

Коразмерности тождеств алгебр с присоединённой единицей

О. Е. БЕЗУЩАК

*Киевский национальный университет
им. Т. Г. Шевченко, Украина
e-mail: bezusch@univ.kiev.ua*

А. А. БЕЛЯЕВ

*Российский государственный
торгово-экономический университет
e-mail: al-al-belyaev@mail.ru*

М. В. ЗАЙЦЕВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
e-mail: zaicevmv@mail.ru*

УДК 512.554

Ключевые слова: тождества, коразмерности, экспоненциальный рост, присоединённая единица.

Аннотация

В работе изучаются числовые характеристики тождеств конечномерных неассоциативных алгебр. Основное внимание уделяется вопросу об изменении PI-экспоненты при присоединении внешней единицы. Построен пример четырёхмерной простой алгебры, присоединение единицы к которой увеличивает PI-экспоненту на 1.

Abstract

O. E. Bezushchak, A. A. Beljaev, M. V. Zaicev, Codimension growth of algebras with adjoint unit, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 11–26.

In this paper, numerical characteristics of identities of finite-dimensional nonassociative algebras are studied. Main attention is paid to the question of the change of the PI-exponent after adjoining an external unital element. We construct an example of a four-dimensional simple algebra such that its PI-exponent increases by one after adjoining an external unity.

1. Введение

В статье исследуются числовые характеристики тождеств конечномерных неассоциативных алгебр. Все необходимые сведения о тождествах линейных алгебр и связанных с ними числовых характеристиках можно найти в [1, 16].

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 11–26.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

С каждой алгеброй A над полем нулевой характеристики можно связать целочисленную последовательность $\{c_n(A)\}$, $n = 1, 2, \dots$, называемую последовательностью коразмерностей тождеств алгебры A . В общем случае последовательность $\{c_n(A)\}$ может иметь сверхэкспоненциальный рост, но для большого класса алгебр она ограничена экспоненциальной функцией от n . К этому классу относятся все ассоциативные PI-алгебры, конечномерные алгебры любой сигнатуры, бесконечномерные простые алгебры Ли картановского типа, алгебры Каца—Мули и многие другие. Например, если A конечномерна, $\dim A = d < \infty$, то $\{c_n(A)\} \leq d^{n+1}$ (см. [19]). В случае экспоненциального роста коразмерностей последовательность $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}$ является ограниченной и имеет верхний и нижний пределы, называемые верхней и нижней PI-экспонентами A соответственно. Если верхний и нижний пределы совпадают, то у последовательности $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}$ есть обычный предел, называемый экспонентой или PI-экспонентой A .

Одной из основных проблем в теории числовых инвариантов тождеств линейных алгебр является вопрос о существовании и возможных диапазонах значений PI-экспонент. В 80-х годах прошлого века С. А. Амицур выдвинул гипотезу о существовании и целочисленности PI-экспоненты любой (а не только конечномерной) ассоциативной PI-алгебры. Эта гипотеза была подтверждена в работах [14, 15]. Позднее гипотеза Амицура подтвердилась и для широкого класса других конечномерных алгебр: лиевских [7], йордановых, альтернативных и некоторых других [13]. Тем не менее уже в классе супералгебр Ли построены примеры конечномерных алгебр с дробной PI-экспонентой [20]. Отметим также, что в общем случае для любого $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 1$, существуют алгебры с $\exp(A) = \alpha$ [12]. Кроме того, к настоящему времени не известно ни одного примера, когда $\overline{\exp(A)} \neq \underline{\exp(A)}$. Достаточно новым направлением является исследование взаимосвязи PI-экспонент различных типов тождеств (ассоциативных, лиевских, инволютивных, собственных), а также вопрос об изменении PI-экспоненты при присоединении к алгебре внешней единицы. Первые результаты в данном направлении были получены в [17, 18]. Позднее эти результаты были уточнены в [3] для случая групповых колец конечных групп.

В данной работе основное внимание уделяется алгебрам с единицей, в частности вопросу об изменении PI-экспоненты при присоединении внешней единицы. Из результатов [14, 15] легко выводится, что в ассоциативном случае при присоединении внешней единицы PI-экспонента либо не изменяется, либо увеличивается на 1. Для неассоциативных алгебр эти вопросы впервые были рассмотрены в [8, 9]. В [8], в частности, построен первый и единственный к настоящему времени пример конечномерной алгебры A , для которой точно вычислены экспоненты как самой алгебры A , так и полученной из неё присоединением внешней единицы алгебры $A^\#$. Оказалось, что

$$\exp(A) = \frac{3}{\sqrt[4]{4}}, \quad \exp(A^\#) = \frac{3}{\sqrt[4]{4}} + 1.$$

В [2] было также отмечено, что если сама алгебра A обладает единицей, то $\exp(A^\#) = \exp(A)$. В связи с этим в [8] был поставлен вопрос: верно ли что

присоединение единицы всегда либо не изменяет PI-экспоненту, либо увеличивает её на 1?

Основная цель данной работы — построение ещё одного примера, на этот раз четырёхмерной простой алгебры W , для которой $\exp(W^\sharp) = \exp(W) + 1$. Отметим, что результат был анонсирован в [2].

2. Основные понятия и конструкции

На протяжении всей статьи F означает поле нулевой характеристики и все алгебры рассматриваются над F . При этом мы будем придерживаться соглашения, что в левонормированном произведении скобки опускаются, т. е. $abc = (ab)c$. Обозначим через $F\{X\}$ свободную неассоциативную алгебру над F с бесконечным множеством порождающих X . Для краткости все элементы $F\{X\}$ будем называть многочленами, а элементы X — переменными. Напомним, что многочлен $f = f(x_1, \dots, x_n)$ называют тождеством алгебры A , если $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ для любых $a_1, \dots, a_n \in A$. Все необходимые сведения по теории тождественных соотношений в алгебрах можно найти в [1, 6, 16]. Совокупность всех тождеств $\text{Id}(A)$ алгебры A образует двусторонний идеал в $F\{X\}$. Если обозначить через P_n пространство всех полилинейных многочленов от $x_1, \dots, x_n$ в $F\{X\}$, то $P_n \cap \text{Id}(A)$ — это пространство всех полилинейных тождеств A от n переменных.

Обозначим также через $P_n(A)$ фактор-пространство

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}.$$

Тогда n -коразмерностью тождеств алгебры A называется

$$c_n(A) = \dim P_n(A).$$

Последовательность $\{c_n(A)\}$, $n = 1, 2, \dots$, может иметь сверхэкспоненциальный рост. Тем не менее для широкого класса алгебр $\{c_n(A)\}$ растёт не быстрее a^n для некоторого $a \in \mathbb{R}$. Например, если $\dim A = d < \infty$, то $c_n(A) \leq d^{n+1}$ (см. [10, 19]). Если $c_n(A) \leq a^n$ для всех $n = 1, 2, \dots$, то можно рассмотреть ограниченную последовательность $\sqrt[n]{c_n(A)}$. Её нижний (верхний) предел называется нижней (соответственно верхней) PI-экспонентой алгебры A :

$$\overline{\exp}(A) = \varlimsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \underline{\exp}(A) = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

В случае когда верхний и нижний пределы совпадают, т. е. существует обычный предел, его называют экспонентой (или PI-экспонентой) алгебры A :

$$\exp(A) = \overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A).$$

Важным инструментом в изучении роста коразмерностей является теория представлений симметрических групп. Все необходимые сведения по теории

представлений симметрических групп можно найти в [5]. Группа S_n действует на P_n естественным образом как

$$\sigma f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

При этом $P_n \cap \text{Id}(A)$ — инвариантное подпространство относительно этого действия, и следовательно, фактор-пространство $P_n(A)$ также наделено структурой FS_n -модуля. Напомним, что неизоморфные неприводимые S_n -представления параметризуются всевозможными разбиениями $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ числа n . Разложение $P_n(A)$ в сумму неприводимых FS_n -модулей удобно записывать в терминах характеров.

Характер $\chi_n(A) = \chi(P_n(A))$ называют n -м кохарактером A . Пусть

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \quad (1)$$

разложение на неприводимые характеры, где χ_λ — характер неприводимого представления S_n , соответствующего разбиению λ , а неотрицательное целое число m_λ — его кратность в $\chi_n(A)$. Обозначим через $d_\lambda = \deg \chi_\lambda = \chi_\lambda(1)$ размерность неприводимого S_n -модуля с характером χ_λ . Ясно, что

$$c_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda. \quad (2)$$

Если кодлина

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda,$$

т. е. количество неприводимых компонент в $P_n(A)$, растёт не быстрее полиномиальной функции, как, например, в случае конечномерных алгебр (см. [11]), то ключевую роль в асимптотике $c_n(A)$ играют максимальные размерности d_λ с ненулевыми кратностями m_λ в (1). Мы выразим этот факт более точно в несколько иных терминах.

Хорошо известно (см., например, [16]), что если $\dim A = d < \infty$, то кохарактер $\chi_n(A)$ лежит в полосе ширины d , т. е. $m_\lambda \neq 0$ в (1), только если $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$ с $k \leq d$. Мы свяжем с λ ещё одну характеристику, близкую к d_λ .

Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_k > 0$, где $k \leq d$. Если $k \neq d$, то для удобства положим $\lambda_{k+1} = \dots = \lambda_d = 0$. Рассмотрим функцию

$$\Phi(\lambda) = \frac{1}{\left(\frac{\lambda_1}{n}\right)^{\lambda_1/n} \dots \left(\frac{\lambda_d}{n}\right)^{\lambda_d/n}}.$$

Здесь мы полагаем $0^0 = 1$, если $\lambda_i = 0$. Связь $\Phi(\lambda)$ с d_λ задаётся следующей формулой.

Лемма 1 [20, лемма 1]. Пусть $n \geq 100$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, где $k \leq d$. Тогда

$$\frac{1}{n^{d^2+d}} \Phi(\lambda)^n \leq d_\lambda \leq n \Phi(\lambda)^n.$$

Для конечномерных алгебр лемма 1 даёт следующие оценки для коразмерностей. Обозначим через $\Phi(\lambda)_{\max}^{(n)}$ максимальное значение $\Phi(\lambda)$ по всем $\lambda \vdash n$, у которых $m_\lambda \neq 0$ в разложении (1).

Лемма 2 [9]. Пусть $n \geq 100$ и $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$, где $k \leq d$. Тогда

$$\frac{1}{n^{d^2+d}} (\Phi(\lambda)_{\max}^{(n)})^n \leq (n+1)^{d^2+d+1} (\Phi(\lambda)_{\max}^{(n)})^n$$

для всех $n \geq 100d$.

Мы будем использовать следующее свойство функции $\Phi(\lambda)$. Напомним, что каждому разбиению $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_k)$ соответствует диаграмма D_ν , т. е. таблица из n клеток, содержащая k строк, причём первая строка содержит ν_1 клеток, вторая ν_2 клеток и т. д. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ и $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_d)$ — два разбиения числа n . Мы говорим, что диаграмма D_μ получена из D_λ выталкиванием одной клетки вниз, если найдутся такие целые $1 \leq i < j \leq d$, что $\lambda_i = \mu_i + 1$, $\lambda_j = \mu_j - 1$, а все остальные λ_k и μ_k совпадают, т. е. i -я строка у D_λ на одну клетку длиннее, чем у D_μ , j -я строка у D_λ на одну клетку короче, чем у D_μ , а остальные имеют одинаковую длину.

Лемма 3 [19, лемма 3]. Пусть диаграмма Юнга D_μ разбиения μ получена из диаграммы D_λ разбиения λ выталкиванием одной клетки вниз. Тогда $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$.

Кроме того, нам понадобится следующий результат.

Лемма 4 [9, лемма 7]. Пусть $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d) \vdash n-1$ и $\nu' = (\nu'_1, \dots, \nu'_d) \vdash n$, причём диаграмма Юнга $D_{\nu'}$ получена из диаграммы D_ν добавлением одной клетки. Тогда

$$\Phi(\nu) \leq n^{(d^2+d+2)/n} \Phi(\nu').$$

3. Коразмерности четырёхмерной простой алгебры

В данном разделе мы исследуем асимптотику коразмерностей одной неассоциативной простой алгебры размерности 4. Эта алгебра, как и четырёхмерная алгебра из [9], является отдалённым аналогом бесконечномерной простой алгебры Ли картановского типа W_1 .

Пусть W — четырёхмерное пространство над F с базисом e_{-1}, e_0, e_1, e_2 . Зададим на W умножение с помощью системы соотношений

$$e_i e_j = e_{i+j}, \quad \text{если } i \leq j \text{ и } -1 \leq i+j \leq 2, \quad (3)$$

и

$$e_i e_j = e_{i+j} \quad \text{во всех остальных случаях.} \quad (4)$$

Нетрудно заметить, что W — простая алгебра, и согласно [13] её PI-экспонента существует. Мы покажем, что $\exp(W)$ равна максимальному значению функции

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3} x_4^{x_4}}$$

на некоторой компактной области в $\mathbb{R}$, и приведём её приближённое значение.

Заметим сначала, что W является $\mathbb{Z}$ -градуированной алгеброй,

$$W = W_{-1} \oplus W_0 \oplus W_1 \oplus W_2,$$

где $W_i = \langle e_i \rangle$, $-1 \leq i \leq 2$. Любой элемент $a \in W_i$ будем называть однородным степени i , $\deg a = i$. Рассмотрим n -й кохарактер W :

$$\chi_n(W) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (5)$$

Лемма 5. Если кратность m_λ неприводимого характера χ_λ в (5) не равна нулю, то

$$\begin{cases} \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 - 2\lambda_4 + 2 \geq 0. \end{cases} \quad (6)$$

Доказательство. Первое замечание означает, что кохарактер лежит в полосе ширины 4. Это известное свойство уже отмечалось в предыдущем разделе. Докажем второе соотношение в (6).

Напомним строение неприводимых FS_n -подмодулей в самом групповом кольце FS_n и в $P_n \subset F\{X\}$. Пусть $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k) \vdash n$ и D_λ — соответствующая диаграмма Юнга. Таблицей Юнга T_λ называется диаграмма D_λ , в клетки которой вписаны числа $1, \dots, n$ в произвольном порядке. Стабилизатором строк R_{T_λ} называют подгруппу в S_n , переставляющую числа только в пределах строк, а стабилизатором столбцов C_{T_λ} — подгруппу в S_n , переставляющую числа в пределах столбцов. Тогда элемент группового кольца

$$e_{T_\lambda} = R(T_\lambda)C(T_\lambda),$$

где

$$R(T_\lambda) = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma, \quad C(T_\lambda) = \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} \text{sgn}(\tau) \tau,$$

является квазиидемпотентом (т. е. $e_{T_\lambda}^2 = \alpha e_{T_\lambda}$, $0 \neq \alpha \in F$) и порождает минимальный левый идеал в FS_n . Если M — неприводимый FS_n -подмодуль в P_n , не лежащий в $P_n \cap \text{Id}(W)$, с характером $\chi(M) = \chi_\lambda$, то M содержит полилинейный многочлен $f = f(x_1, \dots, x_n)$, такой что $e_{T_\lambda} f \neq 0$. Более того, $g = C(T_\lambda) e_{T_\lambda} f$ тоже ненулевой многочлен, поскольку $0 \neq \alpha e_{T_\lambda} = e_{T_\lambda}^2 = R(T_\lambda) C(T_\lambda) e_{T_\lambda}$. Другими словами, если $m_\lambda \neq 0$ в (5), то существует полилинейный многочлен $g = g(x_1, \dots, x_n) \notin \text{Id}(W)$ со следующими свойствами:

- множество переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$ разбивается в объединение s непересекающихся подмножеств $X_1 \cup \dots \cup X_s$, где s — число столбцов D_λ , т. е. $s = \lambda_1$;

- $|X_i| = r_i$, $1 \leq i \leq s$, где r_i — высота i -го столбца диаграммы D_λ ;
- g кососимметричен по переменным из X_i , $1 \leq i \leq s$.

Так как g не является тождеством W , то существует подстановка

$$\varphi: \{x_1, \dots, x_n\} \rightarrow \{e_{-1}, \dots, e_2\},$$

при которой $\varphi(g) \neq 0$. Если $x_\alpha, x_\beta \in X_i$ и $\varphi(x_\alpha) = \varphi(x_\beta)$, то $\varphi(g) = 0$ ввиду кососимметричности. Это значит, что вместо разных переменных из одного набора мы вынуждены подставлять разные базисные $e_j \in W$. Обозначим через $t = \deg \varphi(g)$ степень $\varphi(g)$ в $\mathbb{Z}$ -градуировке W . Тогда наименьшее значение t получается, если подставлять e_{-1} вместо переменных с номерами из первой строки T_λ , e_0 — вместо переменных второй строки и т. д. Другими словами,

$$t \geq -\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4.$$

Так как $\varphi(g) \neq 0$ и $W_k = 0$ в $\mathbb{Z}$ -градуировке для всех $k \geq 3$, то $t \leq 2$, т. е. $-\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4 \leq 2$, и лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение является непосредственным следствием лемм 2 и 5.

Лемма 6.

$$c_n(W) \leq (n+1)^{21} (\Phi'_{\max})^n,$$

где $\Phi'_{\max}$ — максимальное значение $\Phi(\lambda)$ по всем λ , удовлетворяющим условию (6).

На следующем шаге мы заменим неравенство в соотношении (6) и избавимся от двойки.

Лемма 7. Пусть $n \geq 400$. Тогда

$$c_n(W) \leq (n+2)^{22} (\Phi''_{\max})^n,$$

где $\Phi''_{\max}$ — максимальное значение $\Phi(\lambda)$ по всем $\lambda \vdash n_0$, удовлетворяющим условию

$$\begin{cases} \lambda_5 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_3 - 2\lambda_4 = 0, \end{cases} \quad (7)$$

где $n \leq n_0 \leq n+2$.

Доказательство. Введём понятие веса $\text{wt}(D_\lambda)$ диаграммы D_λ (при $\lambda_5 = 0$) следующим образом:

$$\text{wt}(D_\lambda) = -\lambda_1 + \lambda_3 + 2\lambda_4.$$

Тогда условие (6) означает, что $\text{wt}(D_\lambda) \leq 2$. Диаграмма D_λ для $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4)$ имеет вид

k	l	m	t

т. е. $\lambda = (k+l+m+t, k+l+m, k+l, k)$. При этом условие (6) для λ принимает вид $m+t-2k \geq -2$. Предположим, что $\Phi(\lambda) = \Phi'_{\max}$ из леммы 6. Покажем сначала, что $\text{wt}(D_\lambda) \geq -1$.

Рассмотрим сначала случай $\text{wt}(D_\lambda) < 0$.

Если $t \geq 2$, то, перебросив одну клетку из первой строки D_λ во вторую, получим диаграмму D_μ , для которой $\text{wt}(D_\mu) = \text{wt}(D_\lambda) + 1$, так как величина $m+t-2k$ уменьшилась на 1. При этом $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$ по лемме 3. Аналогично при перебрасывании одной клетки в D_λ из второй строки в третью или из третьей в четвёртую мы получим разбиение $\mu \vdash n$ с $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$, и $\text{wt}(D_\mu) = \text{wt}(D_\lambda) + 1$.

Предложенная процедура означает, что если $t \geq 2$, либо $m \geq 2$, либо $l \geq 2$, то из диаграммы D_λ можно получить диаграмму D_μ , для которой $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$ и $\text{wt}(D_\mu) = \text{wt}(D_\lambda) + 1$. Если же $t, m, l \leq 1$, то $l+m+t \leq 3$. Но тогда $4k > 300$, так как $n = 4k + 3l + 2m + t \geq 400$. Для такой диаграммы выполнено неравенство

$$\text{wt}(D_\lambda) = -m - t + 2k > 100.$$

Это означает, что для любой диаграммы Юнга D_λ с $\text{wt}(D_\lambda) < 0$ можно подобрать диаграмму D_μ с $\Phi(\mu) \geq \Phi(\lambda)$, для которой $\text{wt}(D_\mu) = 0$.

Пусть теперь $0 \leq \text{wt}(D_\lambda) \leq 2$. Если $\text{wt}(D_\lambda) = 0$, то условие (7) выполнено и всё доказано. Пусть $\text{wt}(D_\lambda) = 1$ или $\text{wt}(D_\lambda) = 2$. Добавляя одну или две клетки к верхней строке D_λ , мы получим диаграмму D_μ , для которой

$$\Phi(\lambda) \leq (n+2)^{42/n} \Phi(D_\mu)$$

по лемме 4. Поскольку $(n+2)^{42/n} < n+2$ при $n \geq 100$, а μ удовлетворяет условию (7), мы получаем утверждение леммы 7. $\square$

Из леммы 7 немедленно следует верхняя оценка роста коразмерностей W .

Предложение 1. $\overline{\text{exr}}(A) \leq \max \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, где $0 \leq x_1, \dots, x_4 \leq 1$,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3} x_4^{x_4}},$$

а максимум Φ берется по области

$$\begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

Теперь мы получим нижнюю оценку для коразмерностей $c_n(W)$.

Лемма 8. Пусть $\lambda = (k+l+m+t, k+l+m, k+l, k)$ — разбиение, у которого $m+t=2k$. Тогда $m_\lambda \neq 0$ в разложении (5).

Доказательство. Напомним (см. доказательство леммы 5), что любой неприводимый FS_n -подмодуль в $P_n(W)$ с характером χ_λ может быть порождён многочленом вида $C(T_\lambda)h$. Поэтому чтобы доказать лемму, достаточно построить полилинейный полином f степени n , зависящий от k кососимметричных наборов переменных $\{x_1^{(i)}, \dots, x_4^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq k$, l кососимметричных наборов

$\{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, y_3^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq l$, m кососимметричных наборов $\{z_1^{(i)}, z_2^{(i)}\}$, $1 \leq i \leq m$, и ещё t переменных $u_1^{(i)}$, $1 \leq i \leq t$, такой что после его симметризации по наборам $\{x_1^{i_1}, y_1^{i_2}, z_1^{i_3}, u_1^{i_4}\}$, $\{x_2^{i_1}, y_2^{i_2}, z_2^{i_3}\}$, $\{x_3^{i_1}, y_3^{i_2}\}$ и по $\{x_1^{i_4}\}$, где $1 \leq i_1 \leq k$, $1 \leq i_2 \leq l$, $1 \leq i_3 \leq m$, $1 \leq i_4 \leq t$, получается полином, не равный нулю тождественно в W .

Для обозначения кососимметричных наборов удобно помечать входящие в него переменные одним и тем же символом сверху. Например,

$$\begin{aligned}\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 &= \sum_{\sigma \in S_3} (\operatorname{sgn} \sigma) x_{\sigma(1)} x_{\sigma(2)} x_{\sigma(3)}, \\ \bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_2 &= a_1 b_1 a_2 b_2 - a_1 b_2 a_2 b_1 - a_2 b_1 a_1 b_2 + a_2 b_2 a_1 b_1, \\ (\bar{x} \bar{x})(\bar{y} \bar{y}) &= (xx)(yy) - (yx)(xy) - (xy)(yx) + (yy)(xx).\end{aligned}$$

Мы будем использовать данное соглашение и для элементов алгебры W , а не только для переменных. Например,

$$\begin{aligned}\bar{e}_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2) &= e_{-1}(\bar{e}_1 \bar{e}_2) - e_1(\bar{e}_{-1} \bar{e}_2) - e_2(\bar{e}_1 \bar{e}_{-1}) = \\ &= 0 - e_1(e_{-1} e_2) + e_2(e_{-1} e_1) = -e_1^2 + e_2 e_0 = -e_2 + e_2 = 0.\end{aligned}$$

Сначала построим выражение, кососимметричное по e_{-1} , e_0 , e_1 , e_2 и содержащее два дополнительных базисных элемента e_{-1} . Положим

$$f_0 = f_0(x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = \bar{x}_{-1} \bar{x}_0 \bar{x}_1 \bar{x}_2, \quad f_1 = x_{-1}(x_{-1} f_0).$$

Тогда

$$f_0(e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = -e_2, \quad f_1(e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = -e_{-1}(e_{-1} e_2) = -e_0.$$

Обозначим также

$$f_2 = (\tilde{x}_{-1}(\bar{x}_{-1} f_0)) \bar{x}_0 \tilde{x}_0, \quad f_3 = (x_{-1}(\bar{x}_{-1} f_0)) \bar{x}_0.$$

Тогда

$$f_2(e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = f_3(e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = -e_0.$$

Чтобы завершить построение соответствующего полинома, рассмотрим еще два соотношения. Положим

$$h_0 = h_0(x_1, x_2, x_3, y_1, y_2, y_3) = \tilde{y}_3(\bar{x}_1 \tilde{y}_1)(\bar{x}_2 \tilde{y}_2) \bar{x}_3.$$

Тогда

$$\begin{aligned}h_0(e_{-1}, e_0, e_1, e_{-1}, e_0, e_1) &= \tilde{e}_1(\bar{e}_{-1} \tilde{e}_{-1})(\bar{e}_0 \tilde{e}_0) \bar{e}_1 = e_{-1}(\bar{e}_{-1} \tilde{e}_0)(\bar{e}_0 \tilde{e}_1) e_1 = \\ &= e_{-1}(e_{-1} \tilde{e}_0)(e_0 \tilde{e}_1) e_1 - e_{-1}(e_0 \tilde{e}_0)(e_{-1} \tilde{e}_1) e_1 = \\ &= -e_{-1}(e_{-1} e_1)(e_0 e_0) e_1 - e_{-1}(e_0 e_0)(e_{-1} e_1) e_1 + e_{-1}(e_0 e_1)(e_{-1} e_0) e_1 = \\ &= -e_0 - e_0 = -2e_0.\end{aligned} \tag{8}$$

Обозначим

$$h(x_{-1}, x_0, x_1) = h_0(e_{-1}, e_0, e_1, e_{-1}, e_0, e_1).$$

Из (8) следует, что

$$h^a(e_{-1}, e_0, e_1) = (-2)^a e_0.$$

Нам также потребуется соотношение

$$(\bar{e}_{-1}e_0)(\bar{e}_0e_0)\bar{e}_1 = (\bar{e}_{-1}e_0)(\bar{e}_0e_0)e_1 = e_0. \quad (9)$$

Рассмотрим два варианта чётности m . Если $m = 2p$ — чётное число, то и $t = 2q$ чётное и $k = p + q$. В этом случае положим

$$g_0 = f_1^q f_2^p.$$

Если же $m = 2p + 1$ нечётное, то $t = 2q + 1$ тоже нечётное и $k = p + q + 1$. Тогда возьмём

$$g_0 = f_1^q f_2^p f_3.$$

Теперь при чётном $l = 2a$ положим

$$g_l = g_0 h^a.$$

При нечётном $l = 2a + 1$ заменим g_0 на g'_0 следующим образом. При достаточно больших n можно считать, что $p + q \geq 2$. При $p, q \geq 1$ обозначим

$$g'_0 = (\bar{x}_{-1}f_1^q)(\bar{x}_0f_2^p)\bar{x}_1,$$

если $m = 2p$, $t = 2q$, и

$$g'_0 = (\bar{x}_{-1}f_1^q)(\bar{x}_0f_2^p f_3)\bar{x}_1,$$

если $m = 2p + 1$, $t = 2q + 1$. Наконец, положим

$$g_l = g'_0 h^a.$$

Тогда согласно (9)

$$g_l(e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = \alpha e_0, \quad \alpha \neq 0,$$

т. е. g_l не является тождеством алгебры W . Кроме того, линеаризация g_l является симметризацией многочлена f степени n , в котором переменные разбиты на k кососимметричных наборов мощности 4, l кососимметричных наборов мощности 3, m кососимметричных наборов мощности 2 и имеется t неальтернированных переменных. Следовательно, f порождает в P_n модуль над FS_n с характером χ_λ и $f \notin \text{Id}(W)$.

В случае $p = 0$ мы положим

$$g'_0 = (\bar{x}_{-1}f_1^{q-1})(\bar{x}_0f_1)\bar{x}_1$$

или

$$g'_0 = (\bar{x}_{-1}f_1^q)(\bar{x}_0f_3)\bar{x}_1$$

в зависимости от чётности l . Тогда многочлен g_l строится так же, как и выше, а аналогичный полилинейный многочлен f обладает теми же свойствами. Случай $q = 0$ рассматривается аналогично. Значит, $m_\lambda \neq 0$, и лемма доказана. $\square$

Предложение 2. $\overline{\exp}(A) \leq \max \Phi(x, x_2, x_3, x_4)$, где $0 \leq x, \dots, x_4 \leq 1$,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3} x_4^{x_4}},$$

а максимум Φ берётся по области

$$\begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть точка $(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ — точка максимума функции $\Phi(x_1, \dots, x_4)$ в указанной области. Так как Φ непрерывна, для любого $\varepsilon > 0$ можно найти такие N и разбиение $\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l, k) \vdash N$, что $m + t = 2k$ и

$$|a - \Phi(\lambda)| < \varepsilon,$$

где $a = \Phi(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$. Тогда и для любого разбиения $\mu = (s\lambda_1, \dots, s\lambda_4)$ числа sN , $s = 1, 2, \dots$, мы имеем

$$|a - \Phi(\mu)| < \varepsilon, \quad (10)$$

поскольку $\Phi(\mu) = \Phi(\lambda)$. По леммам 1 и 8 из неравенства (10) следует, что

$$c_n(W) \geq \frac{1}{n^{20}} (a - \varepsilon)^n \quad (11)$$

для любого $n = sN$, $s = 1, 2, \dots$.

Пусть теперь $n = sN + j$, $0 < j < N$. Покажем сначала, что $c_m(W) \leq c_{m+1}(W)$ для любого $m \geq 1$. Если $m = 1$, то $c_1(W) = 1$, $c_2(W) = 2$ и утверждение очевидно.

Пусть $m \geq 2$ и $c_m(W) = t$. Тогда в $F\{X\}$ существуют t полилинейных одночленов $f_1, \dots, f_t$ от $x_1, \dots, x_m$, линейно независимых по модулю идеала тождеств $\text{Id}(W)$ алгебры W . Для любого $k = 1, \dots, t$ обозначим

$$g_g = g_k(x_1, \dots, x_m, y) = \sum_{j=1}^m f(x_1, \dots, yx_j, \dots, x_m)$$

и покажем, что $g_1, \dots, g_k$ линейно независимы по модулю $\text{Id}(W)$.

Пусть $\lambda_1, \dots, \lambda_t \in F$ и

$$g = g(x_1, \dots, x_m, y) = \sum_k \lambda_k g_k.$$

Так как $\lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_t f_t$ не является тождеством W , если хотя бы один из коэффициентов λ_i ненулевой, то существуют такие $i_1, \dots, i_m \in \{1, 2, 3, 4\}$, что $\bar{f} = f(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}) \neq 0$.

Рассмотрим значение $g(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_0)$. Поскольку $e_0 e_j = e_j$ для любого $j \geq 0$ и $e_0 e_{-1} = 0$, то $g_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_0) = q f_k(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$, где q — количество

неотрицательных индексов среди $i_1, \dots, i_m$. Следовательно, $g(e_{i_1}, \dots, e_{i_m}, e_0) = qf(e_{i_1}, \dots, e_{i_m})$. Если все $i_1, \dots, i_m$ равны -1 , то $f = 0$, противоречие. Поэтому $q > 0$ и g не является тождеством W . В частности, $c_m(W) \leq c_{m+1}(W)$ для любого $m \geq 1$. Поэтому согласно (11)

$$c_n(W) \geq c_{sN}(W) \geq \frac{1}{(sN)^{20}}(a - \varepsilon)^{sN} \geq \frac{1}{n^{20}} \frac{1}{(a - \varepsilon)^N} (a - \varepsilon)^n.$$

Последнее неравенство выполняется при всех малых ε , поскольку $a \geq 3$ (например, $\Phi(1/3, 1/3, 1/3, 0) = 3$). Поэтому

$$c_n(W) \geq (a - 2\varepsilon)^n$$

для всех достаточно больших n , и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(W)} \geq a - 2\varepsilon$$

для любого $\varepsilon > 0$. Следовательно,

$$\exp(W) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n(W)} = a,$$

и предложение доказано. $\square$

Предложения 1 и 2 дают следующее утверждение.

Теорема 1. *PI-экспонента четырёхмерной простой алгебры W существует и равна максимуму функции*

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{1}{x_1^{x_1} x_2^{x_2} x_3^{x_3} x_4^{x_4}}$$

по области

$$\begin{cases} x_1 \geq x_2 \geq x_3 \geq x_4 \geq 0, \\ x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 1, \\ x_1 - x_3 = 2x_4. \end{cases}$$

В частности, $\exp(W) \approx 3,610718614$.

Доказательство. Существование PI-экспоненты W — непосредственное следствие предложений 1 и 2. Максимум функции Φ в рассматриваемой области, дающий указанную оценку, был приближённо вычислен в [4]. Теорема доказана. $\square$

4. Алгебра с присоединённой единицей

Пусть теперь $W^\#$ — алгебра, полученная из W присоединением внешней единицы, которую мы будем обозначать 1. Тогда $W^\# = \langle 1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2 \rangle$ и умножение в $W^\#$ полностью задаётся соотношениями 3, (4). Рассмотрим кохарактер $W^\#$:

$$\chi_n(W^\#) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda. \quad (12)$$

Заметим, что $W^\#$ также наделена $\mathbb{Z}$ -градуировкой,

$$W^\# = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}} W_i^\#,$$

где

$$W_{-1}^\# = \langle e_{-1} \rangle, \quad W_0^\# = \langle e_0, 1 \rangle, \quad W_1^\# = \langle e_1 \rangle, \quad W_2^\# = \langle e_2 \rangle,$$

а все остальные компоненты W_j , $j \notin \{-1, \dots, 2\}$, равны нулю.

Повторяя с минимальными модификациями рассуждения леммы 5, получаем следующее ограничение на кохарактер (13).

Лемма 9. Если кратность m_λ неприводимого характера χ_λ в (12) не равна нулю, то

$$\begin{cases} \lambda_6 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_4 - 2\lambda_5 + 2 \geq 0. \end{cases} \quad (13)$$

Утверждение означает, что λ имеет диаграмму Юнга вида

k	l	m	s	t

и $m + s + t + 2 \geq 0$.

Аналогично леммам 6 и 7 доказывается следующее утверждение.

Лемма 10. Пусть $n \geq 100$. Тогда

$$c_n(W^\#) \leq f(n)(\Phi_{\max})^n$$

для некоторого полинома $f(n)$, где $\Phi_{\max}$ — максимальное значение $\Phi(\lambda)$ по всем $\lambda \vdash n_0$, удовлетворяющим условию

$$\begin{cases} \lambda_6 = 0, \\ \lambda_1 - \lambda_4 - 2\lambda_5 = 0 \end{cases} \quad (14)$$

и $n \leq n_0 \leq n + 2$.

Как следствие леммы 10 получаем верхнюю оценку роста коразмерностей $c_n(W^\#)$.

Предложение 3. $\overline{\text{exr}}(W^\#) \leq \max \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $0 \leq x_1, \dots, x_4 \leq 1$,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{x_1^{x_1} \dots x_5^{x_5}},$$

а максимум Φ берётся по области

$$\begin{cases} x_1 \geq \dots \geq x_5 \geq 0, \\ x_1 + \dots + x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 = 2x_5. \end{cases} \quad (15)$$

Для получения нижней оценки нам потребуется реализация в $\chi_n(W^\#)$ разбиений с условием (14).

Лемма 11. Пусть $\lambda = (k + l + m + t, k + l + m, k + l + m, k + l, k)$ — разбиение, у которого $m + t = 2k$. Тогда $m_\lambda \neq 0$ в разложении (13).

Доказательство. Идея доказательства леммы 11 аналогична идее доказательства леммы 8. Мы построим серию многочленов от y, x_{-1}, x_0, x_1, x_2 , принимающих ненулевые значения в $W^\#$ при подстановке $y \rightarrow 1, x_i \rightarrow e_i, -1 \leq i \leq 2$.

Положим

$$f_0 = f_0(x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = \bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2$$

и

$$f_1 = f_1(y, x_{-1}, x_0, x_1, x_2) = (\bar{y}x_{-1})(x_{-1}(\bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2)).$$

Тогда

$$a = f_1(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = (\bar{1} \cdot e_{-1})(e_{-1}(\bar{e}_{-1}\bar{e}_0\bar{e}_1\bar{e}_2)) = (1 \cdot e_{-1})(e_{-1}(\bar{e}_{-1}\bar{e}_0\bar{e}_1\bar{e}_2)),$$

поскольку $We_{-1} = 0$. Следовательно,

$$a = e_{-1}(e_{-1}(\bar{e}_{-1}\bar{e}_0\bar{e}_1\bar{e}_2)) = -e_2,$$

как в лемме 8. Построим также

$$\begin{aligned} f_2 &= (\bar{y}\bar{x}_{-1})(\tilde{x}_{-1}(\bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\tilde{y}\tilde{y}))\tilde{x}_0\bar{x}_0, \\ f_3 &= (\bar{y}\bar{x}_{-1})(\tilde{x}_{-1}(\bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{x}_1\bar{x}_2\tilde{y}))\tilde{x}_0. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} b &= f_2(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = (\bar{1} \cdot \bar{e}_{-1})(\tilde{e}_{-1}(\bar{e}_{-1}\bar{e}_0\bar{e}_1\bar{e}_2\tilde{1}\tilde{1}))\tilde{e}_0\bar{e}_0 = \\ &= (1 \cdot e_{-1})(e_{-1}(\bar{e}_{-1}\bar{e}_0\bar{e}_1\bar{e}_2\tilde{1}\tilde{1}))\tilde{e}_0\bar{e}_0, \end{aligned}$$

поскольку $We_{-1} = 0$, и так как $W_2e_0 = 0$, то

$$b = e_{-1}(e_{-1}(f_0(e_{-1}, e_0, e_1, e_2))e_0e_0) = -e_0.$$

Аналогично

$$f_3(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = -e_0.$$

Наконец, положим $g_0 = f_1^q f_2^p$ (при $m = 2p, t = 2q$) или $g_0 = f_1^q f_2^p f_3$ (при $m = 2p + 1, t = 2q + 1$) и

$$g_1 = \bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{y}(\bar{x}_1g_0), \dots, g_l = \bar{x}_{-1}\bar{x}_0\bar{y}(\bar{x}_1g_{l-1}).$$

Тогда $g_1(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2)$ с точностью до знака равняется

$$\begin{aligned} c &= (\bar{e}_{-1}\bar{e}_0 \cdot \bar{1})(\bar{e}_1e_0) = \\ &= (e_{-1}\bar{e}_0 \cdot \bar{1})(\bar{e}_1e_0) - (\bar{e}_0e_{-1} \cdot \bar{1})(\bar{e}_1e_0) + \bar{e}_0 \cdot \bar{1} \cdot e_{-1}(\bar{e}_1e_0) - \bar{e}_0 \cdot \bar{1} \cdot \bar{e}_1(e_1e_0). \end{aligned} \quad (16)$$

Третье и четвёртое слагаемые в правой части (16) равны нулю, так как $We_{-1} = 0$ и $e_{-1}e_0 = e_{-1}$. Первое слагаемое равно нулю, поскольку $e_{-1}\bar{e}_0\bar{1} = 0$. Второе слагаемое равно

$$1 \cdot e_{-1}\bar{e}_0(\bar{e}_1e_0) = -e_{-1}e_1(e_0e_0) = -e_0.$$

Отсюда следует, что $C = \pm e_0$. Аналогично

$$g_2(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = \dots = g_l(1, e_{-1}, e_0, e_1, e_2) = \pm e_0,$$

т. е. g_l не является тождеством $W^\#$. Так как линейаризация многочлена g_l порождает неприводимый FS_n -модуль с характером λ , то $m_\lambda \neq 0$ в (13), и лемма доказана. $\square$

Следующее утверждение выводится из леммы 11 так же как предложение 2 из леммы 7.

Предложение 4. $\exp(W^\#) \geq \max \Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, где $0 \leq x_1, \dots, x_4 \leq 1$,

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{x_1^{x_1} \dots x_5^{x_5}},$$

а максимум Φ берётся по области

$$\begin{cases} x_1 \geq \dots \geq x_5 \geq 0, \\ x_1 + \dots + x_5 = 1, \\ x_1 - x_4 = 2x_5. \end{cases} \quad (17)$$

Теорема 2. PI -экспонента алгебры $W^\#$ существует и равна максимуму функции

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \frac{1}{x_1^{x_1} \dots x_5^{x_5}}$$

по области (17). В частности, $\exp(W^\#) \approx 4,610718613$.

Доказательство. Существование PI -экспоненты $\exp(W^\#)$ — прямое следствие предложений 3 и 4. Максимум функции Φ в рассматриваемой области найдём с помощью метода множителей Лагранжа. После несложных выкладок получаем, что в точке максимума выполнены соотношения $x_3 = x_2 = tx_1$, $x_4 = t^2x_1$, $x_5 = t^3x_1$, где t — корень уравнения $2t^3 + t^2 - 1 = 0$, лежащий в интервале $(0, 1)$. С помощью компьютерных вычислений находим, что $t \approx 0,657298106$. Отсюда, учитывая соотношения (17), получаем, что в точке максимума $x_1 \approx 0,329965854$, $x_3 = x_2 \approx 0,216885931$, $x_4 \approx 0,142558712$, $x_5 \approx 0,093703571$ и $\Phi \approx 4,610718613$. Теорема полностью доказана. $\square$

Полученная для $\exp(W^\#)$ оценка 4,610718613 с высокой точностью совпадает с оценкой для $\exp(W) \approx 4,610718614$, и можно считать, что $\exp(W^\#) \approx \exp(W) + 1$. Расхождение в последнем знаке может возникать либо за счёт разных методов вычислений, либо из-за погрешности вычислений.

Литература

- [1] Бахтурин Ю. А. Тожества в алгебрах Ли. — М.: Наука, 1985.
- [2] Безущак О. Е., Беляев А. А., Зайцев М. В. Экспоненты тождеств алгебр с присоединённой единицей // Вісн. Київ. нац. унів. ім. Тараса Шевченка, Сер. фіз.-мат. науки. — 2012. — Вип. 3. — С. 7—9.
- [3] Безущак О. Е., Зайцев М. В. Экспоненты тождеств групповых колец // Мат. заметки. — 2011. — Т. 89, № 5. — С. 643—651.
- [4] Верёвкин А. Б., Зайцев М. В., Мищенко С. П. Достаточное условие совпадения нижней и верхней экспонент многообразия линейных алгебр // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2011. — № 2. — С. 36—39.
- [5] Джеймс Г. Теория представлений симметрических групп. — М.: Наука, 1982.
- [6] Жевлаков К. А., Слинько А. М., Шестаков И. П., Ширшов А. И. Кольца, близкие к ассоциативным. — М.: Наука, 1978.
- [7] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 23—48.
- [8] Зайцев М. В. Тожества конечномерных унитарных алгебр // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 50, № 5. — С. 563—594.
- [9] Зайцев М. В., Реповш Д. Четырёхмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой // Мат. заметки. — В печати.
- [10] Bahturin Yu. A., Drensky V. Identities of bilinear mappings and graded polynomial identities of matrices // Linear Algebra Appl. — 2003. — Vol. 369. — P. 95—112.
- [11] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. Appl. Math. — 2006. — Vol. 37, no. 3. — P. 360—377.
- [12] Giambruno A., Mishchenko S. P., Zaicev M. V. Codimensions of algebras and growth functions // Adv. Math. — 2008. — Vol. 217. — P. 1027—1052.
- [13] Giambruno A., Shestakov I., Zaicev M. Finite dimensional nonassociative algebras and codimension growth // Adv. Appl. Math. — 2011. — Vol. 47. — P. 125—139.
- [14] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — Vol. 140. — P. 145—155.
- [15] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1999. — Vol. 142. — P. 221—243.
- [16] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs. Vol. 122).
- [17] Giambruno A., Zaicev M. Lie, Jordan and proper codimensions of associative algebras // Rend. Circ. Mat. Palermo. — 2008. — Vol. 57, no. 2. — P. 161—171.
- [18] Giambruno A., Zaicev M. Proper identities, Lie identities and exponential codimension growth // J. Algebra. — 2008. — Vol. 320, no. 5. — P. 1933—1962.
- [19] Giambruno A., Zaicev M. Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 2010. — Vol. 362, no. 6. — P. 3107—3123.
- [20] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finite dimensional Lie superalgebras // J. London Math. Soc. — 2012. — Vol. 95. — P. 534—548.