

Метод решения p -адического уравнения Колмогорова—Феллера для ультраметрического случайного блуждания в центрально-симметричном внешнем поле

О. М. СИЗОВА

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
Институт химической физики им. Н. Н. Семёнова РАН
e-mail: olstet@mail.ru

УДК 517.958+519.2

Ключевые слова: ультраметрическое случайное блуждание, p -адическое уравнение Колмогорова—Феллера.

Аннотация

В статье рассматривается метод решения уравнения Колмогорова—Феллера для ультраметрического случайного блуждания в аксиально симметричном внешнем поле. Переходная функция $w(y | x)$, $x, y \in \mathbb{Q}_p$ такого случайного процесса несимметрична и зависит от нормы p -адического аргумента. Доказывается, что для переходных функций вида $w(y | x) = \rho(|x - y|_p)\varphi(|x|_p)$ решение уравнения Колмогорова—Феллера, описывающего случайное блуждание в p -адическом шаре радиуса p^R , сводится к решению системы $R + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Abstract

O. M. Sizova, A method for solving the p -adic Kolmogorov–Feller equation for an ultrametric random walk in an axially symmetric external field, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 2, pp. 197–207.

A method for solving the Kolmogorov–Feller equation for an ultrametric random walk in an axially symmetric external field is considered. The transition function $w(y | x)$, $x, y \in \mathbb{Q}_p$, of the process under consideration is nonsymmetric and depends on the norm of p -adic arguments. It is proved for the transition functions of the form $w(y | x) = \rho(|x - y|_p)\varphi(|x|_p)$ that solving the p -adic Kolmogorov–Feller equation for a random walk in a p -adic ball of radius p^R reduces to solving a system of $R + 1$ ordinary differential equations.

Ультраметрические модели физических систем были предложены вначале для спиновых стекол ещё в 1980-х годах (см., например, [8,9]). Эти модели показали, что если в системе имеется большое число разномасштабных «внутренних противоречий» (фрустраций), то равновесие может достигаться путём выращивания дерева фаз, дробящего фазовое пространство на иерархически вложенные друг

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 2, с. 197–207.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

в друга области. При таком разбиении соотношение масштабов фазовых областей удовлетворяет сильному неравенству треугольника — неравенству, которому подчинено ультраметрическое расстояние, и в этом смысле спинстекольные состояния оказываются скоррелированными ультраметрически.

Примерно в это же время аналогичная идея была высказана в отношении конформационных состояний белковой молекулы [5]. В этом случае состояния белковой молекулы ассоциируются с локальными минимумами ландшафта потенциальной энергии, сам энергетический ландшафт белка представляется в виде иерархии вложенных друг в друга бассейнов локальных минимумов, а характерное время перехода между локальными минимумами определяется только максимальным активационным барьером, лежащим на пути перехода. Два последних предположения означают, что времена перехода подчиняются сильному неравенству треугольника, и следовательно, конформационная динамика белка может пониматься как случайный прыжковый процесс в ультраметрическом пространстве. Позже было показано, что такие представления действительно согласуются с большой серией экспериментов по динамике белка [1, 3, 4]. Недавно ультраметрическое случайное блуждание было использовано для описания пространственной укладки ДНК в хромосомах человека [6].

Однако физические приложения ультраметрических случайных процессов пока ограничены системами, состояния которых энергетически вырождены. В то же время многие сложные системы имеют определённое основное состояние, и в этих случаях нужны модели ультраметрического случайного блуждания во внешнем поле. В данной статье рассматривается одно семейство таких моделей.

Формулировку задач начнём с описания ультраметрического случайного блуждания в нулевом внешнем поле. Следуя работе [4], рассмотрим систему, пространство состояний M_R которой есть множество точек $i = 1, \dots, p^R$, где p — простое число. Эти точки рассматриваются как узлы решётки, по которым «частица» (система) случайно блуждает, преодолевая энергетические барьеры между узлами. Барьеры введём следующим образом. Разобьём множество M_R на p подмножеств (бассейнов) $M_{R-1}(a_1)$, $a_1 = 1, \dots, p$, где каждое подмножество $M_{R-1}(a_1)$ состоит из p^{R-1} точек:

$$\bigcup_{a_1} M_{R-1}(a_1) = M_R.$$

Барьер между бассейнами $M_{R-1}(a_1)$ примем равным H_R . Используя закон Аррениуса, можно записать вероятность перехода (в единицу времени) $\rho_R \sim e^{-H_R/(kT)}$ для перехода между двумя состояниями из различных бассейнов $i \in M_{R-1}(a_1)$ и $j \in M_{R-1}(a'_1)$. Затем разобьём каждый бассейн $M_{R-1}(a_1)$ на p меньших бассейнов $M_{R-2}(a_1 a_2)$, $a_2 = 1, \dots, p$, каждый из которых имеет p^{R-2} точек:

$$\bigcup_{a_2} M_{R-2}(a_1 a_2) = M_{R-1}(a_1).$$

Барьеры переходов между различными бассейнами M_{R-2} , лежащими внутри одного бассейна M_{R-1} , полагаются равными $H_{R-1} < H_R$. Соответственно, вероятность перехода (в единицу времени) между состояниями $i \in M_{R-2}(a_1 a_2)$, $j \in M_{R-2}(a'_1 a'_2)$ из различных бассейнов M_{R-2} будет $\rho_{R-1} \sim e^{-H_{R-1}/(kT)}$ для $a_1 = a'_1$, и $\rho_R \sim e^{-H_R/(kT)}$ для $a_1 \neq a'_1$. Иначе говоря, вероятность перехода между состояниями из различных бассейнов M_{R-2} зависит от уровня иерархии $\gamma = R - 1$ или $\gamma = R$, на котором эти бассейны входят в бассейн вышележащего уровня (в данном случае это M_R). Продолжим такое разбиение и такую расстановку барьеров до наименьших бассейнов $M_0(a_1 a_2 \dots a_{R-1})$, содержащих только одно состояние. В результате вероятность перехода между двумя состояниями, входящими в разные бассейны $M_{\gamma-1}$, но в один и тот же бассейн M_γ , будет равна $\rho_\gamma \sim e^{-H_\gamma/(kT)}$, $\gamma = 1, \dots, R$.

Случайное блуждание на дискретной решётке с такими правилами для переходов можно понимать как блуждание на границе регулярно ветвящегося дерева Кэли с индексом ветвления p , причём частица блуждает только на узлах, относящихся к границе дерева, а вероятность перехода между любой парой узлов определяется только положением вершины минимального поддерева, содержащего данные узлы. Поскольку эта вершина определяет ультраметрическое расстояние между выбранными узлами, вероятность перехода зависит только от ультраметрического расстояния. По этой причине такой случайный процесс называют ультраметрическим случайным блужданием. Заметим, что построенная выше переходная функция симметрична и трансляционно-инвариантна. Нулевое внешнее поле понимается именно в этом смысле.

Пусть $f_i(t)$ — переходная вероятность описанного выше ультраметрического случайного блуждания, т. е. вероятность найти блуждающую частицу в узле i в момент времени t при условии, что в начальный момент она находилась в некотором наперёд заданном узле. Полагая, что блуждание на M_R является однородным марковским процессом, подчиним функцию $f_i(t)$ уравнению Колмогорова—Феллера (управляющему уравнению)

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) = \mathbf{W} \mathbf{f}(t), \quad (1)$$

где $\mathbf{f}(t) = \{f_1(t), \dots, f_{p^R}(t)\}$ — вектор состояния системы, \mathbf{W} — матрица вероятностей переходов между парами узлов, имеющая вид блочно-иерархической матрицы Паризи [8] порядка $p^R \times p^R$.

Ранее случайное блуждание на ультраметрической решётке обсуждалось, например, в [7]. Непрерывный предел для (1), который приводит к p -адическому уравнению Колмогорова—Феллера для ультраметрического случайного блуждания, рассматривался в [2]. Схема такого перехода выглядит следующим образом. Каждому узлу i ультраметрической решётки $M_0(a_1 a_2 \dots a_{R-1})$ ставится в соответствие рациональное число x :

$$i = M_0(a_1 a_2 \dots a_{R-1}) \longleftrightarrow x = p^{-R}(a_1 + a_2 p + \dots + a_{R-1} p^{R-1}). \quad (2)$$

На множестве рациональных чисел x вида (2) вводится p -адическая норма $|\cdot|_p$, определяемая как

$$\begin{aligned} |0|_p &= 0, \\ |x|_p &= |p^{-R}(a_0 + \dots + a_s p^s + \dots + a_{R-1} p^{R-1})|_p = p^{R-s}, \end{aligned}$$

если $a_0 = a_1 = \dots = a_{s-1} = 0$ и $a_s \neq 0$. Такие числа образуют подмножество в множестве p -адических чисел, представимых в виде бесконечных рядов вида

$$x = p^{-R} \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i, \quad (3)$$

сходящихся по p -адической норме и образующих подмножество B_R (называемое p -адическим шаром радиуса p^R) поля p -адических чисел \mathbb{Q}_p . В пределе при $R \rightarrow \infty$ множество B_R переходит в поле \mathbb{Q}_p . Соответственно в этом пределе уравнение (1) переходит в p -адическое уравнение Колмогорова—Феллера для однородного стационарного марковского процесса на $B_R \subset \mathbb{Q}_p$:

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \int_{B_R \subset \mathbb{Q}_p} \rho(|x - y|_p) (f(y, t) - f(x, t)) dy, \quad (4)$$

где

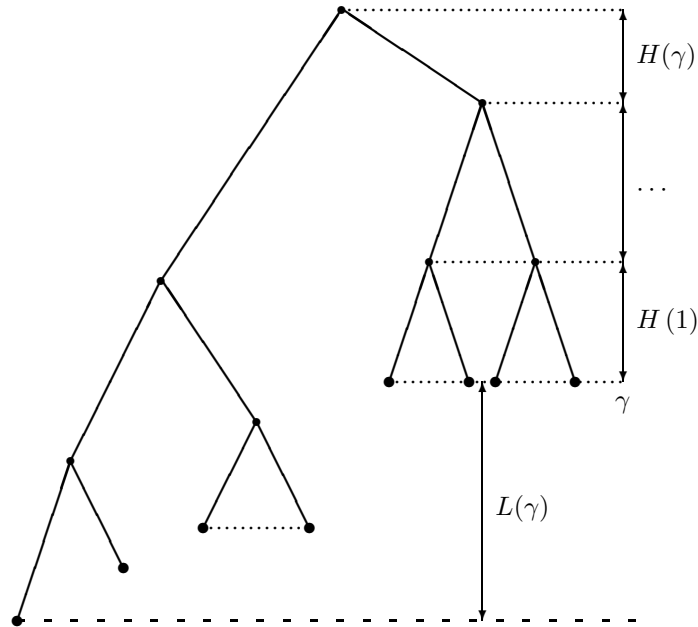
$$\rho(|x - y|_p) = \lim_{t' \rightarrow t} |t' - t|^{-1} f(y, t' | x, t), \quad f(y, t' | x, t) = f(|x - y|_p, t' - t).$$

Теперь перейдём к построению уравнения Колмогорова—Феллера для ультраметрического случайного блуждания в аксиально симметричном внешнем поле.

Вначале построим дерево Кэли, описывающее необходимый для нашей задачи энергетический ландшафт. Для этого зададим две положительные монотонно возрастающие от γ функции $H(\gamma)$ и $L(\gamma)$. Рассмотрим регулярное дерево, задающее барьеры $H(\gamma)$ для всех уровней γ , и поднимем его ветви на высоту $L(\gamma)$, считая γ уровнем барьера, который необходимо преодолеть, чтобы перейти из данного поддерева в точку 0 (см. рисунок).

В связи с тем, что γ однозначно выражается через p -адическую норму точек, заменим $H(\gamma)$ и $L(\gamma)$ соответственно на $H(|x - y|_p)$ и $L(|x|_p)$. Переходя от дискретного описания к континуальному, положим все функции локально-постоянными на шарах единичного радиуса. Поэтому будем считать, что $H(|x - y|_p) = H(1)$ при $|x - y|_p < 1$ и $L(|x|_p) = L(1)$ при $|x|_p < 1$. Барьеры переходов из точки x в точку y выразятся формулами

$$H_{x \rightarrow y} = \begin{cases} \mathcal{U}H(|x - y|_p) & \text{при } |x|_p \geq |y|_p, \\ H(|x - y|_p) + [L(|y|_p) - L(|x|_p)] & \text{при } |x|_p < |y|_p. \end{cases}$$



Тогда вероятности переходов определяются как

$$P(y | x) = \begin{cases} \frac{1}{\exp[\beta H(|x - y|_p)]} & \text{при } |x|_p \geq |y|_p, \\ \frac{1}{\exp[\beta H(|x - y|_p)]} \frac{\exp[\beta L(|x|_p)]}{\exp[\beta L(|y|_p)]} & \text{при } |x|_p < |y|_p, \end{cases} \quad \text{где } \beta = \frac{1}{kT}.$$

Заметим, что функция

$$P'(y | x) = \frac{1}{\exp[\beta H(|x - y|_p)]} \frac{\exp[\beta L(|x|_p)]}{\exp[\beta L(|x - y|_p)]}$$

при $|x|_p < |y|_p$, $|x|_p > |y|_p$ и $|x - y|_p = |x|_p = |y|_p$ совпадает с $P(y | x)$, а при $|x - y|_p < |x|_p = |y|_p$ отличается от неё. При этом оказывается, что замена функции $P(y | x)$ функцией $P'(y | x)$ не меняет характера задачи, а лишь незначительно переопределяет высоты барьеров соответствующих поддеревьев. В то же время функция $P'(y | x)$ имеет гораздо более простой вид и позволяет представить переходные функции $W(y | x)$ (которые получаются в результате деления $P'(y | x)$ на размер бассейна, в который переходит система) в виде

$$W(y | x) = \frac{\exp[\beta L(|x|_p)]}{|x - y|_p \exp[\beta [H(|x - y|_p) + L(|x - y|_p)]]} = \rho(|x - y|_p) \varphi(|x|_p).$$

Эта функция привлекательна тем, что распадается на произведение двух функций, зависящих от нормы аргументов.

Таким образом, уравнение Колмогорова—Феллера, описывающее ультраметрическую диффузию в центрально-симметричном поле, принимает вид

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \int_{B_R} \rho(|x - y|_p) [\varphi(|y|_p) \psi(y, t) - \varphi(|x|_p) \psi(x, t)] dy,$$

где

$$\rho(|x - y|_p) = \frac{1}{|x - y|_p \exp[\beta[H(|x - y|_p) + L(|x - y|_p)]]}, \quad \varphi(|x|_p) = \exp[\beta L(|x|_p)].$$

В дальнейшем для удобства будем писать вместо $\varphi(|x|_p)$ просто $\varphi(x)$, а вместо $\rho(|x - y|_p)$ просто $\rho(x - y)$.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = \int_{B_R} \rho(x - y) [\varphi(y) \psi(y, t) - \varphi(x) \psi(x, t)] dy, \quad (5)$$

$$\psi(x, 0) = \Omega(|x - a|_p). \quad (6)$$

Действительнозначная функция $\psi(x, t)$, относительно которой построена задача Коши, является функцией p -адического аргумента x и действительного аргумента $t > 0$. Начальное условие представляет собой индикатор единичного шара с центром в некоторой точке $a \in B_R$. Функции $\rho(\cdot)$ и $\varphi(\cdot)$ также действительнозначные и зависят только от p -адической нормы своих аргументов. Эти функции положительно определённые и возрастают по $|x|_p$. Без ограничения общности будем считать, что радиус локального постоянства всех функций, входящих в уравнение, равен 1. Ввиду вышеупомянутого локального постоянства будем считать, что $\rho(x) = \rho(1)$ и $\varphi(x) = \varphi(1)$ при $|x|_p < 1$. Интеграл в правой части уравнения берётся по мере Хаара, определённой на \mathbb{Q}_p .

Сформулируем основное утверждение данной работы.

Теорема 1. *Задача Коши (5) с начальным условием (6) может быть сведена к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений порядка $R+1$.*

Для доказательства теоремы 1 преобразуем уравнение к удобному виду и докажем две леммы.

Сделаем замену переменных

$$f(x, t) = \varphi(x) \psi(x, t).$$

Уравнение (5) и начальное условие (6) примут вид

$$\frac{\partial f(x, t)}{\partial t} = \varphi(x) \int_{B_R} \rho(x - y) [f(y, t) - f(x, t)] dy, \quad (7)$$

$$f(x, 0) = \frac{1}{\varphi(x)} \Omega(|x - a|_p). \quad (8)$$

Как известно, вейвлеты

$$\psi_{\gamma nj}(x) = p^{-\gamma/2} \chi_p(p^{-1}j(p^\gamma x - n)) \Omega(|p^\gamma x - n|_p)$$

где $\gamma \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{Q}_p/\mathbb{Z}_p$, $j \in \{1, \dots, p-1\}$, образуют ортонормированный базис в пространстве локально-постоянных комплекснозначных функций на \mathbb{Q}_p . В пространстве функций с параметром локального постоянства 1, определённых на B_R , таким базисом будет набор вейвлетов с $1 \leq \gamma \leq R$, носители которых лежат в B_R , с добавлением нормированного индикатора шара B_R :

$$\{\psi_{\gamma nj}(x)\}_{1 \leq \gamma \leq R, \text{supp} \in B_R} \cup \psi'(x)$$

где $\psi'(x) = p^{-R/2}$. Эти функции являются собственными для интегрального оператора, стоящего после $\varphi(x)$ в правой части уравнения (7). Собственные значения λ_γ , соответствующие $\psi_{\gamma nj}(x)$, зависят только от γ и выражаются формулой

$$\lambda_\gamma = -\rho(p^\gamma)p^\gamma - \left(1 - \frac{1}{p}\right) \sum_{i=\gamma+1}^R \rho(p^i)p^i.$$

Функции $\psi'(x)$ соответствует собственное значение $\lambda' = 0$.

Назовём вейвлеты $\psi_{\gamma 0j}$ *центральными*, а вейвлеты $\psi_{\gamma nj}(x)$ при $n \neq 0$ *нецентральными* (функцию $\psi'(x)$ будем относить к центральным вейвлетам).

Лемма 1. Нецентральные вейвлеты $\psi_{\gamma nj}(x)$ являются собственными функциями оператора правой части уравнения (7) и имеют собственные значения

$$\lambda_{\gamma n} = \varphi(p^{-\gamma}n) \cdot \lambda_\gamma.$$

Доказательство. Функция $\varphi(x)$ постоянна на носителях нецентральных вейвлетов, поэтому результат действия интегрального оператора умножается на константу $\varphi(p^{-\gamma}n)$. \square

Лемма 2. Пространство, образованное центральными вейвлетами $\psi_{\gamma 0j}(x)$ представляет собой объединение R собственных относительно оператора A подпространств размерности $p-2$ и набора из $R+1$ функций, образующих инвариантное подпространство.

Доказательство. Изучим, как действует оператор правой части (обозначим его через A) на центральные вейвлеты. Имеем

$$A\psi_{\gamma 0j}(x) = \varphi(x)\lambda_\gamma \cdot \psi_{\gamma 0j}(x).$$

Разложим функцию $\varphi(x)$ по вейвлетам. Так как функция $\varphi(x)$ зависит только от $|x|_p$, в разложении будут участвовать только центральные вейвлеты:

$$\varphi(x) = \sum_i \varphi^i \left[\sum_j \psi_{i0j}(x) \right] + \varphi' \psi'(x).$$

Таким образом, действие оператора A на центральный вейвлет $\psi_{\gamma 0j}(x)$ сводится к сумме попарных произведений данного вейвлета на все центральные вейвлеты:

$$\begin{aligned}\psi_{i0j'}(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-\gamma/2}\psi_{i0j'}(x), & i < \gamma, \\ \psi_{\gamma 0j'}(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-\gamma/2}\psi_{\gamma 0(j+j')}(x), & j + j' \neq 0 \pmod{p}, \\ \psi_{\gamma 0j'}(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-\gamma}I_{B_\gamma}(x), & j + j' = 0 \pmod{p}, \\ \psi_{i0j'}(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-i/2}\psi_{\gamma 0j}(x), & i > \gamma, \\ \psi'(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-R/2}\psi_{\gamma 0j}(x),\end{aligned}$$

где $I_{B_\gamma}(x)$ — индикатор шара B_γ :

$$I_{B_\gamma}(x) = p^\gamma \left[\sum_{i=\gamma+1}^R p^{-i/2} \sum_{j'} \psi_{i0j'}(x) + p^{-R/2}\psi'(x) \right].$$

В результате произведение $\varphi(x)$ и центрального вейвлета $\psi_{\gamma 0j}(x)$ даёт

$$\begin{aligned}\varphi(x)\psi_{\gamma 0j}(x) &= p^{-\gamma/2} \sum_{i=1}^{\gamma-1} \varphi^i \sum_{j'} \psi_{i0j'}(x) + p^{-\gamma/2} \varphi^\gamma \sum_{j' \neq j} \psi_{\gamma 0j'}(x) + \\ &+ \left[(p-1) \sum_{i=\gamma+1}^R p^{-i/2} \varphi^i + p^{-R/2} \varphi'(x) \right] \psi_{\gamma 0j}(x) + \\ &+ \varphi^\gamma \sum_{i=\gamma+1}^R p^{-i/2} \sum_{j'} \psi_{i0j'}(x) + \varphi^\gamma p^{-R/2} \psi'(x)\end{aligned}$$

и

$$\varphi(x)\psi'(x) = p^{-\gamma/2} \sum_{i=1}^R \varphi^i \sum_{j'} \psi_{i0j'}(x) + \varphi' p^{-R/2} \psi'(x).$$

Домножая на λ_γ , получаем результат действия оператора A на вейвлет $\psi_{\gamma 0j}(x)$. Отметим, что $A\psi'(x) = 0$, поскольку $\lambda' = 0$.

Зафиксируем γ и обозначим для краткости $\psi_{\gamma 0j}(x)$ через ψ_j и $(p-1)$ через k , а пространство, образованное всеми остальными центральными вейвлетами, через V . Тогда действие оператора A можно записать следующим образом:

$$\left\{ \begin{array}{l} A\psi_1 = v + a\psi_1 + b \sum_{j \neq 1} \psi_j, \\ A\psi_2 = v + a\psi_2 + b \sum_{j \neq 2} \psi_j, \\ \vdots \\ A\psi_k = v + a\psi_k + b \sum_{j \neq k} \psi_j \end{array} \right. \quad \text{при } v \in V, a, b \in \mathbb{R}. \quad (9)$$

Заметим, что действие оператора на центральный вейвлет ψ_j инвариантно относительно индекса j .

Сложим все равенства (9), разделим сумму на k и обозначим через $\bar{\psi}$ среднее арифметическое функций ψ_1, \dots, ψ_k :

$$A\bar{\psi} = v + a\bar{\psi} + b(k-1)\bar{\psi}, \quad \text{где } \bar{\psi} = \frac{\psi_1 + \dots + \psi_k}{k}. \quad (10)$$

Вычитая из (10) i -е равенство системы (9), получаем

$$A(\bar{\psi} - \psi_i) = a(\bar{\psi} - \psi_i) + b \sum_{j \neq i} (\bar{\psi} - \psi_j).$$

Таким образом, подпространство U_γ , образованное функциями $\bar{\psi} - \psi_i$, инвариантно относительно действия оператора A и ортогонально к $\bar{\psi}$.

Нетрудно убедиться, что

$$(\bar{\psi} - \psi_1) + \dots + (\bar{\psi} - \psi_k) = 0$$

и $(k-1)$ функцию $\bar{\psi} - \psi_i$ можно взять в качестве базиса инвариантного подпространства U_γ . Такой базис будет образовывать собственное подпространство оператора A с собственным значением

$$\lambda_{\gamma 0} = \varphi(p^{-\gamma})\lambda_\gamma.$$

Таким образом, пространство, образованное всеми центральными вейвлетами, распадается на R инвариантных собственных пространств и набор из $(R+1)$ функции $\{\bar{\psi}_1, \dots, \bar{\psi}_R, \psi'\}$. Лемма доказана. \square

Докажем теперь сформулированную выше теорему.

Запишем действие оператора A на функцию из подпространства U_γ :

$$\begin{aligned} A\bar{\psi}_\gamma(x) = & \lambda_\gamma \left(p^{-\gamma/2} \sum_{i=1}^{\gamma-1} \varphi^i \bar{\psi}_i(x) + \right. \\ & + \left[(p-2)p^{-\gamma/2} \varphi^\gamma + (p-1) \sum_{i=\gamma+1}^R p^{-i/2} \varphi^i + p^{-R/2} \varphi'(x) \right] \bar{\psi}_\gamma(x) + \\ & \left. + \varphi^\gamma \sum_{i=\gamma+1}^R p^{-i/2} \bar{\psi}_i(x) + \varphi^\gamma p^{-R/2} \psi'(x) \right). \end{aligned} \quad (11)$$

Из формулы (11) видно, что действие оператора A на функции подпространства U_γ можно представить в виде произведения симметричной и диагональной матриц размерности $R+1$:

$$\begin{pmatrix}
 a_{11} & p^{-2/2}\varphi^1 & p^{-3/2}\varphi^1 & \dots & p^{-\gamma/2}\varphi^1 & \dots & p^{-R/2}\varphi^1 & p^{-R/2}\varphi^1 \\
 p^{-2/2}\varphi^1 & a_{22} & p^{-3/2}\varphi^2 & \dots & p^{-\gamma/2}\varphi^2 & \dots & p^{-R/2}\varphi^2 & p^{-R/2}\varphi^2 \\
 p^{-3/2}\varphi^1 & p^{-3/2}\varphi^2 & a_{33} & \dots & p^{-\gamma/3}\varphi^3 & \dots & p^{-R/2}\varphi^3 & p^{-R/2}\varphi^3 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 p^{-\gamma/2}\varphi^1 & p^{-\gamma/2}\varphi^2 & p^{-\gamma/2}\varphi^3 & \dots & a_{\gamma\gamma} & \dots & p^{-R/2}\varphi^\gamma & p^{-R/2}\varphi^\gamma \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 p^{-R/2}\varphi^1 & p^{-R/2}\varphi^2 & p^{-R/2}\varphi^3 & \dots & p^{-R/2}\varphi^\gamma & \dots & a_{RR} & p^{-R/2}\varphi^R \\
 p^{-R/2}\varphi^1 & p^{-R/2}\varphi^2 & p^{-R/2}\varphi^3 & \dots & p^{-R/2}\varphi^\gamma & \dots & p^{-R/2}\varphi^R & 0
 \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix}
 \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \lambda_3 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_\gamma & \dots & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & \lambda_R & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 & 0
 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение задачи Коши для уравнения ультраметрической диффузии в центрально-симметричном потенциале с несимметричной переходной функцией сводится к решению системы $R + 1$ обыкновенных дифференциальных уравнений.

Автор выражает глубокую признательность В. А. Аветисову и А. О. Иванову за обсуждения и ценные замечания на всех стадиях работы над этой статьёй.

Литература

- [1] Avetisov V. A., Bikulov A. H. Protein ultrametricity and spectral diffusion in deeply frozen proteins // *Biophys. Rev. Lett.* — 2008. — Vol. 3. — P. 387–396.
- [2] Avetisov V. A., Bikulov A. H., Kozyrev S. V. Application of p -adic analysis to models of spontaneous breaking of replica symmetry // *J. Phys. A.* — 1999. — Vol. 32. — P. 8785–8791.
- [3] Avetisov V. A., Bikulov A. H., Kozyrev S. V., Osipov V. A. p -adic models of ultrametric diffusionh constrained by hierarchical energy landscapes // *J. Phys. A: Math. Gen.* — 2002. — Vol. 35. — P. 177–189.
- [4] Avetisov V. A., Bikulov A. H., Osipov V. A. p -adic models of ultrametric diffusion in conformational dynamics of macromolecules // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2004. — Vol. 245. — P. 48–57.
- [5] Frauenfelder H. The connection between low-temperature kinetics and life // *Protein Structure, Molecular and Electronic Reactivity* / R. H. Austin et al., eds. — New York: Springer, 1987. — P. 245–261.

- [6] Morozov L., Tamm M. V., Nechaev S. K., Avetisov V. A. Statistical model of intra-chromosome contact maps. — 2013. — [arXiv:1311.7689](https://arxiv.org/abs/1311.7689).
- [7] Ogielski A. T., Stein D. L. Dynamics on ultrametric spaces // Phys. Rev. Lett. — 1985. — Vol. 55. — P. 1634–1637.
- [8] Parisi G. Infinite number of order parameters for spin-glasses // Phys. Rev. Lett. — 1979. — Vol. 43. — P. 1754–1756.
- [9] Rammal R., Toulouse G., Virasoro M. A. Ultrametricity for physicists // Rev. Mod. Phys. — 1986. — Vol. 58, no. 3. — P. 765–788.

