировал задачу поиска в плоскости точки, для которой сумма расстояний от неё до трёх заданных минимальна. На протяжении почти трёх веков к этой задаче возвращались многие ученые, и в результате было получено геометрическое построение этой точки, которую принято называть точкой Ферма. В дальнейшем задача обобщалась, и сейчас имеется несколько различных формулировок, объединённых под общим названием проблемы Штейнера.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 181—196.

Один из наиболее распространённых вариантов проблемы Штейнера состоит в следующем. Пусть X — конечное множество точек на плоскости. *Соединяющим деревом* $T(X)$ назовём конечный набор отрезков, множество концов которых содержит X, причём для любой пары точек из X существует и единственна ломаная, их соединяющая и составленная из выбранных отрезков. Для каждого соединяющего дерева можно найти сумму $l\big(T(X)\big)$ евклидовых длин отрезков, из которых оно состоит. Если существует такое соединяющее дерево $T^*(X)$, что для любого соединяющего дерева $T(X)$ справедливо неравенство $l\big(T^*(X)\big) \leqslant l\big(T(X)\big)$, то такое дерево называется (евклидовым) минимальным деревом Штейнера.

Указанная формулировка содержит в себе множество задач геометрической оптимизации, которые можно легко сформулировать на бытовом уровне. Например, задача соединения набора населённых пунктов системой дорог кратчайшей суммарной длины. К сожалению, проблема Штейнера принадлежит к классу так называемых NP-сложных задач, ни для какой из которых не известен полиномиальный алгоритм решения, но если найдётся соответствующее решение для какой-то одной из этих задач, то и остальные автоматически получат соответствующее решение. Более того, эта задача входила в один из первых списков NP-полных задач, опубликованный Р. Карпом в 1972 г. [8]. М. Гэри, Р. Грэм и Д. Джонсон [6] перешли от непрерывной формулировки задачи, указанной выше, к дискретному варианту и показали, что он является NP-сложным.

В [7] М. Громов определил следующее понятие минимального заполнения. Пусть M — гладкое замкнутое многообразие, на котором задана функция расстояния ρ. Рассмотрим всевозможные плёнки W, затягивающие M, т. е. компактные многообразия с краем, равным M. Рассмотрим на многообразии W функцию расстояния d, не уменьшающую расстояния между точками из M, т. е. $\rho(P,Q) \leqslant d(P,Q)$ для всех P и Q из M. Такое метрическое пространство $W = (W,d)$ будем называть заполнением метрического пространства $M = (M,\rho)$. Задача Громова состоит в описании точной нижней грани объёмов заполнений, а также описании пространств W, на которых эта нижняя грань достигается (их называют *минимальными заполнениями*). Эта задача является ещё одним примером геометрической оптимизации.

А. О. Иванов и А. А. Тужилин [4] предложили задачу поиска минимального заполнения для конечных метрических пространств как обобщение для конечных метрических пространств проблемы Штейнера поиска минимального соединяющего дерева и как обобщение задачи Громова о минимальном заполнении риманова многообразия.

Для заданного взвешенного графа G с весовой функцией w определим функцию расстояния $d_w(p,q)$ между его вершинами p и q, равную минимуму весов путей, соединяющих в G эти вершины, и равную бесконечности в случае отсутствия таковых.

Для конечного метрического пространства (M,ρ) граф $G = (V,E)$ с неотрицательными весами рёбер назовём *соединяющим* M, если $M \subset V$ и для любой пары вершин из M существует путь по графу между ними. *Заполнением* конечного метрического пространства (M, ρ) назовём соединяющий M взвешенный граф $\mathcal{G} = (G, w)$, такой что для любых $p, q \in M$ выполнено $\rho(p, q) \leqslant d_w(p, q)$. Тогда граф G назовём *типом* этого заполнения или его *топологией*. Число

$$\mathrm{mf}\big((M, \rho)\big) = \inf w(\mathcal{G}),$$

где инфимум берётся по всем заполнениям $\mathcal{G}$ пространства (M, ρ), назовём *весом минимального заполнения*, а любое заполнение $\mathcal{G}$, для которого $w(\mathcal{G}) = \mathrm{mf}\big((M, \rho)\big)$, — *минимальным заполнением* пространства (M, ρ). Подмножество вершин $\partial G \subset V$, соответствующее M, назовём *границей*, а его элементы — *граничными*. В [4] показано, что без ограничения общности можно предполагать, что G — дерево и множество граничных вершин совпадает с множеством его вершин степени 1. Важно заметить, что при поиске минимального заполнения мы ищем не только граф, но и *граничное отображение* — биекцию из множества ∂G граничных вершин графа G в M.

В частных случаях задача поиска минимального заполнения была решена. Так, например, для трёх точек p_1, p_2, p_3 с расстояниями между ними ρ_{12}, ρ_{23}, ρ_{13} нетрудно проверить, что минимальное заполнение содержит одну дополнительную вершину x, соединённую рёбрами со исходными тремя, причём вес ребра xp_i находится по формуле

$$w(xp_i) = \frac{\rho_{ij} + \rho_{ik} - \rho_{jk}}{2}.$$

В дальнейшем была получена формула для веса минимального заполнения [1], но её применение не упрощает поиска самого минимального заполнения, так как включает в себя экспоненциальный перебор всех априори возможных типов заполнения.

Если зафиксировать тип, то задача минимизации по всем заполнениям данного типа, так называемый поиск *минимального параметрического заполнения*, легко представляется в виде задачи линейного программирования, которую можно достаточно быстро решить. К сожалению, множество типов растёт экспоненциально в зависимости от числа точек метрического пространства, поэтому перебирать их все не представляется разумным. Поэтому несомненный интерес представляет поиск приближённого решения.

В данной работе предлагается новый подход к построению таких приближений. А именно, предлагается изучить, какие топологии наиболее часто появляются как топологии минимального заполнения, и затем искать минимум только среди них. Мы ограничимся рассмотрением аддитивных пространств, так как для них минимальные заполнения полностью описаны. Однако предложенный подход может быть, по-видимому, распространён как на случай произвольных метрических пространств, так и на другие оптимизационные задачи, такие как проблема Штейнера.

2. Случай аддитивного пространства

Пусть задано конечное метрическое пространство (M, ρ). Оно называется *аддитивным*, если существует *порождающее дерево*, т. е. взвешенное дерево, множество граничных вершин которого совпадает с M, и ρ-расстояние между любыми двумя точками $p, q \in M$ равно $d_w(p, q)$.

В данном случае будем считать, что веса неотрицательны, хотя аналогичные вопросы можно поставить и для обобщённо аддитивных пространств [5], где отрицательные веса допустимы.

Как известно, для произвольного аддитивного пространства порождающее дерево без вырожденных рёбер единственно [2]. Как и все остальные порождающие деревья, оно является минимальным заполнением для этого пространства [4].

Согласно [4] будем называть *усами* подграф, образованный смежными рёбрами, каждое из которых инцидентно своей граничной вершине, а степень общей вершины на 1 больше количества рёбер.

Попробуем оценить, с какой вероятностью граф минимального заполнения аддитивного пространства будет иметь тот или иной тип (топологию G). Эту величину обозначим через $\mathrm{P}(G)$. Обозначим точки в M натуральными числами $\{1, \dots, n\}$. При фиксированной топологии получаем отображение $T_G \colon w \mapsto \rho$, ставящее в соответствие произвольному распределению весов (положительных для случая метрического пространства и неотрицательных для случая псевдометрического пространства) $(n \times n)$-матрицу расстояний ρ, где $\rho_{p,q} = d_w(p, q)$. Из следующей леммы вытекает, что существует обратное отображение, которое по матрице расстояний аддитивного пространства и типу порождающего дерева восстанавливает веса рёбер этого дерева.

Лемма 1. *Пусть фиксировано дерево G, у которого нет вершин степени 2, не являющихся граничными (такое ограничение не нарушает общности, так как такую вершину вместе со смежными ей рёбрами всегда можно заменить одним ребром), и известно, что для некоторого неотрицательного распределения весов w оно является порождающим для аддитивного пространства M. Тогда распределение весов w восстанавливается однозначно по матрице расстояний.*

Доказательство. Доказательство можно провести по индукции по количеству рёбер в дереве G. Если ребро единственно, то его вес равен расстоянию между вершинами, которые оно соединяет. Пусть утверждение доказано для всех деревьев G с не более чем k рёбрами, удовлетворяющих условию леммы. Рассмотрим дерево с $k + 1$ ребром. В нём найдётся вершина p степени 1. Пусть q — единственная вершина дерева, с которой p соединена ребром. Если степень вершины q не превосходит 2, то она граничная и вес ребра, соединяющего p и q, необходимо равен расстоянию между ними. Если же степень вершины больше 2, то существуют хотя бы две граничные вершины q_1 и q_2, отличные от p, для которых соединяющий их путь проходит через q. Тогда в силу аддитивности пространства вес ребра, соединяющего p и q, необходимо равен

$(\rho_{p,q_1} + \rho_{p,q_2} - \rho_{q_1,q_2})/2$. Веса остальных рёбер находятся рассмотрением исходного дерева без ребра, вес которого уже определён, без вершины p, вершина q считается граничной (если она таковой не была, то расстояния до неё от всех граничных вершин вычисляются как разность расстояния до вершины p и веса найденного ребра). □

Зафиксируем на пространстве матриц расстояний норму. Для дальнейших вычислений нам будет удобно рассмотреть норму ℓ_1 для элементов над диагональю. Диагональ нулевая, и матрица симметрична, значит, эта норма есть половина от стандартной нормы ℓ_1 для матриц.

Мы определим вероятность $P(G)$ как величину, пропорциональную отношению меры множества всех аддитивных пространств типа G к мере множества всех аддитивных пространств, состоящих из такого же количества точек. В качестве возможных типов G мы будем рассматривать бинарные деревья (степени вершин равны 1 или 3, причём само пространство совпадает с множеством вершин степени 1).

Можно показать, что у каждого аддитивного пространства порождающее дерево может быть выбрано бинарным. При этом веса некоторых рёбер могут быть нулевыми. В таких предположениях тип аддитивного псевдометрического пространства определён неоднозначно, однако мы определим вероятностную меру так, чтобы мера пространств, у которых порождающее дерево может иметь нулевые веса, была бы равна нулю.

Перейдём теперь к описанию вероятностной меры. Нам нужно описать аддитивные пространства данного типа G с фиксированным граничным отображением (соответствием между вершинами степени 1 дерева G и множеством M). Пронумеруем все рёбра выбранного представителя топологии произвольным образом и обозначим веса этих рёбер через $x_1, x_2, \ldots, x_m$ (число m рёбер бинарного дерева с n граничными вершинами равно $2n-3$). Построим по набору величин $\{x_i\}$ матрицу расстояний ρ между точками из M. Так как все x_i неотрицательны, все элементы матрицы ρ неотрицательны, поэтому норма ℓ_1 матрицы равна сумме её элементов,

$$\|\rho\|_1 = \sum q_i x_i,$$

где q_i — число вхождений i-го ребра в пути от вершины j до вершины k для всех j, k, $j < k$. Заметим, что каждое число q_i равно произведению количества граничных вершин с одной стороны от ребра и количества таковых с другой стороны от ребра.

Утверждение 1. *Построенное отображение из положительного ортанта в матрицы расстояний T_G линейно.*

Доказательство. Действительно, для любых двух вершин p, q существует единственный путь по дереву G, их соединяющий. Тогда в ячейке матрицы расстояний, соответствующей этой паре вершин, стоит сумма весов рёбер $\{r_{i_k}\}_{k=1}^{t}$, по которым проходит этот путь. Обозначим через ρ_w матрицу расстояний, соответствующую распределению весов w, и через w_{i_k} вес ребра r_{i_k}. Пусть

$w = w^1 + w^2$. Тогда

$$\rho_w(p,q) = \sum_{k=1}^{t} w_{i_k} = \sum_{k=1}^{t}(w^1_{i_k} + w^2_{i_k}) = \sum_{k=1}^{t} w^1_{i_k} + \sum_{k=1}^{t} w^2_{i_k} = \rho_{w^1}(p,q) + \rho_{w^2}(p,q).$$

Для случая $w = \lambda w^1$ доказательство аналогично. □

Лемма 2. *Пусть G — бинарное дерево. Тогда ранг T_G максимален.*

Доказательство. Дерево G удовлетворяет условию леммы 1, поэтому распределение весов единственно. Пусть ранг не максимален. Тогда $\operatorname{Ker} T_G$ нетривиально. Рассмотрим произвольное распределение весов $\{w_i\}$ и ненулевой элемент $\{w^0_i\}$ из этого подпространства. Пусть

$$\mu = 2\min\left(\min_i(w_i),\ \min_i(w_i + w^0_i)\right).$$

Построим два новых положительных распределения весов: $\{w^1_i = w_i + |\mu|\}$, $\{w^2_i = w_i + w^0_i + |\mu|\}$, которые отличаются на элемент ядра. Их образы при отображении T_G совпадают в силу линейности, но это противоречит единственности распределения весов. □

Таким образом, становится ясно, что образ положительного ортанта — выпуклый конус размерности m, где, напомним, m — число рёбер рассматриваемой топологии.

Утверждение 2. *Пересечение образа положительного ортанта при отображении T_G с плоскостью $\|\rho\|_1 = 1$ — образ m-мерного симплекса при отображении T_G.*

Доказательство. Симплекс из формулировки нетрудно предъявить. Его вершинами будут распределения весов w^i с единственной ненулевой компонентой $w^i_i = 1/q_i$. Действительно, этот симплекс состоит из точек вида $w = \sum w^i t_i$, где $t_i \in [0,1]$ и $\sum\limits_i t_i = 1$. В силу линейности отображения и выбранной нормы получим

$$\|\rho_w\|_1 = \sum t_i \|\rho_{w^i}\|_1 = \sum t_i = 1$$

(суммирование везде по всем рёбрам).

Обратно, для любой точки ρ из образа ортанта, такой что $\|\rho\|_1 = 1$, существует разложение веса прообраза $\bar{w}$ по базису w^i: $\bar{w} = \sum k_i w^i$. В силу выбора w^i и неотрицательности компонент $\bar{w}$ k_i также неотрицательны. Пусть $\sum k_i = k$. Рассматривая точку симплекса, соответствующую распределению весов $w = \sum (k_i w^i / k)$, получаем

$$1 = \|\rho_w\|_1 = \frac{\|\rho_{\bar{w}}\|_1}{k} = \frac{1}{k}.$$

Следовательно, $k = 1$. □

Обозначим через p_G вероятность того, что минимальное заполнение будет иметь топологию G, причём вершины пронумерованы определённым образом, т. е. фиксировано граничное отображение. Будем считать, что вероятность той или иной топологии G при фиксированном граничном отображении пропорциональна объёму пересечения образа положительного ортанта с шаром $\|\rho\|_1 \leqslant 1$ при отображении T_G. Конечно, это не единственный способ выбора вероятностной меры, но он является одним из наиболее естественных, так как представляет собой стандартную нормированную меру в векторном пространстве.

Рассматривая различные граничные отображения, мы априори можем получить разные образы при отображении T_G. В то же время ясно, что если граничные отображения отличаются на симметрию графа, то образы соответствующих отображений T_G совпадают (веса рёбер переставляются вместе с рёбрами). Таким образом, автоморфизмы графа порождают симметрии образа отображения T_G. Далее будем считать топологии различными, если образы соответствующих отображений различны. Количество элементов группы автоморфизмов дерева G, состоящей из тех элементов, которые порождают изометрию соответствующего аддитивного пространства, обозначим через $\mathrm{simm}(G)$. С учётом введённых обозначений видно, что вероятность $\mathrm{P}(G)$ того, что минимальное заполнение будет иметь топологию G с произвольным граничным отображением, определяется формулой

$$\mathrm{P}(G) = \frac{c \cdot \mathrm{p}_G \cdot n!}{\mathrm{simm}(G)} = \frac{C \cdot \mathrm{vol}\big(\mathrm{Im}\, T_G \cap B_1(0)\big) \cdot n!}{\mathrm{simm}(G)},$$

где $B_1(0)$ — единичный шар в выбранной норме, а константы c и C не зависят от G.

Таким образом,

$$\frac{\mathrm{P}(G_1)}{\mathrm{P}(G_2)} = \frac{\mathrm{p}_{G_1}}{\mathrm{p}_{G_2}} \frac{\mathrm{simm}(G_2)}{\mathrm{simm}(G_1)}.$$

Лемма 3. *Если для двух разных топологий в образе при некоторых распределениях весов мы получили одно и то же пространство, то необходимо, чтобы в распределении весов присутствовали нулевые координаты, т. е. если $T_{G_1}(w_1) = T_{G_2}(w_2)$, то хотя бы одно из распределений весов w_1, w_2 содержит нулевые компоненты.*

Доказательство. Порождающее дерево без вырожденных рёбер единственно, поэтому если есть две разные топологии, то необходимо наличие вырожденных рёбер. □

Отсюда следует, что объём пересечения образов отображений для двух разных топологий нулевой.

Абсолютно аналогично утверждению 2 можно доказать следующее утверждение.

Утверждение 3. *Пересечение образа положительного ортанта с единичным шаром в метрике ℓ_1 — образ симплекса.*

Доказательство. К построенному в доказательстве прошлого утверждения симплексу надо лишь добавить вершину $w = (0, \ldots, 0)$. Остальные рассуждения аналогичны. $\square$

Остаётся лишь научиться считать объём образов этих симплексов. Так как образ симплекса — симплекс и координаты вершин известны, то объём можно посчитать через матрицу W, состоящую из строк

$$W_i = V_i - V_0,$$

где вектор V_i — пронумерованные произвольным способом (единым для всех вершин) элементы образа i-й вершины, стоящие над диагональю. В этих обозначениях

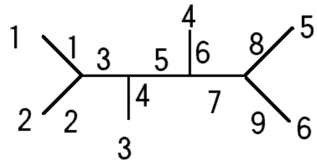
$$V = \frac{|\det WW^T|^{1/2}}{m!},$$

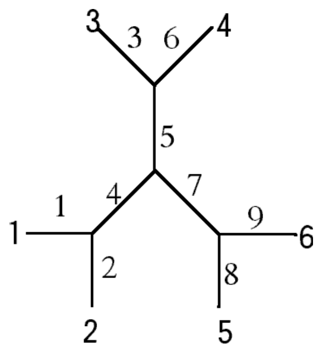
причём при наличии вершины $w = (0, \ldots, 0)$ мы можем присвоить ей номер 0, и тогда $W_i = V_i$.

Положим $Q = WW^T$. В выбранной нумерации $Q_{ij} = \langle V_i, V_j \rangle$, где через $\langle\, ,\, \rangle$ обозначено скалярное произведение векторов. При этом каждая координата вектора V_i есть $1/q_i$, если i-е ребро принадлежит пути, соединяющему соответствующую этой координате пару вершин, и нуль иначе. Таким образом, Q_{ij} равно количеству таких неупорядоченных пар вершин, что и i-е и j-е рёбра принадлежат их соединяющему пути, делённому на $q_i q_j$ (здесь видно, что результат вычислений не зависит от способа нумерации координат векторов V_i, выбор которого мы опустили выше).

3. Пример

Минимальное число точек в M, при котором существуют две различные (неизоморфные) топологии бинарного дерева, равно шести. Пронумеруем рёбра топологий и вершины, как показано на рисунках. Здесь $m = 9$. Обозначим через





q^k вектор $\{q_i\}$ для k-й топологии и через Q^k матрицу Q для k-й топологии:

$$q^1 = (5,5,8,5,9,5,8,5,5), \quad q^2 = (5,5,5,8,8,5,8,5,5),$$

$$Q^1 = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/25 & 1/10 & 1/25 & 1/15 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/25 & 1/5 & 1/10 & 1/25 & 1/15 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/10 & 1/10 & 1/8 & 1/20 & 1/12 & 1/20 & 1/16 & 1/20 & 1/20 \\ 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/5 & 1/15 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/15 & 1/15 & 1/12 & 1/15 & 1/9 & 1/15 & 1/12 & 1/15 & 1/15 \\ 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/15 & 1/5 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/20 & 1/20 & 1/16 & 1/20 & 1/12 & 1/20 & 1/8 & 1/10 & 1/10 \\ 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/15 & 1/25 & 1/10 & 1/5 & 1/25 \\ 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/15 & 1/25 & 1/10 & 1/25 & 1/5 \end{pmatrix},$$

$$Q^2 = \begin{pmatrix} 1/5 & 1/25 & 1/25 & 1/10 & 1/20 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/25 & 1/5 & 1/25 & 1/10 & 1/20 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/25 & 1/25 & 1/5 & 1/20 & 1/10 & 1/25 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/10 & 1/10 & 1/20 & 1/8 & 1/16 & 1/20 & 1/16 & 1/20 & 1/20 \\ 1/20 & 1/20 & 1/10 & 1/16 & 1/8 & 1/10 & 1/16 & 1/20 & 1/20 \\ 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/10 & 1/5 & 1/20 & 1/25 & 1/25 \\ 1/20 & 1/20 & 1/20 & 1/16 & 1/16 & 1/20 & 1/8 & 1/10 & 1/10 \\ 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/20 & 1/25 & 1/10 & 1/5 & 1/25 \\ 1/25 & 1/25 & 1/25 & 1/20 & 1/20 & 1/25 & 1/10 & 1/25 & 1/5 \end{pmatrix}.$$

Определители этих матриц равны $1{,}82 \cdot 10^{-9}$ и $2{,}05 \cdot 10^{-9}$,

$$\mathrm{simm}(G_1) = 8, \quad \mathrm{simm}(G_2) = 48.$$

Таким образом, $\mathrm{p}(G_1)/\,\mathrm{p}(G_2) = 5{,}33$, что соответствует

$$\mathrm{p}(G_1) = 0{,}84, \quad \mathrm{p}(G_2) = 0{,}16.$$

4. Вычисление полученных определителей для произвольных деревьев

Рассмотрим произвольное бинарное дерево с n граничными вершинами. Зафиксируем одну из вершин степени 3 и назовём её *центром*. Пусть рёбра пронумерованы каким-то образом. Как и раньше, будем говорить, что рёбра i и j *принадлежат одной ветви*, если существует такая вершина, что путь от неё до центра содержит оба эти ребра. Так как дерево произвольно, теперь *уровнем* $l(i)$ ребра с номером i назовём число рёбер пути, соединяющего центр с ближайшей из инцидентных ребру i вершин.

Утверждение 4. *Для произвольного бинарного дерева с n граничными вершинами и фиксированным центром выполнено*

$$\det Q = \frac{4}{\prod\limits_i \bigl(n-n(i)\bigr)^2} \cdot \prod_{(j,k)} \left[4\left(\frac{n}{n(k)+n(j)}-1\right)\right],$$

где $n(i)$ *(*i *— ребро) — число таких граничных вершин, что путь из центра до этой вершины содержит ребро* i*, а произведение берётся по всем таким парам* (j,k)*, что рёбра* j *и* k *смежные и* $l(j)=l(k)\neq 0$*.*

Доказательство. Заметим, что $q_i{=}n(i)\bigl(n-n(i)\bigr)$. Теперь пусть рёбра i и j принадлежат одной ветви. Без ограничения общности $l(i)\leqslant l(j)$. Тогда

$$Q_{ij} = \frac{n(j)\bigl(n-n(i)\bigr)}{q_i q_j}.$$

Если рёбра i и j принадлежат разным ветвям, то

$$Q_{ij} = \frac{n(i)n(j)}{q_i q_j}.$$

Пусть рёбра i, j принадлежат одной ветви и $l(j)=l(i)+1$. Рассмотрим возможные расположения ребра k при фиксированных i и j.

1. $k=j$.
2. k принадлежит общей для i и j ветви и $l(k)\leqslant l(i)$.
3. k принадлежит общей для i и j ветви и $l(k)>l(j)$.
4. k принадлежит ветви i, но не принадлежит ветви j и $l(k)=l(j)$.
5. k принадлежит ветви i, но не принадлежит ветви j и $l(k)>l(j)$.
6. k принадлежит другой ветви (по отношению к i).

Рассмотрим разность $R_{ijk}=\bigl(n-n(i)\bigr)Q_{ik}-\bigl(n-n(j)\bigr)Q_{jk}$ для некоторых из этих случаев.

1. $$R_{ijj} = \bigl(n-n(i)\bigr)Q_{ij}-\bigl(n-n(j)\bigr)Q_{jj} = \frac{\bigl(n{-}n(i)\bigr)^2 n(j)}{q_i q_j} - \frac{\bigl(n{-}n(j)\bigr)^2 n(j)}{q_j^2} = \frac{n-n(i)}{n-n(j)}\,\frac{1}{n(i)} - \frac{1}{n(j)}.$$

2. $l(k)\leqslant l(i)<l(j)$,
$$R_{ijk} = \frac{\bigl(n-n(i)\bigr)n(i)\bigl(n-n(k)\bigr)}{q_i q_j} - \frac{\bigl(n-n(j)\bigr)n(j)\bigl(n-n(k)\bigr)}{q_j q_k} = 0.$$

4. $$R_{ijk} = \frac{\bigl(n-n(i)\bigr)^2 n(k)}{q_i q_k} - \frac{\bigl(n-n(j)\bigr)n(j)n(k)}{q_j q_k} = \frac{n-n(i)}{n(i)\bigl(n-n(k)\bigr)} - \frac{1}{n-n(k)}.$$

6. $$R_{ijk} = \frac{\bigl(n-n(i)\bigr)n(i)n(k)}{q_i q_k} - \frac{\bigl(n-n(j)\bigr)n(j)n(k)}{q_j q_k} = 0.$$

В случаях 3 и 5 $l(k)>l(j)$ и k, i принадлежат одной ветви. Этого нам достаточно.

Вычислим $\det Q = \det\{Q_{ij}\}$.

Шаг 1. Из центра выходит три ребра, назовём *основной ветвью* для одного из этих рёбер r такое максимальное по включению поддерево, что каждое из его рёбер принадлежит одной ветви с ребром r. Рассмотрим одну из трёх основных ветвей, выходящих из центра. Пусть j — номер ребра максимального уровня в этой ветви. Возможны два случая:

а) $l(j) = 0$, и тогда $j = r$;

б) $l(j) \neq 0$, и тогда из бинарности дерева следует, что у ребра j ровно два смежных ребра i и k, причём $l(i) = l(j) - 1$, $l(k) = l(j)$ и i, k и j, i принадлежат одной ветви, но j, k не принадлежат одной ветви. Далее будем считать ребра j, k рассмотренными.

Шаг 2. Произведём следующие элементарные преобразования строк матрицы Q:

1) из строки с номером j вычтем строку с номером i, умноженную на ненулевой коэффициент $\big(n - n(i)\big)/\big(n - n(j)\big)$. В силу максимальности уровня ребра j не существует рёбер той же основной ветви, но большего уровня. Заметим, что после этого преобразования для элемента с номером t в j-й строке имеем
$$\hat{Q}_{jt} = \frac{-R_{ijt}}{n - n(j)}.$$
Соответственно, ненулевыми будут лишь элементы $\hat{Q}_{jj}$ и $\hat{Q}_{jk}$;

2) аналогично из строки с номером k вычтем строку с номером i, умноженную на $\big(n - n(i)\big)/\big(n - n(k)\big)$. В строке с номером k полученной матрицы ненулевыми останутся лишь $\hat{Q}_{kj}$ и $\hat{Q}_{kk}$.

Шаг 3. Учитывая вид строк с номерами k и j, имеем
$$\det Q = \det\begin{pmatrix} \hat{Q}_{kk} & \hat{Q}_{kj} \\ \hat{Q}_{jk} & \hat{Q}_{jj} \end{pmatrix} \cdot \det Q_1,$$
где матрица Q_1 получается из матрицы Q вычёркиванием k и j столбцов и строк.

Шаг 4. Имеем
$$\det\begin{pmatrix} \hat{Q}_{kk} & \hat{Q}_{kj} \\ \hat{Q}_{jk} & \hat{Q}_{jj} \end{pmatrix} =$$
$$= \det\begin{pmatrix} \frac{1}{n(k)(n-n(k))} - \frac{n-n(i)}{n(i)(n-n(k))^2} & \frac{1}{(n-n(j))(n-n(k))}\left(1 - \frac{n-n(i)}{n(i)}\right) \\ \frac{1}{(n-n(j))(n-n(k))}\left(1 - \frac{n-n(i)}{n(i)}\right) & \frac{1}{n(j)(n-n(j))} - \frac{n-n(i)}{n(i)(n-n(j))^2} \end{pmatrix} =$$
$$= \frac{1}{\big(n - n(j)\big)^2\big(n - n(k)\big)^2} \times$$
$$\times \left[\left(\frac{n - n(k)}{n(k)} - \frac{n - n(i)}{n(i)}\right)\left(\frac{n - n(j)}{n(j)} - \frac{n - n(i)}{n(i)}\right) - \left(1 - \frac{n - n(i)}{n(i)}\right)^2\right] =$$

$$
= \frac{1}{\big(n-n(j)\big)^2\big(n-n(k)\big)^2} \times
$$
$$
\times \left[\left(\frac{n}{n(k)}-\frac{n}{n(i)}\right)\left(\frac{n}{n(j)}-\frac{n}{n(i)}\right)-\left(2-\frac{n}{n(i)}\right)^2\right] =
$$
$$
= \frac{1}{\big(n-n(j)\big)^2\big(n-n(k)\big)^2} \times
$$
$$
\times \left[\left(\frac{n}{n(k)}-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)\left(\frac{n}{n(j)}-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)-\left(2-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)^2\right],
$$

последнее равенство верно, так как $n(i) = n(k) + n(j)$ (дерево бинарное).

Шаг 5. Рассматриваем ребро j_1 с максимальным уровнем из той же основной ветви без уже рассмотренных рёбер. Если $l(j_1) > 0$, то повторяем для него шаги 1—4 (если $l(j_1) < l(j)$, то в шаге 2 могут быть ненулевые элементы в «вычеркнутых» столбцах, но на подсчёт определителя они не влияют).

Шаг 6. Повторяем шаг 5 до тех пор, пока в основной ветви есть рёбра ненулевого уровня.

Шаг 7. Повторяем шаги 1—6 для оставшихся двух основных ветвей.

Шаг 8. Пусть после шагов 1—7 мы получили матрицу $\bar{Q}$. Заметим, что она получается из исходной вычёркиванием всех строк и столбцов, отличных от соответствующих рёбрам, инцидентным центру (пусть это рёбра с номерами c_1, c_2, c_3). Тогда

$$
\det \bar{Q} = \det \begin{pmatrix}
\frac{1}{n(c_1)(n-n(c_1))} & \frac{1}{(n-n(c_1))(n-n(c_2))} & \frac{1}{(n-n(c_1))(n-n(c_3))} \\
\frac{1}{(n-n(c_1))(n-n(c_2))} & \frac{1}{n(c_2)(n-n(c_2))} & \frac{1}{(n-n(c_2))(n-n(c_3))} \\
\frac{1}{(n-n(c_1))(n-n(c_3))} & \frac{1}{(n-n(c_2))(n-n(c_3))} & \frac{1}{n(c_3)(n-n(c_3))}
\end{pmatrix} =
$$
$$
= \frac{1}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)} \begin{pmatrix}
\frac{1}{n(c_1)} & \frac{1}{n-n(c_2)} & \frac{1}{n-n(c_3)} \\
\frac{1}{n-n(c_1)} & \frac{1}{n(c_2)} & \frac{1}{n-n(c_3)} \\
\frac{1}{n-n(c_1)} & \frac{1}{n-n(c_2)} & \frac{1}{n(c_3)}
\end{pmatrix} =
$$
$$
= \frac{1}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)^2} \begin{pmatrix}
\frac{n-n(c_1)}{n(c_1)} & 1 & 1 \\
1 & \frac{n-n(c_2)}{n(c_2)} & 1 \\
1 & 1 & \frac{n-n(c_3)}{n(c_3)}
\end{pmatrix} =
$$
$$
= \frac{1}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)^2} \times
$$
$$
\times \left[\prod_j \frac{n-n(c_j)}{n(c_j)} - \frac{n-n(c_1)}{n(c_1)} - 1\cdot\left(\frac{n-n(c_3)}{n(c_3)}-1\right) + 1\cdot\left(1-\frac{n-n(c_2)}{n(c_2)}\right)\right] =
$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)^2}\left[\left(\frac{n}{n(c_1)}-1\right)\left(\frac{n}{n(c_2)}-1\right)\left(\frac{n}{n(c_3)}-1\right)-\sum_j \frac{n}{n(c_j)}+5\right]=$$

$$= \frac{1}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)^2}\times$$

$$\times\left[\frac{n^3}{\prod\limits_j n(c_j)} - \frac{n^2\big(n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)\big)}{\prod\limits_j n(c_j)} + \sum_j \frac{n}{n(c_j)} - 1 - \sum_j\frac{n}{n(c_j)}+5\right]=$$

$$= \frac{4}{\prod\limits_i \big(n-n(c_i)\big)^2},$$

где мы воспользовались тем, что $n = n(c_1)+n(c_2)+n(c_3)$.

Шаг 9. Таким образом,

$$\det Q = \frac{4}{\prod\limits_{l=1}^{3}\big(n-n(c_l)\big)^2}\prod_{(j,k)}\left[\frac{1}{\big(n-n(j)\big)^2\big(n-n(k)\big)^2}\times\right.$$

$$\left.\times\left(\left(\frac{n}{n(k)}-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)\left(\frac{n}{n(j)}-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)-\left(2-\frac{n}{n(k)+n(j)}\right)^2\right)\right]=$$

$$= \frac{4}{\prod\limits_i \big(n-n(i)\big)^2}\cdot\prod_{(j,k)}\left[n^2\left(\left(\frac{1}{n(k)}-\frac{1}{n(k)+n(j)}\right)\left(\frac{1}{n(j)}-\frac{1}{n(k)+n(j)}\right)-\right.\right.$$

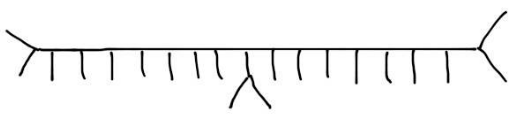
$$\left.\left.-\left(\frac{2}{n}-\frac{1}{n(k)+n(j)}\right)^2\right)\right] = \frac{4}{\prod\limits_i \big(n-n(i)\big)^2}\cdot\prod_{(j,k)}\left[4\left(\frac{n}{n(k)+n(j)}-1\right)\right],$$

где пары (j,k) определяются в соответствии с условием, что рёбра j и k смежные и $l(j)=l(k)\neq 0$. □

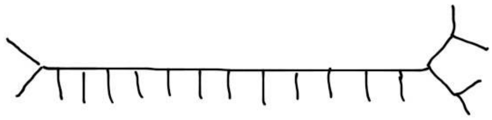
Замечание. Центр можно выбирать так, как это удобно для счёта.

5. Поиск отношения вероятностей для фиксированных топологий

Воспользуемся описанным выше алгоритмом для поиска асимптотики отношения двух фиксированных топологий. Зафиксируем чётное n и выберем топологии, имеющие одинаковое количество симметрий:



и



.

Посчитаем определитель матрицы Q_1 (первой топологии). В качестве центра выберем вершину, разбивающую дерево на поддерево, состоящее из трёх рёбер, и два одинаковых поддерева, содержащих по $(n-2)/2$ граничные вершины. Для любой из двух одинаковых ветвей

$$\prod_{(j,k)}\left[4\left(\frac{n}{n(k)+n(j)}-1\right)\right]=\left[4^{n/2-2}\frac{(n-2)!}{\big((n-2)/2\big)!(n/2)!}\right],$$

так как без ограничения общности можно считать, что $n(j)=1$, а $n(k)$ последовательно принимает все значения от 1 до $n/2-2$. Таким образом,

$$\det Q_1=\frac{4}{\prod_i\big(n-n(i)\big)^2}\left[4^{n/2-2}\frac{(n-2)!}{\big((n-2)/2\big)!(n/2)!}\right]^2\left[4\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{4^{n-2}}{(n-1)^{2n}(n-2)^2\big[\big((n-2)!\big)/\big((n/2)!\big)\big]^4}\left[\frac{(n-2)!}{\big((n-2)/2\big)!(n/2)!}\right]^2\left[\frac{n}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{4^{n-2}}{(n-1)^{2n}(n/2-1)!^2(n-2)^2\big[\big((n-2)!\big)/\big((n/2)!\big)\big]^2}\left[\frac{n}{2}-1\right]=$$

$$=\frac{4^{n-3}n^2}{2(n-1)^{2n}(n-2)(n-2)!^2}.$$

Для второй топологии выбор центра осуществим следующим образом: одну ветвь оставим такую же, как одно из поддеревьев первой топологии, вторая ветвь будет состоять лишь из одного ребра, а в третью ветвь войдёт оставшаяся часть дерева. Для третьей ветви подсчёт аналогичен рассмотренному выше с той лишь разницей, что $l(k)$ принимает значение 1 дважды, не принимает значение 3 и, когда $l(k)=2$, $l(j)$ тоже равно 2, а не 1. Имеем

$$\det Q_2=\frac{4}{\prod_i\big(n-n(i)\big)^2}\left[4^{n/2-2}\frac{(n-2)!}{\big((n-2)/2\big)!\,(n-(n-2)/2-1)!}\right]\times$$

$$\times\left[4\left(\frac{n}{2}-1\right)\right]^2\left[4\left(\frac{n}{4}-1\right)\right]\prod_{t=4}^{n/2-1}\left[4\left(\frac{n}{t+1}-1\right)\right]=$$

$$=\frac{4^{n-2}}{(n-1)^{2n}\big[\big((n-2)!\big)/\big((n/2)!\big)\big]^2\big[\big((n-4)!\big)/\big((n/2-1)!\big)(n-2)^2\big]^2}\times$$

$$\times \frac{(n-2)!}{((n-2)/2)!(n/2)!}\left(\frac{n}{2}-1\right)^2\left(\frac{n}{4}-1\right)\frac{\big[\big((n-5)!\big)/\big((n/2-1)!\big)\big]}{\big[\big((n/2)!\big)/(4!)\big]} =$$
$$= \frac{4^{n-3}6}{(n-1)^{2n}(n-2)^2(n-4)!\,(n-2)!}.$$

Таким образом,

$$\frac{\det Q_1}{\det Q_2} = \frac{1}{12}\frac{n^2}{(n-3)}.$$

Отсюда видно, что асимптотически при $n \to \infty$ первая топология более вероятна, так как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\det Q_1}{\det Q_2} = \infty.$$

Если рассмотреть более общий случай для топологии с тремя усами в предположении, что «средние усы» расположены между k-м и $(k+1)$-м рёбрами пути, соединяющими граничные вершины двух оставшихся усов, $2 \leqslant k \leqslant n-4$, то

$$\det Q_k = \frac{4^{n-2}(k+1)(n-k-1)}{2(n-1)^{2n}\big((n-2)!\big)(n-2)}$$

и

$$\frac{\det Q_{k_1}}{\det Q_{k_2}} = \frac{(k_1+1)(n-k_1-1)}{(k_2+1)(n-k_2-1)}.$$

При постоянных k_1 и k_2 предел отношения конечен. Более того, из формулы видно, что чем дальше третьи усы от краёв, тем вероятнее соответствующая топология. Если же, например, k_1 имеет порядок $n/2$, а $k_2 = \mathrm{const}$, то предел перестаёт быть конечным, что и было рассмотрено в частном случае выше.

6. Заключение

Таким образом, введена вероятностная мера на множестве топологий минимальных заполнений для аддитивных пространств, получены аналитические формулы подсчёта для произвольных топологий, позволяющие сравнивать их вероятности между собой. Приведён пример подсчёта отношения вероятностей двух топологий с одинаковым числом вершин, вычислена асимптотика этого отношения. Естественно, что, в отличие от случая шести вершин, с ростом их количества топологий становится больше двух, поэтому, чтобы получить окончательные значения вероятностей, необходимо воспользоваться предложенным алгоритмом для всех топологий и произвести нормировку полученных значений. Также можно отметить, что результаты вычислений с использованием полученных алгоритмов совпадают с результатом компьютерных экспериментов для посчитанных случаев.

Работа выполнена при поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор № 11.G34.31.0053, гранта РФФИ 13-01-00664а и гранта Президента РФ поддержки ведущих научных школ России, проект НШ 1410.2012.1.

Литература

[1] Ерёмин А. Ю. Формула веса минимального заполнения конечного метрического пространства // Мат. сб. — 2013. — Т. 204, № 9. — С. 51—72.

[2] Зарецкий К. А. Построение дерева по набору расстояний между висячими вершинами // Успехи мат. наук. — 1965. — Т. 20, № 6. — С. 90—92.

[3] Иванов А. О., Тужилин А. А. Теория экстремальных сетей. — М.; Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2003.

[4] Иванов А. О., Тужилин А. А. Одномерная проблема Громова о минимальном заполнении // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 5. — С. 65—118.

[5] Овсянников З. Н. Обобщённо аддитивные пространства. — Готовится к печати.

[6] Garey M. R., Graham R. L., Johnson D. S. The complexity of computing Steiner minimal trees // SIAM J. Appl. Math. — 1977. — Vol. 32. — P. 835—859.

[7] Gromov M. Filling Riemannian manifolds // J. Differential Geom. — 1983. — Vol. 18. — P. 1—147.

[8] Karp R. M. Reducibility among combinatorial problems // Complexity of Computer Computations: Proc. of a Symp. on the Complexity of Computer Computations / R. E. Miller, J. W. Thatcher, eds. — New York: Plenum, 1972. — (IBM Res. Symp. Ser.). — P. 85—103.