Два примера диагональных биполигонов

Т. В. АПРАКСИНА
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: taya.apraksina@gmail.com

И. В. БАРКОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: zvord@b64.ru

И. Б. КОЖУХОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: kozhuhov_i_b@mail.ru

УДК 512.579

Ключевые слова: полугруппа, диагональный полигон, биполигон, сократимая полугруппа.

Аннотация

Построен пример сократимой справа полугруппы, у которой диагональный биполигон является циклическим. Кроме того, показано, что любая полугруппа изоморфно вкладывается в полугруппу, диагональный биполигон которой циклический, а диагональный биполигон третьего порядка не является конечно порождённым.

Abstract

T. V. Apraksina, I. V. Barkov, I. B. Kozhukhov, Two examples of diagonal bi-acts, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 3—9.

An example of a right cancellative semigroup is constructed such that the diagonal bi-act of this semigroup is cyclic. Moreover, it is proved that every semigroup can be isomorphically embedded into a semigroup such that its diagonal bi-act of second order is cyclic, but the diagonal bi-act of third order is not finitely generated.

Правым полигоном [3] над полугруппой S называется множество X, на котором действует полугруппа S, т. е. определено отображение $X \times S \to X$, $(x, s) \mapsto xs$, такое что выполняется тождество $(xs)s' = x(ss')$ при всех $x \in X$, $s, s' \in S$. *Левый полигон* Y над полугруппой S определяется двойственным образом, т. е. как отображение $S \times Y \to Y$, $(s, y) \mapsto sy$, причём $s(s'y) = (ss')y$ при $y \in Y$, $s, s' \in S$. Если множество X является левым полигоном над полугруппой S и правым полигоном над полугруппой T, то оно будет называться *биполигоном*, если выполняется условие $(sx)t = s(xt)$ при $x \in X$, $s \in S$, $t \in T$.

Если S — полугруппа, то множество $S \times S$ будет правым полигоном над S относительно действия $(x, y)s = (xs, ys)$ при всех $x, y \in X = S \times S$, $s \in S$, левым полигоном относительно действия $s(x, y) = (sx, sy)$, а также биполигоном, если

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 3—9.

выполняются оба тождества. Соответствующие полигоны называются *правым диагональным полигоном*, *левым диагональным полигоном* и *диагональным биполигоном*. Будем обозначать их $(S\times S)_S$, ${}_S(S\times S)$, ${}_S(S\times S)_S$.

Диагональный (би)полигон называется *циклическим*, если он порождён одним элементом. Например, ${}_S(S\times S)_S$ циклический, если существуют такие $a,b\in S$, что $S^1(a,b)S^1 = S\times S$, где

$$S^1 = \begin{cases} S, & \text{если } S \text{ имеет единицу,}\\ S\cup\{1\}, & \text{если } S \text{ не имеет единицы.}\end{cases}$$

В [2, теоремы 4.3, 2.5, 3.5] было доказано, что если X — бесконечное множество и S — полугруппа всех частичных инъективных преобразований множества X, то диагональный биполигон ${}_S(S\times S)_S$ циклический, а диагональные полигоны $(S\times S)_S$ и ${}_S(S\times S)$ не являются даже конечно порождёнными. В [1, лемма 5.1] было доказано, что сократимая нетривиальная полугруппа не может иметь циклический диагональный биполигон, и был поставлен вопрос, будет ли это утверждение верно, если требование сократимости ослабить до односторонней сократимости. В данной работе мы строим пример бесконечной полугруппы S с правым сокращением, у которой диагональный биполигон ${}_S(S\times S)_S$ циклический. Тем самым даётся отрицательный ответ на вопрос из [1]. Построение примера фактически является усовершенствованием конструкции, примененной П. Галагером и Н. Рушкуцом при доказательстве леммы 4.1 и теоремы 4.3 в [2].

Напомним, что полугруппа S называется полугруппой с правым сокращением, если для всех $x,y,z\in S$ из $xz=yz$ следует, что $x=y$. Полугруппа S называется полугруппой с левым сокращением, если для всех $x,y,z\in S$ из $zx=zy$ следует, что $x=y$. Если выполняются оба условия, полугруппа называется сократимой.

Во второй части работы мы строим полугруппу T, для которой биполигон ${}_T(T\times T)_T$ циклический, а биполигон ${}_T(T\times T\times T)_T$ не является конечно порождённым. Точнее, мы доказываем, что любая полугруппа S изоморфно вкладывается в полугруппу T, обладающую указанным свойством.

Пусть X, Y — произвольные множества и $\alpha,\beta\colon X\to Y$ — отображения. Будем считать, что $X\cap Y=\varnothing$ (если это условие не выполняется, то возьмём вместо Y его копию, не пересекающуюся с X). Построим двудольный граф $G(\alpha,\beta)$, у которого множеством вершин является $X\cup Y$, а ребрами — пары (x,y), где $y=x\alpha$ или $y=x\beta$. Очевидно, что для любых отображений α, β выполняется условие

1) для любого $x\in X$ существует не более двух $y\in Y$, таких что (x,y) — ребро графа $G(\alpha,\beta)$.

Если α, β — инъективные отображения, то выполняется также условие

2) для любого $y\in Y$ существует не более двух $x\in X$, таких что (x,y) — ребро графа $G(\alpha,\beta)$.

Пусть α, β — инъективные отображения. Тогда, пользуясь условиями 1), 2), нетрудно доказать, что каждая компонента связности графа $G(\alpha,\beta)$ имеет один из следующих видов:

(I_k) $K = \{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k\}$, причём $x_1\alpha = y_1$, $x_k\alpha = y_k$, $x_2\beta = y_1$, $x_k\beta = y_{k-1}$ (рис. 1). Здесь k — любое натуральное число. При $k=1$ имеем $K = \{x_1,y_1\}$, $x_1\alpha = x_1\beta = y_1$.

(II_k) $K = \{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_{k+1}\}$, $k \in \mathbb{N}$, причём $x_i\alpha = y_i$, $x_i\beta = y_{i+1}$, $i = 1,2,\ldots,k$ (рис. 2).

(III_k) $K = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,y_1,y_2,y_3,\ldots\}$, где $x_i\alpha = y_i$, $x_i\beta = y_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$ (рис. 3).

(IV_k) $K = \{x_1,x_2,x_3,\ldots,y_0,y_1,y_2,\ldots\}$, где $x_i\alpha = y_i$, $x_i\beta = y_{i-1}$, $i \in \mathbb{N}$ (рис. 4).

(V_k) $K = \{\ldots,x_{-1},x_0,x_1,x_2,\ldots,y_{-1},,y_0,y_1,y_2,\ldots\}$, где $x_i\alpha = y_i$, $x_i\beta = y_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$ (рис. 5).

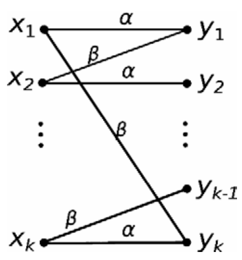

Рис. 1

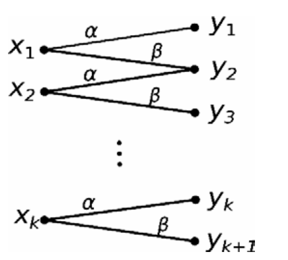

Рис. 2

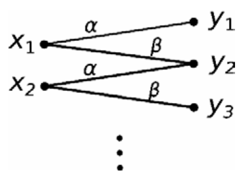

Рис. 3

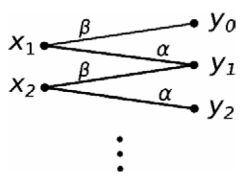

Рис. 4

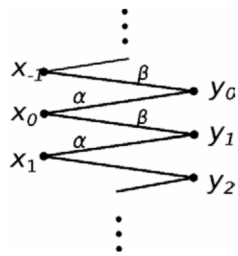

Рис. 5

Нетрудно заметить, что каждая возможная компонента связности конечна или счётна и всего возможных компонент связности счётное число. Поэтому можно построить два инъективных отображения $\alpha,\beta\colon P \to Q$, где P, Q — счётные множества, и двудольный граф Γ, такой что его компоненты связности — это все возможные попарно неэквивалентные компоненты связности, по одной штуке. Назовём граф Γ *универсальным графом*.

Теорема 1. *Существует сократимая справа полугруппа S, у которой диагональный биполигон ${}_S(S\times S)_S$ циклический.*

Доказательство. Возьмём произвольное счётное множество X и разобьём его на счётные непересекающиеся подмножества X_i, Y_i:

$$X = X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1\cup Y_2\ldots .$$

Определим инъективные отображения $\alpha,\beta\colon X\to X$ так, чтобы для каждого $i\in\mathbb{N}$ ограничения $\alpha|_{X_i}$, $\beta|_{X_i}$ отображений α, β на множество X_i представляли собой отображения $X_i\to X_i$, а граф $G(\alpha|_{X_i},\beta|_{X_i})$ являлся универсальным графом Γ; ограничения α, β на множество $Y_1\cup Y_2\ldots$ — произвольные инъективные отображения $Y_1\cup Y_2\ldots\to Y_1$.

Пусть S_1 — полугруппа, порождённая отображениями α и β. Ясно, что

$$\operatorname{im}\varphi\subseteq X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1$$

для каждого $\varphi\in S_1$. Возьмём любые $\varphi,\psi\in S_1$. Граф $G(\alpha,\beta)$ разбивается на некоторое (не более чем счётное) число компонент связности. Рассмотрим произвольную компоненту $K=K_i$. В графе $G(\alpha|_{X_i},\beta|_{X_i})$, являющемся универсальным, существует компонента K, соответствующая K_i. Пусть, например, K — компонента типа I_k. Тогда $K=\{x_1,\ldots,x_k,y_1,\ldots,y_k\}$, $x_i\varphi=y_i$, $x_1\psi=y_k$, $x_i\psi=y_{i-1}$ при $i=1,2,\ldots,k$. Здесь $x_1,\ldots,x_k\in X$, $y_1,\ldots,y_k\in X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1$. Соответствующей компонентой будет $K'=\{u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k\}$, причём $u_i\alpha=v_i$ при $i=1,2,\ldots,k$ и $u_1,\ldots,u_k,v_1,\ldots,v_k\in X_i$. Определим отображения γ_k и δ_k следующим образом: $x_i\gamma_k=u_i$, $v_i\delta_k=y_i$. Отображение γ_k определено на множестве $\{x_1,\ldots,x_k\}$, а образом отображения δ_k является $\{y_1,\ldots,y_k\}$. Для компонент другого вида отображения γ_k и δ_k строятся аналогичным образом. Если взять объединение всех γ_k, то мы получим инъективное отображение $\gamma\colon X\to X_1\cup X_2\cup\ldots$, а объединение всех δ_k даст инъективное отображение $\delta'\colon X\to X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1$. Отображение можно продолжить до инъективного отображения $\delta\colon X\to X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1\cup Y_2$. Нетрудно убедиться, что $\gamma\alpha\delta=\varphi$, $\gamma\beta\delta=\psi$. Итак, для каждой пары $\varphi,\psi\in S_1$ можно найти такие γ, δ, что

$$\gamma(\alpha,\beta)\delta=(\varphi,\psi)$$

и

$$\operatorname{im}\gamma,\ \operatorname{im}\delta\subseteq X\to X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1\cup Y_2.$$

Пусть S_2 — полугруппа, порождённая отображениями из S_1, а также всеми отображениями γ, δ для каждой пары $\varphi,\psi\in S_1$. Аналогичными рассуждениями можно показать, что для любых $\varphi,\psi\in S_2$ найдутся инъективные отображения γ, δ, такие что

$$\gamma(\alpha,\beta)\delta=(\varphi,\psi)$$

и

$$\operatorname{im}\gamma,\ \operatorname{im}\delta\subseteq X\to X_1\cup X_2\cup\ldots\cup Y_1\cup Y_2\cup Y_3.$$

Этот процесс построения полугруппы $S_1 \subseteq S_2 \subseteq S_3 \subseteq S_4 \subseteq \dots$ можно продолжать неограниченно. Пусть

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n.$$

Покажем, что для любых $\varphi, \psi \in S$ найдутся $\gamma, \delta \in S$, такие что $\gamma(\alpha,\beta)\delta = (\varphi,\psi)$. Действительно, так как $\varphi, \psi \in S$, то $\varphi, \psi \in S_i$ при некотором i, поэтому $\gamma(\alpha,\beta)\delta = (\varphi,\psi)$ при некоторых $\gamma, \delta \in S_{i+1}$. Эти рассуждения показывают, что $S(\alpha,\beta)S = S\times S$, поэтому диагональный биполигон полугруппы S циклический. Так как полугруппа S состоит из инъективных отображений, то она сократима справа. $\square$

Назовём *правым диагональным полигоном порядка* n полигон

$$\bigl(\underbrace{S\times\ldots\times S}_{n}\bigr)_S.$$

Назовём *левым диагональным полигоном порядка* n полигон

$${}_S\bigl(\underbrace{S\times\ldots\times S}_{n}\bigr).$$

Диагональным биполигоном порядка n называется биполигон

$${}_S\bigl(\underbrace{S\times\ldots\times S}_{n}\bigr)_S.$$

В [1, лемма 7.9] было доказано, что если правый (левый) диагональный полигон над S циклический, то правый (левый) полигон порядка n при $n > 2$ также циклический. Далее мы показываем, что это свойство не выполняется для биполигонов.

Теорема 2. *Любая полугруппа S изоморфно вкладывается в такую полугруппу T, что диагональный биполигон ${}_T(T\times T)_T$ циклический, а диагональный биполигон третьего порядка ${}_T(T\times T\times T)_T$ не является конечно порождённым.*

Доказательство. Пусть S — произвольная полугруппа и $a, b \in S$ — различные элементы. Для каждой пары $(c,d) \in S\times S$ введём элементы $x_1(c,d), y_1(c,d) \notin S$. Обозначим через S_1 полугруппу, порождённую элементами из S и элементами $x_1(c,d)$, $y_1(c,d)$, заданными для каждой пары $(c,d) \in S\times S$ определяющими соотношениями следующих видов:

а) все соотношения, выполняющиеся в S,

б) $x_1(c,d)ay_1(c,d) = c$, $x_1(c,d)by_1(c,d) = d$.

Проверим, что при построении полугруппы S_1 различные элементы полугруппы S не будут отождествлены. Действительно, S_1 можно рассматривать как фактор-полугруппу $(S*F)/\rho$, где $S*F$ — свободное произведение полугруппы S и свободной полугруппы F со свободными образующими $x_1(c,d)$, $y_1(c,d)$ $(c,d\in S)$, а ρ — конгруэнция, порождённая парами $\bigl(c, x_1(c,d)ay_1(c,d)\bigr)$,

$\big(d, x_1(c,d)by_1(c,d)\big)$ $(c, d \in S)$. Пусть $p, q \in S$ и $(p,q) \in \rho$. Тогда имеет место следующая цепочка равенств:

$$\begin{aligned} p = s_1u_1t_1&,\\ s_1v_1t_1 = s_2u_2t_2&,\\ s_2v_2t_2 = s_3u_3t_3&,\\ \ldots&\\ s_{n-1}v_{n-1}t_{n-1} = s_nu_nt_n&,\\ s_nv_nt_n = q&, \end{aligned}$$

где $s_i, t_i \in S^1$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, $\{u_i, v_i\} = \{c_i, x_1(c_i,d_i)ay_1(c_i,d_i)\}$ или $\{u_i, v_i\} = \{d_i, x_1(c_i,d_i)ay_1(c_i,d_i)\}$ при подходящих $c_i, d_i \in S$. Так как $p \in S$, то $u_1 \in S$, поэтому $v_1 \in S_1 \setminus S$. Отсюда следует, что $u_2 \in S$, а значит, $v_2 \in S_1 \setminus S$. Ясно, что далее мы получим $u_3 \in S$, $v_3 \in S_1 \setminus S, \ldots$, $u_n \in S$, $v_n \in S_1 \setminus S$. Таким образом, $q \in S_1 \setminus S$, что противоречит условию.

Итак, элементы из S не «склеиваются» при переходе к фактор-полугруппе $(S{*}F)/\rho$, следовательно, мы можем считать, что S_1 — расширение полугруппы S.

Пусть построена полугруппа S_k. Построим полугруппу $S_{k+1} = (S_k * F_k)/\rho_k$, которая порождается элементами из S_k и элементами $x_{k+1}(c,d)$, $y_{k+1}(c,d)$ для $c, d \in S_k$, где определяющие соотношения — все соотношения полугруппы S_k и соотношения

$$x_{k+1}(c,d)ay_{k+1}(c,d) = c, \tag{1}$$
$$x_{k+1}(c,d)by_{k+1}(c,d) = d \tag{2}$$

для $c, d \in S_k$. Рассуждения, аналогичные предыдущим, показывают, что $S_1 \subset S_2$. Этот процесс будем продолжать неограниченно. Получим, что $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$. Положим $T = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Так как $(S_{n+1})^1 \cdot (a,b) \cdot (S_{n+1})^1 = S_n \times S_n$, то $T^1 \cdot (a,b) \cdot T^1 = T \times T$. Таким образом, диагональный биполигон ${}_T(T \times T)_T$ циклический.

Докажем теперь, что биполигон ${}_T(T{\times}T{\times}T)_T$ не является конечно порождённым. Предположим противное. Пусть $\Sigma = \{(u_1,v_1,w_1), \ldots, (u_m,v_m,w_m)\}$ — система образующих биполигона ${}_T(T \times T \times T)_T$. Тогда можно найти такое $n \in \mathbb{N}$, что $u_1, v_1, w_1, \ldots, u_m, v_m, w_m \in S_n$. Так как Σ — порождающее множество биполигона ${}_T(T{\times}T{\times}T)_T$, то $\big(a, b, x_{n+1}(a,b)\big) = s(u_i, v_i, w_i)t$ при некоторых $s, t \in T^1$ и $i \leqslant m$. Для сокращения записи будем опускать индексы у образующих элементов. Итак, мы имеем

$$s \cdot (u,v,w) \cdot t = \big(a, b, x_{n+1}(a,b)\big)$$

при некоторых $s, t \in T^1$ и $u, v, w \in S_n$. Так как $x_{n+1}(a,b) \notin S_n$, то либо $s \notin S_n$, либо $t \notin S_n$. Пусть j — наименьший индекс, такой что $s, t \in S_j \cup \{1\}$. Так как $x_{n+1}(a,b) \notin S_n$, то $j > n$.

Из построения полугруппы S_j понятно, что элементы s и t могут быть представлены в виде

$$s = g_0 z_1 g_1 z_2 \dots g_{k-1} z_k g_k, \tag{3}$$
$$t = g_0' z_1' g_1' z_2' \dots g_{l-1}' z_l' g_l', \tag{4}$$

где $g_0, g_1 \dots g_k, g_0', g_1', \dots, g_l' \in S_{j-1} \cup \{1\}$, а элементы z_i, z_i' имеют вид $x_j(c,d)$ или $y_j(c,d)$. Если $s = 1$ или $t = 1$, то правая часть в (3) или (4) является пустым словом. Можно считать, что представления (3), (4) были выбраны так, что сумма $k + l$ минимальна.

Имеем

$$g_0 z_1 g_1 z_2 \dots g_{k-1} z_k g_k u g_0' z_1' g_1' z_2' \dots g_{l-1}' z_l' g_l' = a, \tag{5}$$
$$g_0 z_1 g_1 z_2 \dots g_{k-1} z_k g_k v g_0' z_1' g_1' z_2' \dots g_{l-1}' z_l' g_l' = b, \tag{6}$$
$$g_0 z_1 g_1 z_2 \dots g_{k-1} z_k g_k w g_0' z_1' g_1' z_2' \dots g_{l-1}' z_l' g_l' = x_{n+1}(a,b). \tag{7}$$

Так как правая часть в (5) равна a, то для получения a к левой части равенства (5) должны быть применены правила (1) или (2) (где вместо k взято $j - 1$). Если правило (1) или (2) применяется к выражениям вида $z_i g_i z_{i+1}$, т. е. $z_i = x_j(p,q)$, $z_{i+1} = y_j(p,q)$, $g_i \in \{a,b\}$, то вместо $z_i g_i z_{i+1}$ получится p (при $g_i = a$) или q (при $g_i = b$) и равенства (5)—(7) перепишутся с меньшим значением $k{+}l$ — противоречие. Аналогично получается противоречие, если правила (1), (2) могут быть применены к выражениям вида $z_i' g_i' z_{i+1}'$. Следовательно, к выражениям вида $z_i g_i z_{i+1}$ и $z_i' g_i' z_{i+1}'$ правила (1) и (2) в (5)—(7) неприменимы. Отсюда следует, что эти правила обязательно должны применяться в (5)—(7) к выражениям $z_k g_k u g_0' z_1'$, $z_k g_k v g_0' z_1'$, $z_k g_k w g_0' z_1'$. Тогда должно выполняться соотношение $g_k u g_0', g_k v g_0', g_k w g_0' \in \{a,b\}$, а значит, какие-то из элементов $g_k u g_0'$, $g_k v g_0'$, $g_k w g_0'$ совпадают друг с другом. Из равенств (5)—(7) теперь следует, что какие-то из элементов a, b, $x_{n+1}(a,b)$ равны друг другу, а это невозможно. Полученное противоречие завершает доказательство теоремы. □

Литература

[1] Gallagher P. On the finite and non-finite generation of diagonal acts // Commun. Algebra. — 2006. — Vol. 34. — P. 3123—3137.

[2] Gallagher P., Ruškuc N. Generation of diagonal acts of some semigroups of transformations and relations // Bull. Austral. Math. Soc. — 2005. — Vol. 72. — P. 139—146.

[3] Kilp M., Knauer U., Mikhalev A. V. Monoids, Acts and Categories. — Berlin: Walter de Gruyter, 2000.