Элемент Казимира

Н. И. ВИШНЕВСКАЯ
Московский государственный областной социально-гуманитарный институт
e-mail: 01nadya1984@mail.ru

УДК 512.815.4

Ключевые слова: инвариант, алгебры Ли, группы Ли, операторы Казимира.

Аннотация

В работе рассматривается проблема построения оператора Казимира четвёртого порядка для ортогональной группы пятого порядка. Приводится достаточно полное решение этой проблемы. Многими авторами приводится форма оператора Казимира в общем виде, в данной работе рассматривается частный случай для ортогональной группы.

Abstract

N. I. Vishnevskaya, The Casimir element, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 43—52.

We consider the problem of constructing the Casimir operator of the fourth order for the orthogonal group of the fifth order. The problem is completely solved. The explicit form of the Casimir operator is obtained.

1. Введение

Полупростые группы Ли (и особенно классические группы $\mathrm{U}(n)$, $\mathrm{SU}(n)$, $\mathrm{O}(n)$ и $\mathrm{Sp}(n)$) играют важную и всё возрастающую роль в атомной, молекулярной и ядерной спектроскопии и в теории элементарных частиц (см., например, [3, 5, 8, 9]). Часто встречается задача вычисления собственных значений операторов, инвариантных относительно преобразований данной группы (такие операторы называют также операторами Казимира [6]). Помимо физических задач, инвариантные операторы представляют интерес и с математической точки зрения [1, 2].

В данной статье рассматриваются операторы Казимира группы $\mathrm{SO}(5)$. Как известно (см., например, [4]), ортогональной группой $\mathrm{O}(n)$ называется группа линейных преобразований, сохраняющих квадратичную форму

$$\sum_{i=1}^{n}(x^i)^2.$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 43—52.

Простейшие ортогональные группы O(2), O(3), O(4) имеют многочисленные применения в физике. Ортогональные группы более высокого порядка, так же как и симплектические группы, используются при классификации состояний в модели ядерных оболочек [8]. При этом часто возникает задача нахождения инвариантных операторов, которые можно построить из генераторов данной группы. Наиболее важным для физики является квадратичный оператор Казимира, собственные значения которого были найдены Дж. Рака [8].

2. Группа SO(5)

Рассмотрим ортогональную группу SO(5) как группу, оставляющую инвариантной форму

$$x_1x_3 + x_2x_4 + x_3x_1 + x_4x_2 + x_5^2.$$

Тогда метрический тензор имеет вид

$$g = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ортогональная группа — это группа, которая удовлетворяет условию

$$A^{\mathrm{T}}g = -gA, \tag{1}$$

где A^{T} — транспонированная матрица. Матрицу A найдём из условия (1):

$$A = \begin{pmatrix} a & b & 0 & c & d \\ -e & f & -c & 0 & k \\ 0 & m & -a & e & -n \\ -m & 0 & -b & -f & -p \\ n & p & d & k & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда базисными будут следующие матрицы:

$$H_1 = e_{11} - e_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H_2 = e_{22} - e_{44} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_1 = e_{12} - e_{43} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_2 = e_{14} - e_{23} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_3 = e_{53} - e_{15} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_4 = e_{34} - e_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_5 = e_{54} - e_{25} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, A_6 = e_{32} - e_{41} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_7 = e_{51} - e_{35} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_8 = e_{52} - e_{45} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выпишем соотношения коммутации для базисных матриц:

$$\begin{array}{llll}
[H_1, H_2] = 0, & [H_2, A_4] = A_4, & [A_1, A_8] = 0, & [A_3, A_8] = -A_1, \\
[H_1, A_1] = A_1, & [H_2, A_5] = A_5, & [A_2, A_3] = 0, & [A_4, A_5] = 0, \\
[H_1, A_2] = A_2, & [H_2, A_6] = -A_6, & [A_2, A_4] = 0, & [A_4, A_6] = 0, \\
[H_1, A_3] = A_3, & [H_2, A_7] = 0, & [A_2, A_5] = 0, & [A_4, A_7] = 0, \\
[H_1, A_4] = -A_4, & [H_2, A_8] = -A_8, & [A_2, A_6] = -H_1 - H_2, & [A_4, A_8] = A_7, \\
[H_1, A_5] = 0, & [A_1, A_2] = 0, & [A_2, A_7] = -A_5, & [A_5, A_6] = -A_7, \\
[H_1, A_6] = -A_6, & [A_1, A_3] = 0, & [A_2, A_8] = A_3, & [A_5, A_7] = A_4, \\
[H_1, A_7] = -A_7, & [A_1, A_4] = H_2 - H_1, & [A_3, A_4] = A_5, & [A_5, A_8] = -H_2, \\
[H_1, A_8] = 0, & [A_1, A_5] = A_3, & [A_3, A_5] = -A_2, & [A_6, A_7] = 0, \\
[H_2, A_1] = -A_1, & [A_1, A_6] = 0, & [A_3, A_6] = A_8, & [A_6, A_8] = 0, \\
[H_2, A_2] = A_2, & [A_1, A_7] = -A_8, & [A_3, A_7] = -H_1, & [A_7, A_8] = -A_6, \\
[H_2, A_3] = 0. & & &
\end{array}$$

Найдём систему корней группы SO(5). Полупростыми элементами являются матрицы H_1 и H_2. Следовательно, подалгебра Картана состоит из двух элементов: H_1 и H_2. Из таблицы для коммутаторов видно, что собственными значениями элементов H_1 и H_2 являются числа 0, 0, 1, 1, 1, −1, −1, −1. Значит, мы имеем восемь корней. Найдём положительные корни:

$$[E_\alpha, E_{-\alpha}] = \vec{\alpha}\vec{H}, \quad \vec{H}(H_1, H_2), \quad \vec{\alpha}(\alpha_1, \alpha_2).$$

Из таблицы коммутаторов следует, что

$$[A_1, A_4] = H_2 - H_1, \quad [A_2, A_6] = -H_1 - H_2, \quad [A_3, A_7] = -H_1, \quad [A_5, A_8] = -H_2,$$
$$E_\alpha\colon A_1,\ A_2,\ A_3,\ A_5, \quad E_{-\alpha}\colon A_4,\ A_6,\ A_7,\ A_8,$$

$$[E_\alpha, E_\beta] = \begin{cases} 0, & \text{если } \alpha+\beta \text{ не корень,} \\ N_{\alpha\beta}E_{\alpha+\beta}, & \text{если } \alpha+\beta \text{ — корень.} \end{cases}$$

Тогда положительными корнями будут

$$E_\alpha = A_5, \quad E_\beta = A_1, \quad E_{\alpha+\beta} = A_3, \quad E_{2\alpha+\beta} = A_2,$$
$$E_{-\alpha} = A_8, \quad E_{-\beta} = A_4, \quad E_{-\alpha-\beta} = A_7, \quad E_{-2\alpha-\beta} = A_6.$$

Действительно,

$$[E_\alpha, E_\beta] = [A_5, A_1] = -A_3 = -E_{\alpha+\beta},$$
$$[E_\alpha, E_{\alpha+\beta}] = [A_5, A_3] = A_2 = E_{2\alpha+\beta}.$$

Имеем систему коней типа B_2.

3. Операторы Казимира

Пусть L — полупростая алгебра Ли, $U(L)$ — её универсальная обёртывающая алгебра и $Z(L)$ — центр алгебры $U(L)$. Элементы центра $Z(L)$ будем называть операторами Казимира.

Как было показано Х. Казимиром, среди элементов $Z(L)$ существует квадратичный оператор, определяемый однозначно с точностью до постоянного множителя. Согласно [2], алгебра $Z(L)$ отождествляется с алгеброй всех полиномов над L, инвариантных относительно присоединённого представления. Как показано в [7], алгебра $Z(L)$ изоморфна алгебре всех полиномов над картановской подалгеброй $H \subset L$, инвариантных относительно группы Вейля W.

Хорошо известно, что для любой полупростой алгебры Ли L ранга n существует ровно n операторов Казимира $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_n}$, обладающих следующими свойствами:

1) оператор C_p имеет порядок p, т. е. является однородным полиномом p-й степени от элементов алгебры L;
2) произвольный оператор Казимира $\hat{z}$ полиномиально выражается через $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_n}$. Иными словами, операторы $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_n}$ являются образующими в алгебре $Z(L)$;
3) совокупность собственных чисел оператора Казимира однозначно характеризует неприводимое представление алгебры Ли L.

Заметим, что выбор таких операторов $C_{p_1}, C_{p_2}, \ldots, C_{p_n}$ не является однозначным.

Вычисление собственных значений операторов Казимира представляет несомненный интерес как для самой теории групп, так и с точки зрения её приложений к физике. Применение операторов Казимира в физике связано с тем, что они входят в «полный набор наблюдаемых» и естественным образом возникают в задачах, связанных со снятием вырождения при наложении возмущений.

Рассмотрим группу SO(5) и её алгебру Ли. Так как подалгебра Картана имеет только два элемента, то для алгебры SO(5) существуют только два оператора

Казимира. Рассмотрим матрицу B, элементами которой являются базисные матрицы H_1, H_2, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6, A_7, A_8:

$$B = \begin{pmatrix} H_1 & A_1 & 0 & A_2 & -A_3 \\ -A_4 & H_2 & -A_2 & 0 & -A_5 \\ 0 & A_6 & -H_1 & A_4 & -A_7 \\ -A_6 & 0 & -A_1 & -H_2 & -A_8 \\ A_7 & A_8 & A_3 & A_5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим характеристический полином от B

$$\chi_B(\lambda) = \det(B - \lambda I) = \sum_{j=1}^{d} p_{d-j}(B)\lambda^j,$$

где коэффициенты $p_k(B)$ — однородные полиномы степени k элементов матрицы B (они являются операторами Казимира), I — единичная матрица, элементы A_i принадлежат универсальной обёртывающей алгебре:

$$\begin{vmatrix} H_1-\lambda & A_1 & 0 & A_2 & -A_3 \\ -A_4 & H_2-\lambda & -A_2 & 0 & -A_5 \\ 0 & A_6 & -H_1-\lambda & A_4 & -A_7 \\ -A_6 & 0 & -A_1 & -H_2-\lambda & -A_8 \\ A_7 & A_8 & A_3 & A_5 & -\lambda \end{vmatrix}.$$

Вычислим этот определитель:

$$\begin{aligned}\chi_B(\lambda) = &-A_6^2A_2^2\lambda - A_1^2A_4^2\lambda - 2A_6A_2\lambda^3 - 2A_1A_4\lambda^3 - 2A_8A_5\lambda^3 - 2A_3A_7\lambda^3 - \\ &- H_1^2H_2^2\lambda + H_1^2\lambda^3 - 2H_2A_1A_7A_5\lambda - 2A_4A_1A_3A_7\lambda - 2A_6A_2A_8A_5\lambda - \lambda^5 + \\ &+ 2H_1^2A_8A_5\lambda + H_2^2\lambda^3 - 2H_1H_2A_1A_4\lambda - 2H_1A_1A_7A_5\lambda + 2H_1A_3A_4A_8\lambda + \\ &+ 2H_1A_6A_2H_2\lambda + 2H_1A_6A_3A_5\lambda - 2H_1A_8A_2A_7\lambda + 2A_3A_7H_2^2\lambda + 2A_2A_4A_8^2\lambda + \\ &+ 2A_6A_1A_5^2\lambda + 2A_4A_6A_3^2\lambda + 2A_1A_2A_7^2\lambda + 2H_2A_3A_4A_8\lambda - 2A_6A_3A_5H_2\lambda + \\ &+ 2A_8A_2A_7H_2\lambda - 2A_8A_1A_5A_4\lambda + 2A_4A_6A_1A_2\lambda - 2A_6A_3A_2A_7\lambda.\end{aligned}$$

Получим, что коэффициенты при λ^2 и λ^0 обращаются в нуль, коэффициент при λ^5 равен -1. Выпишем коэффициент при λ^3:

$$H_2^2 + H_1^2 + H_2H_1 - H_1H_2 - 2A_3A_7 - 2A_5A_8 - 2A_1A_4 - 2A_2A_6.$$

Симметризуем полученный полином, замечая, что $H_2H_1 = H_1H_2$:

$$C_2 = H_1^2 + H_2^2 - A_3A_7 - A_7A_3 - A_5A_8 - A_8A_5 - A_1A_4 - A_4A_1 - A_2A_6 - A_6A_2.$$

Получили оператор Казимира второго порядка:

$$\begin{aligned}C_2 = H_1^2 + H_2^2 - E_{\alpha+\beta}E_{-\alpha-\beta} - E_{-\alpha-\beta}E_{\alpha+\beta} - E_\alpha E_{-\alpha} - \\ - E_{-\alpha}E_\alpha - E_\beta E_{-\beta} - E_{-\beta}E_\beta - E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta} - E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta}.\end{aligned}$$

Выпишем коэффициент при λ:

$$\begin{aligned}&-2H_2A_5A_1A_7+2H_2A_4A_3A_8-2H_2A_5A_3A_6+2H_2A_2A_7A_8-2A_8A_5A_1A_4-\\&\quad-2H_1A_5A_1A_7+2H_1A_4A_3A_8-2H_1H_2A_4A_1+2H_1H_2A_2A_6+2H_1A_5A_3A_6-\\&\quad-2H_1A_2A_8A_7-2A_1A_4A_3A_7+2A_1A_2A_4A_6-2A_2A_3A_6A_7-2A_2A_5A_8A_6+\\&\quad+2H_1H_1A_5A_8+2H_2H_2A_3A_7+2A_5A_5A_6A_1+2A_2A_4A_8A_8+2A_3A_3A_4A_6+\\&\quad+2A_7A_7A_1A_2-H_1H_1H_2H_2-A_1A_1A_4A_4-A_2A_2A_6A_6.\end{aligned}$$

Симметризуем каждый член:

$$\begin{aligned}C&=-2A_6A_3A_5H_2=\\&=\frac{-1}{12}(A_6A_3A_5H_2+A_6A_3H_2A_5+A_6A_5A_3H_2+A_6A_5H_2A_3+\\&+A_6H_2A_3A_5+A_6H_2A_5A_3+A_3A_5A_6H_2+A_3A_5H_2A_6+A_3A_6A_5H_2+\\&+A_3A_6H_2A_5+A_3H_2A_5A_6+A_3H_2A_6A_5+A_5A_3A_6H_2+A_5A_3H_2A_6+\\&+A_5A_6A_3H_2+A_5A_6H_2A_3+A_5H_2A_3A_6+A_5H_2A_6A_3+H_2A_3A_5A_6+\\&+H_2A_3A_6A_5+H_2A_5A_3A_6+H_2A_5A_6A_3+H_2A_6A_3A_5+H_2A_6A_5A_3).\end{aligned}$$

Приведём все его члены с помощью коммутаторов к виду $H_2A_5A_3A_6$:

$$H_2A_3A_5A_6=A_3H_2A_5A_6=H_2(A_5A_3-A_2)A_6=H_2A_5A_3A_6-H_2A_2A_6,$$

$$\begin{aligned}&H_2A_3A_6A_5=A_3H_2A_6A_5=H_2A_3(A_5A_6+A_7)=\\&\quad=H_2(A_5A_3-A_2)A_6+H_2A_3A_7=H_2A_5A_3A_6-H_2A_2A_6+H_2A_3A_7,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_5A_6A_3H_2=A_5A_6H_2A_3=A_5(H_2A_6+A_6)A_3=\\&\quad=(H_2A_5-A_5)A_6A_3+A_5A_6A_3=\\&\quad=H_2A_5(A_3A_6-A_8)-A_5A_6A_3+A_5A_6A_3=H_2A_5A_3A_6-H_2A_5A_8,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_6H_2A_3A_5=A_6A_3H_2A_5=(H_2A_6+A_6)A_3A_5=\\&\quad=H_2A_6(A_5A_3-A_2)+A_6A_3A_5=\\&\quad=H_2(A_5A_6+A_7)A_3-H_2A_6A_2+(A_3A_6-A_8)A_5=\\&\quad=H_2A_5(A_3A_6-A_8)+H_2(A_3A_7+H_1)-\\&\quad-H_2(A_2A_6+H_1+H_2)+A_3(A_5A_6+A_7)-A_5A_8-H_2=\\&\quad=H_2A_5A_3A_6-H_2A_5A_8+H_2A_3A_7-\\&\quad-H_2A_2A_6+A_3A_5A_6-H_2^2+A_3A_7-A_5A_8-H_2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&A_6A_5H_2A_3=A_6A_5A_3H_2=A_6(H_2A_5-A_5)A_3=\\&\quad=A_6H_2A_5A_3-A_6A_5A_3=(H_2A_6+A_6)A_5A_3-A_6A_5A_3=\\&\quad=H_2A_6A_5A_3=H_2(A_5A_6+A_7)A_3=H_2A_5(A_3A_6-A_8)+H_2(A_3A_7+H_1)=\\&\quad=H_2A_5A_3A_6-H_2A_5A_8+H_2A_3A_7+H_1H_2,\end{aligned}$$

$$H_2A_5A_6A_3=H_2A_5(A_3A_6-A_8)=H_2A_5A_3A_6-H_2A_5A_8,$$

$$
\begin{aligned}
H_2A_6A_3A_5 &= H_2A_6(A_5A_3 - A_2) = H_2(A_5A_6 + A_7)A_3 - H_2A_6A_2 = \\
&= H_2A_5(A_3A_6 - A_8) + H_2(A_3A_7 + H_1) - H_2(A_2A_6 + H_1 + H_2) = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 + H_2A_3A_7 - H_2A_2A_6 - H_2^2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
H_2A_6A_5A_3 &= H_2(A_5A_6 + A_7)A_3 = H_2A_5A_6A_3 + H_2(A_3A_7 + H_1) = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 + H_2A_3A_7 + H_1H_2,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3A_5H_2A_6 &= A_3(H_2A_5 - A_5)A_6 = H_2A_3A_5A_6 - A_3A_5A_6 = \\
&= H_2(A_5A_3 - A_2)A_6 - A_3A_5A_6 = H_2A_5A_3A_6 - H_2A_2A_6 - A_3A_5A_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3A_5A_6H_2 &= A_3A_5(H_2A_6 + A_6) = A_3A_5H_2A_6 + A_3A_5A_6 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_2A_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3A_6H_2A_5 &= A_3(H_2A_6 + A_6)A_5 = H_2A_3A_6A_5 + A_3A_6A_5 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_2A_6 + H_2A_3A_7 + A_3(A_5A_6 + A_7) = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_2A_6 + H_2A_3A_7 + A_3A_5A_6 + A_3A_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_3A_6A_5H_2 &= A_3A_6(H_2A_5 - A_5) = A_3A_6H_2A_5 - A_3(A_5A_6 + A_7) = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_2A_6 + H_2A_3A_7,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_5H_2A_6A_3 &= (H_2A_5 - A_5)A_6A_3 = H_2A_5A_6A_3 - A_5A_6A_3 = \\
&= H_2A_5(A_3A_6 - A_8) - A_5(A_3A_6 - A_8) = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 - (A_3A_5 + A_2)A_6 + A_5A_8 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 - A_3A_5A_6 - A_2A_6 + A_5A_8,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_5A_3A_6H_2 &= A_5A_3(H_2A_6 + A_6) = A_5H_2A_3A_6 + A_5A_3A_6 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - A_3A_5A_6 - A_2A_6(A_3A_5 + A_2)A_6 = H_2A_5A_3A_6,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_6H_2A_5A_3 &= (H_2A_6 + A_6)A_5A_3 = H_2A_6A_5A_3 + A_6(A_3A_5 + A_2) = \\
&= H_2A_6A_5A_3 + (A_3A_6 - A_8)A_5 + A_2A_6 + H_1 + H_2 = \\
&= H_2A_6A_5A_3 + A_3(A_5A_6 + A_7) - A_5A_8 - H_2 + A_2A_6 + H_1 + H_2 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 + H_2A_3A_7 + A_3A_5A_6 + H_1H_2 + \\
&+ A_3A_7 - A_5A_8 + A_2A_6 + H_1,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
A_6A_3A_5H_2A_6A_3(H_2A_5 - A_5) &= A_6A_3H_2A_5 - A_6A_3A_5 = \\
&= A_6A_3H_2A_5 - (A_3A_6 - A_8)A_5 = \\
&= A_6A_3H_2A_5 - A_3(A_5A_6 + A_7) + A_5A_8 + H_2 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 + H_2A_3A_7 - H_2A_2A_6 + A_3A_5A_6 - \\
&- H_2^2 + A_3A_7 - A_5A_8 - H_2 - A_3A_5A_6 - A_3A_7 + A_5A_8 + H_2 = \\
&= H_2A_5A_3A_6 - H_2A_5A_8 + H_2A_3A_7 - H_2A_2A_6 - H_2^2.
\end{aligned}
$$

Складывая полученные выражения, имеем

$$C = \frac{-1}{12}(24H_2A_5A_3A_6 - 12H_2A_5A_8 + 12H_2A_3A_7 - 12H_2A_2A_6 - \\ - 2A_2A_6 + 4A_3A_7 - 2A_5A_8 + 4H_1H_2 - 4H_2^2 - 2H_2 + H_1).$$

Аналогично преобразовываем каждый член, в итоге получаем

$$A = \frac{-1}{12}(24H_2A_1A_7A_5 + 12H_2A_5A_8 - 12H_2A_3A_7 + 12H_2A_1A_4 - \\ - 2A_1A_4 + 4A_3A_7 - 2A_5A_8 - 4H_1H_2 + 8H_2^2 + H_1,$$

$$B = \frac{1}{12}(24H_2A_4A_3A_8 + 12H_2A_5A_8 - 12H_2A_3A_7 + 12H_2A_1A_4 + \\ + 2A_5A_8 + 2A_1A_4 - 4A_3A_7 + 4H_1H_2 - 8H_2^2 - H_1),$$

$$D = \frac{1}{12}(24H_2A_2A_7A_8 + 12H_2A_5A_8 - 12H_2A_3A_7 + 12H_2A_2A_6 + \\ + 2A_2A_6 - 4A_3A_7 + 2A_5A_8 - 4H_1H_2 + 4H_2^2 + 2H_2 - H_1),$$

$$E = \frac{-1}{12}(24A_4A_1A_5A_8 + 12H_2A_5A_8 - 12H_1A_5A_8 + 12H_2A_1A_4 - \\ - 12A_3A_4A_8 - 12A_1A_5A_7 + 4A_5A_8 + 6A_3A_7 + 4A_1A_4 + 6H_1H_2 - 6H_2^2 - H_1),$$

$$F = \frac{-1}{12}(24H_1A_1A_5A_7 + 12H_1A_5A_8 - 12H_1A_3A_7 - 12H_1A_1A_4 - \\ - 2A_1A_4 - 2A_3A_7 + 4A_5A_8 + 8H_1H_2 - 4H_1^2 + 3H_2 - 2H_1),$$

$$G = \frac{1}{12}(24H_1A_3A_8A_4 + 12H_1A_1A_4 - 12H_1A_5A_8 + 12H_1A_3A_7 + \\ + 2A_1A_4 + 2A_3A_7 - 4A_5A_8 - 8H_1H_2 - 3H_2 + 2H_1 + 4H_1^2),$$

$$H = \frac{-1}{12}(24H_1A_1H_2A_4 - 24H_1A_1A_4 - 12H_1H_2^2 + 12H_1^2H_2 + \\ + 4H_1H_2 - 4A_1A_4 - 4H_1^2 - 4H_2^2 + 2H_2 - 2H_1),$$

$$J = \frac{1}{12}(24H_1A_2H_2A_6 + 24H_1A_2A_6 + 12H_1^2H_2 + 12H_1H_2^2 + \\ + 4A_2A_6 + 8H_1H_2 + 4H_1^2 + 4H_2^2 + 2H_1 + 2H_2),$$

$$K = \frac{1}{12}(24H_1A_3A_5A_6 + 12H_1A_2A_6 - 12H_1A_5A_8 + 12H_1A_3A_7 + \\ + 2A_2A_6 + 2A_3A_7 - 4A_5A_8 - 4H_1H_2 + 4H_1^2 + 2H_1 - H_2),$$

$$L = \frac{-1}{12}(24H_1A_2A_8A_7 - 12H_1A_3A_7 + 12H_1A_5A_8 - 12H_1A_2A_6 - \\ - 2A_2A_6 + 4A_5A_8 - 2A_3A_7 - 4H_1^2 + 4H_1H_2 - 2H_1 + H_2),$$

$$M = \frac{-1}{12}(24A_1A_4A_3A_7 + 12H_1A_1A_4 + 12H_1A_3A_7 - 12H_2A_3A_7 + 12A_1A_5A_7 + \\ + 12A_3A_4A_8 + 4A_1A_4 - 8A_3A_7 - 6A_5A_8 - 6H_1H_2 + 6H_1^2 + 4H_1 - 5H_5),$$

$$N = \frac{1}{12}(24A_1A_2A_4A_6 + 12H_1A_1A_4 + 12H_2A_1A_4 + 12H_1A_2A_6 + \\ + 12H_2A_2A_6 + 6H_1^2 - 6H_2^2),$$

$$P = \frac{-1}{12}(24A_2A_6A_3A_7 + 12H_1A_3A_7 + 12H_2A_3A_7 + 12H_1A_2A_6 + 12A_2A_7A_8 + \\ + 12A_3A_5A_6 + 16A_2A_6 + 4A_3A_7 - 6A_5A_8 + 6H_1H_2 + 6H_1^2 + 4H_1 - H_2),$$

$$R = \frac{1}{6}(12H_1^2A_5A_8 + 6H_1^2H_2),$$

$$Y = \frac{1}{6}(12H_2^2A_3A_7 + 6H_1H_2^2).$$

Окончательно имеем

$$C_4 = \frac{2}{3}(H_2A_4A_3A_8 - H_2A_6A_3A_5 - H_2A_4H_1A_1 + H_1A_2H_2A_6 + H_1A_6A_5A_3 - \\ - H_1A_2A_8A_7) + 2A_4A_1A_6A_2 + \frac{4}{3}(A_5^2A_1A_6 + A_8^2A_2A_4 + A_3^2A_4A_6 + A_7^2A_2A_1) - \\ - \frac{1}{6}(A_1A_4A_1A_4 + A_4A_1A_4A_{11} + A_6A_2A_6A_2 + A_2A_6A_2A_6) + \frac{2}{3}H_2A_6A_2 - \\ - \frac{1}{3}H_1A_6A_2 - H_1A_4A_1 - A_3A_7 - A_5A_8 + \frac{2}{3}A_2A_6 + \frac{2}{3}A_4A_1 - \\ - \frac{1}{6}H_1^2 - \frac{1}{6}H_2^2 - \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{6}H_2,$$

или

$$C_4 = \frac{2}{3}(H_2E_{-\beta}E_{\alpha+\beta}E_{-\alpha} - H_2E_{-2\alpha-\beta}E_{\alpha+\beta}E_{\alpha} - H_2E_{-\beta}H_1E_{\beta} + \\ + H_1E_{2\alpha+\beta}H_2E_{-2\alpha-\beta} + H_1E_{-2\alpha-\beta}E_{\alpha}E_{\alpha+\beta} - H_1E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta}E_{-\alpha-\beta}) + \\ + 2E_{-\beta}E_{\beta}E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta} + \frac{4}{3}(E_{\alpha}^2E_{\beta}E_{2\alpha-\beta} + E_{-2\alpha-\beta}^2E_{2\alpha+\beta}E_{-\beta} + \\ + E_{\alpha+\beta}^2E_{-\beta}E_{-2\alpha-\beta} + E_{-\alpha-\beta}^2E_{2\alpha+\beta}E_{\beta}) - \frac{1}{6}(E_{\beta}E_{-\beta}E_{\beta}E_{-\beta} + \\ + E_{-\beta}E_{\beta}E_{-\beta}E_{\beta} + E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta} + \\ + E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta}) + \frac{2}{3}H_2E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta} - \frac{1}{3}H_1E_{-2\alpha-\beta}E_{2\alpha+\beta} - \\ - H_1E_{-\beta}E_{\beta} - E_{\alpha+\beta}E_{-\alpha-\beta} - E_{\alpha}E_{-\alpha} + \frac{2}{3}E_{2\alpha+\beta}E_{-2\alpha-\beta} + \frac{2}{3}E_{-\beta}E_{\beta} - \\ - \frac{1}{6}H_1^2 - \frac{1}{6}H_2^2 - \frac{1}{2}H_1 + \frac{1}{6}H_2.$$

Литература

[1] Березин Ф. А. Операторы Лапласа на полупростых группах Ли // Тр. Мат. ин-та АН СССР. — 1957. — Т. 6. — С. 372—463.

[2] Гельфанд И. М. Центр инфинитезимального группового кольца // Мат. сб. — 1950. — Т. 26. — С. 103—112.

[3] Джадд Б., Вайборн Б. Теория сложных атомных спектров. — М.: Мир, 1973.

[4] Хамермеш М. Теория групп и её приложения к физическим проблемам. — М.: Мир, 1966.

[5] Behrends R. E., Dreitlein J., Fronsdal C., Lee W. Simple groups and strong interaction symmetries // Rev. Modern Phys. — 1962. — Vol. 34. — P. 1—40.

[6] Casimir H. On the attraction between two perfectly conducting plates // Proc. Konink. Nederl. Akad. Wetensch. — 1948. — Vol. 51. — P. 793—795.

[7] Chevalley C. Invariants of finite groups generated by reflections // Am. J. Math. — 1955. — Vol. 77. — P. 778—782.

[8] Racah G. Group Theory and Spectroscopy. — Princeton: Institute for Advanced Study, 1951.

[9] Wybourne B. G. Symmetry Principles and Atomic Spectroscopy. — New York: Wiley—Interscience, 1970.