

Абелевы dqt -группы и кольца на них

Е. И. КОМПАНЦЕВА

Финансовый университет
при правительстве РФ
e-mail: kompantseva@yandex.ru

УДК 512.541

Ключевые слова: абелева группа, абсолютный ниль-идеал абелевой группы, абсолютный радикал Джекобсона.

Аннотация

Абсолютным радикалом абелевой группы называется пересечение радикалов всех ассоциативных колец, аддитивная группа которых совпадает с данной. Проблема описания абсолютных радикалов абелевых групп была сформулирована Л. Фуксом, он же описал абсолютный радикал Джекобсона периодической абелевой группы. В настоящей работе изучаются абсолютный радикал Джекобсона и абсолютный ниль-радикал в некоторых классах смешанных абелевых групп.

Abstract

E. I. Kompantseva, Abelian dqt -groups and rings on them, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 53–67.

The absolute radical of an Abelian group G is the intersection of radicals of all associative rings with additive group G . The problem of describing absolute radicals was formulated by L. Fuchs. He described the absolute Jacobson radical of a torsion Abelian group. In this work, the absolute Jacobson radical and the absolute nil-radical are investigated in some mixed Abelian group classes.

Кольцом на абелевой группе G называется кольцо, аддитивная группа которого совпадает с G . Изучение абелевой группы как аддитивной группы колец, определённых на ней, — одно из наиболее естественных направлений теории абелевых групп. Л. Фуксом сформулирована проблема описания абсолютных радикалов абелевой группы [7, проблема 94]. Под абсолютным радикалом Джекобсона абелевой группы G понимается пересечение $J^*(G)$ радикалов Джекобсона всех ассоциативных колец на G . Абсолютный ниль-радикал абелевой группы G — это пересечение $N^*(G)$ верхних ниль-радикалов всех ассоциативных колец на G . В [7] показано, что абсолютные радикалы периодической абелевой группы G совпадают с её подгруппой Фраттини $\bigcap_p pG$. В [3] вопрос об абсолютных радикалах абелевой группы сводится к случаю редуцированных групп. Настоящая статья посвящена изучению абсолютного радикала Джекобсона и абсолютного ниль-радикала редуцированных смешанных абелевых групп.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 53–67.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Все группы, рассматриваемые в работе, абелевы, и слово «группа» всюду в дальнейшем означает «абелева группа».

В [3] показано, что если группа G не имеет ненулевых делимых гомоморфных образов без кручения, то $\bigcap_p pG \subset J^*(G)$. Дело обстоит иначе в случае групп, имеющих нетривиальные делимые гомоморфные образы без кручения, в частности редуцированных групп с делимой фактор-группой по периодической части. Такие группы будем называть dqt-группами. Класс dqt-групп и его подклассы играют важную роль при исследовании связей между строением абелевой группы и свойствами колец на ней, а также свойствами её кольца эндоморфизмов (см., например, [2, 5, 8, 9]). Изучение dqt-групп обусловлено и тем фактом, что произвольное кольцо на такой группе может быть вложено в качестве подкольца в некоторое кольцо с урегулированной копериодической аддитивной группой (теорема 1), все умножения на которой хорошо описываются.

Единого описания абсолютных радикалов dqt-групп нет. В [4] для произвольной смешанной группы G определяется её сервантная вполне характеристическая подгруппа G^* и доказывается, что подгруппа $\bigcap_p pG^*$ является ниль-идеалом в любом кольце на G , если G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения (в частности, если G редуцированная). Учитывая этот факт, в настоящей статье доказано, что

$$\bigcap_p pG^* \subset N^*(G) \subset J^*(G) \subset \bigcap_p pG$$

для любой dqt-группы G (теорема 4).

Построенные примеры показывают, что указанные включения нельзя заменить равенствами ни на каком месте. Доказывается, что для произвольной копериодической группы G (необязательно являющейся dqt-группой)

$$N^*(G) = \bigcap_p pG^*, \quad J^*(G) = \bigcap_p pG$$

(теорема 5). Следовательно, существуют dqt-группы G , абсолютные радикалы которых имеют указанный вид и $N^*(G) \neq J^*(G)$, поскольку урегулированные копериодические группы являются dqt-группами. Показано также, что существуют dqt-группы G , для которых

$$N^*(G) = J^*(G) = \bigcap_p pG^* \neq \bigcap_p pG$$

(следствие 8). Вместе с тем существуют dqt-группы G , в которых абсолютные радикалы максимальны, т. е. $N^*(G) = J^*(G) = \bigcap_p pG$, в теореме 9 даётся достаточное условие для выполнения этих равенств. В заключение приводится пример dqt-группы G , абсолютный радикал Джекобсона и абсолютный ниль-радикал которой являются подгруппами, заключёнными строго между $\bigcap_p pG^*$ и $\bigcap_p pG$.

Будем использовать следующие определения и обозначения. Умножением на группе G называется любой гомоморфизм $\mu: G \otimes G \rightarrow G$. Это умножение часто обозначается также знаком $\times$, т. е. $\mu(g_1 \times g_2) = g_1 \times g_2$ для всех $g_1, g_2 \in G$. Группа G с заданным на ней умножением определяет кольцо на группе G , которое обозначается (G, μ) или $(G, \times)$. Аддитивные группы целых и рациональных чисел обозначаются $\mathbb{Z}$ и $\mathbb{Q}$ соответственно, $\mathbb{N}_0$ — множество целых неотрицательных чисел. Через $T(G)$ обозначается периодическая часть группы G , $T_p(G)$ — p -примарная компонента группы $T(G)$. Напомним, что dqt-группой мы называем редуцированную группу G с делимой фактор-группой $G/T(G)$. Как обычно, $\langle g \rangle$ — циклическая группа, порождённая элементом g , $h_p(g)$ и $o(g)$ — p -высота и порядок элемента g . Элемент прямого произведения $\prod_{i \in I} G_i$ записывается в виде $(g_i)_{i \in I}$, где $g_i \in G_i$. Пусть P — некоторое множество простых чисел. Группу G будем называть P -делимой, если она p -делима для всех $p \in P$, а подгруппу A группы G называем P -сервантной, если она является p -сервантной для каждого $p \in P$. За всеми определениями и обозначениями, если не оговорено противное, мы отсылаем к [1, 7].

Для любой редуцированной абелевой группы G существует минимальная редуцированная копериодическая группа $G^\bullet = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G)$, содержащая G в качестве сервантной подгруппы и называемая копериодической оболочкой группы G [7, § 58]. При этом любое умножение на редуцированной группе G однозначно продолжается до умножения на её копериодической оболочке [7, § 119], поэтому изучение колец на копериодических группах может дать полезную информацию о кольцах на произвольной абелевой группе.

Согласно [7, § 55], редуцированную копериодическую группу G можно представить в виде $G = A \oplus C$, где A — алгебраически компактная группа без кручения, C — урегулированная копериодическая группа, т. е. редуцированная копериодическая группа, не имеющая прямых слагаемых без кручения. Отметим, что любое умножение на урегулированной копериодической группе полностью определяется произведениями базисных элементов её периодической части. Следующая теорема показывает, что класс dqt-групп совпадает с классом групп с урегулированной копериодической оболочкой.

Теорема 1. *Группа G является dqt-группой тогда и только тогда, когда её копериодическая оболочка $G^\bullet$ является урегулированной копериодической группой, причём $T(G^\bullet) = T(G)$.*

Доказательство. Если G является dqt-группой, то $G^\bullet = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, G)$ — урегулированная копериодическая группа [4, лемма 7]. Обратно, если копериодическая оболочка $G^\bullet$ является урегулированной копериодической группой и $T(G^\bullet) = T(G)$, то G редуцированная и, так как G сервантна в $G^\bullet$, группа $G/T(G)$ сервантна в делимой группе $G^\bullet/T(G) = G^\bullet/T(G^\bullet)$, откуда следует, что $G/T(G)$ делимая. $\square$

В дальнейшем существенно используется следующее определение из [10]. Пусть d — действительное число, G — группа. Мы говорим, что элемент $g \in G$

удовлетворяет условию $(*)$ для d и простого числа p , если существует неубывающая неограниченная функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такая что $h_p(p^i g) > d(i + f(i))$ для всех $i \in \mathbb{N}_0$.

Пусть G — группа. Положим

$$G^* = \{g \in G \mid \text{найдутся } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \text{ и } d > 1,$$

такие что kg удовлетворяет условию $(*)$ для d и любого простого $p\}$.

В [4] показано, что G^* — сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G , содержащая $T(G)$ и первую ульмовскую подгруппу G^1 , а подгруппа $\bigcap_p pG^*$ является ниль-идеалом в любом кольце на G , если G не содержит ненулевой делимой подгруппы без кручения.

Предложение 2. Пусть G — редуцированная копериодическая группа, $G = A \oplus C$, где A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, C — урегулированная копериодическая группа. Тогда

- 1) $G^* = C^*$;
- 2) G^* и C являются dqt-группами.

Доказательство. По [4, теорема 1] имеем $G^* = A^* \oplus C^* = C^*$.

Докажем второе утверждение. Группа $C/T(C)$ делима [7, лемма 55.1]. Так как подгруппа C^* сервантна в C и, очевидно, $T(G) = T(G^*) = T(C)$, то $G^*/T(G^*) = C^*/T(C)$ сервантна в $C/T(C)$, откуда следует, что $G^*/T(G^*)$ делимая. $\square$

Для произвольной группы G обозначим

$$\begin{aligned} \Lambda(G) &= \{p \mid T_p(G) \neq 0\}, \\ G^1 &= \{g \in G \mid h_p(g) = \infty \text{ для всех } p\} \\ &\quad (\text{первая ульмовская подгруппа группы } G), \\ G_\Lambda^1 &= \{g \in G \mid h_p(g) = \infty \text{ для всех } p \in \Lambda(G)\}, \\ \bar{G} &= G/G^1, \quad \bar{G}_\Lambda = G/G_\Lambda^1. \end{aligned}$$

Рассмотрим редуцированную группу G (в частности, G может быть dqt-группой). Пусть

$$B_p = \bigoplus_{\alpha \in I_p} \langle e_\alpha^{(p)} \rangle -$$

базисная подгруппа группы $T_p(G)$,

$$B = \bigoplus_{p \in \Lambda(G)} B_p -$$

базисная подгруппа группы $T(G)$, $\hat{B}_p$ — p -адическое пополнение группы B_p ,

$$\hat{B} = \prod_p \hat{B}_p -$$

$\mathbb{Z}$ -адическое пополнение группы B . В силу [4, лемма 8] группу $\bar{G}_\Lambda$ можно рассматривать как $\Lambda(G)$ -сервантную подгруппу группы $\hat{B}$ (если G — dqt-группа, то группу G отождествляем с сервантной подгруппой группы $\hat{B}$). Через π_p будем обозначать проекцию группы $\hat{B}$ на группу $\hat{B}_p$. Группа $\hat{B}_p$ везде далее рассматривается как сервантная подгруппа группы

$$V_p = \prod_{\alpha \in I_p} \langle e_\alpha^{(p)} \rangle,$$

т. е. элемент $b_p \in \hat{B}_p$ записывается в виде $b_p = (b_{\alpha,p} e_\alpha^{(p)})_{\alpha \in I_p}$, где $b_{\alpha,p} \in \mathbb{Z}$.

Лемма 3. Пусть G — редуцированная группа с $\Lambda(G)$ -делимой фактор-группой $G/T(G)$. Тогда для любого элемента

$$g \in G \setminus \left(\bigcap_{p \in \Lambda(G)} pG \right)$$

существует ассоциативное умножение $\mu: G \otimes G \rightarrow T(G)$, такое что $g \notin J(G, \mu)$.

Доказательство. Группу $\bar{G}_\Lambda = G/G_\Lambda^1$ рассматриваем как $\Lambda(G)$ -сервантную подгруппу группы

$$V = \prod_{p \in \Lambda(G)} V_p,$$

где

$$\bigoplus_{\alpha \in I_p} \langle e_\alpha^{(p)} \rangle -$$

p -базисная подгруппа группы $T(G)$,

$$V_p = \prod_{\alpha \in I_p} \langle e_\alpha^{(p)} \rangle.$$

Пусть

$$g \in G \setminus \left(\bigcap_{p \in \Lambda(G)} pG \right)$$

и

$$\bar{g} = g + G_\Lambda^1 = (k_{\alpha,p} e_\alpha^{(p)})_{p \in \Lambda(G), \alpha \in I_p} \in \bar{G}_\Lambda.$$

Тогда существуют $p_0 \in \Lambda(G)$ и $\alpha_0 \in I_{p_0}$, такие что p_0 не делит $k_{\alpha_0,p_0} e_{\alpha_0}^{(p)}$. Определим гомоморфизм $\eta: V \otimes V \rightarrow T(G)$, положив $\eta(s \otimes m) = s_{\alpha_0,p_0} m_{\alpha_0,p_0} e_{\alpha_0}^{(p_0)}$ для $s = (s_{\alpha,p} e_\alpha^{(p)})_{p \in \Lambda(G), \alpha \in I_p}$ и $m = (m_{\alpha,p} e_\alpha^{(p)})_{p \in \Lambda(G), \alpha \in I_p}$ из V .

Пусть $\varphi: G \rightarrow \bar{G}_\Lambda$ — естественный эпиморфизм. Тогда отображение $\mu = \eta|_{\bar{G}_\Lambda \otimes \bar{G}_\Lambda}(\varphi \otimes \varphi): G \otimes G \rightarrow T(G)$ является ассоциативным и коммутативным умножением на G , причём подгруппа $\langle e_{\alpha_0}^{(p_0)} \rangle$ — идеал кольца (G, μ) с единичным элементом $e_{\alpha_0}^{(p_0)}$.

Допустим, что $g \in J(G, \mu)$. Тогда $\mu(g \otimes e_{\alpha_0}^{(p_0)}) = k_{\alpha_0, p_0} e_{\alpha_0}^{(p_0)} \in J(G, \mu)$, и значит, $e_{\alpha_0}^{(p_0)} \in J(G, \mu)$, так как p_0 не делит k_{α_0, p_0} . Следовательно, $\langle e_{\alpha_0}^{(p_0)} \rangle = J(G, \mu) \cap \langle e_{\alpha_0}^{(p_0)} \rangle = J(\langle e_{\alpha_0}^{(p_0)} \rangle, \mu)$, что противоречит тому, что $e_{\alpha_0}^{(p_0)}$ — единичный элемент идеала $\langle e_{\alpha_0}^{(p_0)} \rangle$. Значит, $g \notin J(G, \mu)$. $\square$

Из [4, теорема 5] и леммы 3 получаем следующую теорему.

Теорема 4. Для любой dqt -группы G имеют место включения

$$\bigcap_p pG^* \subset N^*(G) \subset J^*(G) \subset \bigcap_p pG.$$

В [4] доказано, что если группа G содержит ненулевую делимую подгруппу без кручения, то

$$N^*(G) = J^*(G) = \bigcap_p pT(G),$$

поэтому следующая теорема даёт описание абсолютных радикалов произвольной копериодической группы.

Теорема 5. Если G — копериодическая группа, не содержащая ненулевой делимой подгруппы без кручения, то

$$J^*(G) = \bigcap_p pG, \quad N^*(G) = \bigcap_p pG^*.$$

Доказательство. Покажем, что

$$\bigcap_p pG \subseteq J^*(G).$$

Пусть $\varphi: G \rightarrow G/G^1$ — естественный эпиморфизм. Так как G/G^1 — редуцированная алгебраически компактная группа [7], то по [3]

$$\bigcap_p p(G/G^1) \subseteq J^*(G/G^1).$$

Так как G^1 является нильпотентным идеалом в любом кольце на G [4], то $G^1 \subset J^*(G)$. Следовательно, по [3]

$$\bigcap_p pG \subset \varphi^{-1} \left[\bigcap_p p(G/G^1) \right] \subset \varphi^{-1} [J^*(G/G^1)] \subset J^*(G).$$

Так как $\bigcap_p pG^*$ в свою очередь является ниль-идеалом в любом кольце на G [4], то

$$\bigcap_p pG^* \subset N^*(G).$$

Докажем теперь, что

$$J^*(G) \subseteq \bigcap_p pG$$

и

$$N^*(G) \subseteq \bigcap_p pG^*.$$

Группа G представляется в виде $G = A \oplus C \oplus D$, где A — редуцированная алгебраически компактная группа без кручения, C — урегулированная копериодическая группа, D — делимая периодическая группа [7]. Так как C — dqt-группа (предложение 2), то

$$J^*(C) \subseteq \bigcap_p pC \quad (1)$$

по теореме 4. Пусть $c \notin \bigcap_p pC^*$. По [4, лемма 9] существует ассоциативное кольцо $(C, \times)$, в котором элемент c не является нильпотентным, откуда следует, что $c \notin N^*(C)$. Следовательно,

$$N^*(C) \subseteq \bigcap_p pC^*. \quad (2)$$

Известно [3], что для редуцированной алгебраически компактной группы A и делимой периодической группы D имеют место равенства

$$N^*(A) = 0, \quad J^*(A) = \bigcap_p pA, \quad N^*(D) = J^*(D) = D. \quad (3)$$

Так как абсолютный радикал прямой суммы подгрупп содержится в прямой сумме их абсолютных радикалов [3], то из (1)–(3) и предложения 2 получаем

$$N^*(G) \subseteq N^*(A) \oplus N^*(C) \oplus N^*(D) \subseteq \bigcap_p pC^* \oplus D = \bigcap_p pG^*$$

и

$$J^*(G) \subseteq J^*(A) \oplus J^*(C) \oplus J^*(D) \subseteq \bigcap_p pA \oplus \bigcap_p pC \oplus D = \bigcap_p pG. \quad \square$$

Теорема 6. Пусть C — урегулированная копериодическая группа, периодическая часть которой является p -группой. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- 1) $\bigcap_p pC^* = \bigcap_p pC$;
- 2) $C^* = C$;
- 3) C — ограниченная p -группа.

Доказательство. Докажем, что из утверждения 1) следует утверждение 2). Так как $T(C)$ — p -группа, то для группы $C = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T(C))$ имеем

$$\bigcap_p pC = pC, \quad \bigcap_p pC^* = pC^*.$$

Так как C/C^* — группа без кручения [7], то из равенства $pC = pC^*$ следует $C = C^*$.

Докажем теперь, что 2) влечёт 3). Пусть

$$B = \bigoplus_{\alpha \in I} \langle e_\alpha \rangle -$$

базисная подгруппа группы $T(C)$, где $o(e_\alpha) = p^{s_\alpha}$ для всех $\alpha \in I$. Допустим, что C не является ограниченной p -группой. Тогда подгруппа $T(C)$ неограниченная, и значит, подгруппа B также неограниченная. Следовательно, в множестве I можно выбрать такую последовательность индексов $\{\alpha_k\}_{k \in \mathbb{N}}$, что $s_{\alpha_k} > k + k^2$ для каждого $k \in \mathbb{N}$. В группе

$$V = \prod_{\alpha \in I} \langle e_\alpha \rangle$$

существует элемент g , принадлежащий $\hat{B} \setminus (\hat{B})^*$. В качестве g можно взять элемент, у которого координаты с индексами α_k ($k = 1, 2, \dots$) равны $p^k e_{\alpha_k}$, а все остальные координаты равны 0. Нетрудно убедиться, что для любого $k \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство

$$\frac{h_p(p^{k^2}g) - k^2}{k^2} \leq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k},$$

т. е.

$$\frac{h_p(p^{k^2}g) - k^2}{k^2}$$

принимает сколь угодно малые значения при достаточно больших значениях k , поэтому $g \notin (\hat{B})^*$.

Поскольку $C/C^1 \cong \hat{B}$ [4, лемма 7], то $(C/C^1)^* \neq C/C^1$. Следовательно, $C^* \neq C$, что противоречит утверждению 2).

То, что из 3) следует 1), очевидно. $\square$

Следствие 7. В классе dqt -групп существуют группы G , для которых

$$J^*(G) = \bigcap_p pG, \quad N^*(G) = \bigcap_p pG^*, \quad N^*(G) \neq J^*(G).$$

Доказательство. Положим $G = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$, где T — неограниченная редуцированная p -группа. Так как G — урегулированная копериодическая группа, то в силу теорем 5 и 6 группа G удовлетворяет нужным условиям. $\square$

Отметим, что существуют урегулированные копериодические группы G , для которых

$$\bigcap_p pG = \bigcap_p pG^*,$$

но $G \neq G^*$.

Пример. Пусть

$$G = \prod_p \langle e_p \rangle,$$

где $o(e_p) = p$. Тогда G — урегулированная копериодическая группа, и если при $k \in \mathbb{Z}$ элемент ke_p удовлетворяет условию (*) для некоторого действительного числа $d > 1$ и простого p , то $h_p(ke_p) > d(0 + f(0)) \geq 0$ ($f(i)$ — неубывающая неограниченная функция), т. е. $ke_p = 0$. Поэтому если для некоторого элемента $g \in G$ и некоторого целого числа $m \neq 0$ элемент mg удовлетворяет условию (*) для $d > 1$ и любого p , то $mg = 0$ и, следовательно, $g \in T(G)$. Таким образом, $G^* = T(G) \neq G$. Однако

$$\bigcap_p pG = \bigcap_p pG^* = 0.$$

Следствие 8. В классе dqt-групп существуют группы G , для которых

$$N(G) = J^*(G) = \bigcap_p pG^* \neq \bigcap_p pG.$$

Доказательство. Пусть T — неограниченная редуцированная p -группа. Тогда по теореме 6 в группе $C = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T)$ существует элемент g , принадлежащий

$$\left(\bigcap_p pC \right) \setminus \left(\bigcap_p pC^* \right).$$

Из [4, теорема 11] следует существование нужной группы G . $\square$

В следующей теореме приводится условие, достаточное для того, чтобы абсолютный ниль-радикал и абсолютный радикал Джекобсона группы G были максимальны, т. е., согласно теореме 4, совпадали с её подгруппой Фраттини. В доказательстве теоремы 9 используется следующее определение. Пусть G — группа, d — действительное число. Будем говорить, что элемент $g \in G$ удовлетворяет условию (**) для d и простого числа p , если существует такое $n_p \in \mathbb{N}_0$ и такая неубывающая неограниченная функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, что $h_p(p^i g) > d(i + f(i))$ для всех $i > n_p$.

Теорема 9. Пусть G — такая dqt-группа, что фактор-группа G/G^* имеет конечный ранг. Тогда подгруппа $\bigcap_p pG$ является ниль-идеалом в любом ассоциативном кольце на группе G .

Доказательство. Рассмотрим сначала группу G , первая ульмовская подгруппа которой нулевая. Пусть $A_p = \hat{B}_p$, $A = \hat{B}$, где B_p — p -базисная подгруппа группы $T(G)$, $B = \bigoplus_p B_p$. Тогда группу G можно рассматривать как сервантную подгруппу группы A . Определим следующие подгруппы групп A и G :

$$\tilde{A} = \prod_p T_p(A), \quad \tilde{G} = \tilde{A} \cap G, \quad G^{**} = (\tilde{A} + A^*) \cap G.$$

Нетрудно убедиться, что $\tilde{G}$ — сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G .

Покажем, что

$$G^{**} = \{g \in G \mid \text{найдутся } d > 1 \text{ и } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

такие что kg удовлетворяет условию $(**)$ для d и любого простого числа $p\}$.

Пусть $g \in G^{**}$. Тогда $g = \tilde{g} + g^*$, где $\tilde{g} \in \tilde{A}$, $g^* \in A^*$. Для элемента g^* выполняется условие

найдутся $d > 1$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие что для каждого p существует
неубывающая неограниченная функция $f_p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$,
такая что $h_p(p^i kg^*) > (i + f_p(i))$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$.

Так как $\tilde{g} \in \tilde{A}$, то

для каждого p существует $n_p \in \mathbb{N}_0$, такое что $p^{n_p} \pi_p(\tilde{g}) = 0$.

Следовательно, для всех простых чисел p

для любого $i > n_p$ справедливо $h_p(p^i kg) = h_p(p^i kg^*) > d(i + f_p(i))$,

т. е. элемент kg удовлетворяет условию $(**)$ для d и любого простого p .

Пусть теперь существуют действительное $d > 1$ и целое $k \neq 0$, такие что kg удовлетворяет условию $(**)$ для d и любого простого p , т. е.

для каждого p существует неубывающая неограниченная
функция $f: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такая что найдётся $n_p \in \mathbb{N}$,
такое что для любого $i > n_p$ справедливо $h_p(p^i kg) > d(i + f_p(i))$.

Так как группа A_p является p -адическим пополнением группы B_p , то для каждого простого p элемент $\pi_p(g)$ можно записать в виде $\pi_p(g) = t_p + g'_p$, где $t_p \in T_p(A)$, $g'_p \in A_p$ и $h_p(g'_p) > dn_p$. Тогда $g = (t_p)_p + (g'_p)_p$, где $(t_p)_p \in \tilde{A}$. Покажем что элемент $g' = (g'_p)_p$ принадлежит A^* . Пусть p — фиксированное простое число. Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}_0$ имеем $h_p(p^i kg') \geq h_p(p^i kg)$, поэтому

для любого $i \leq n_p$ справедливо $h_p(p^i kg') > dn_p \geq d(i + 0)$,

для любого $i > n_p$ справедливо $h_p(p^i kg') \geq h_p(p^i kg) > d(i + f_p(i))$.

Определим неубывающую неограниченную функцию $f': \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$ следующим образом:

$$f'_p(i) = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leq i \leq n_p, \\ f_p(i), & \text{если } i > n_p. \end{cases}$$

Получаем, что $h_p(p^i kg') > d(i + f'_p(i))$ для любого $i \in \mathbb{N}_0$, т. е. элемент kg' удовлетворяет условию $(*)$ для d и p . Следовательно, $g' \in A^*$, и значит, $g \in G^{**}$.

Теперь легко убедиться, что G^{**} — сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G , содержащая $T(G)$ и G^* . Так как G/G^* и G^{**}/G^* являются делимыми группами без кручения и по условию G/G^* имеет конечный ранг,

то фактор-группа $G/G^{**} \cong (G/G^*)/(G^{**}/G^*)$ — делимая группа без кручения конечного ранга.

Пусть $\times$ — ассоциативное умножение на G . Оно продолжается единственным образом до ассоциативного умножения на A [7, теорема 119.3]. Так как $\tilde{G}$ — вполне характеристическая подгруппа группы G , то такой же является и подгруппа $\bigcap_p p\tilde{G}$, следовательно, $\bigcap_p p\tilde{G}$ — идеал кольца $(G, \times)$. Покажем, что $\bigcap_p p\tilde{G}$ — ниль-идеал. Пусть $g \in \bigcap_p p\tilde{G}$. Если некоторая степень $g^k = g \times \dots \times g$ (k сомножителей) принадлежит $T(G)$, то $g^k \in \bigcap_p pT(G)$, и следовательно, g — нильпотентный элемент кольца $(G, \times)$.

Пусть никакая степень g не содержится в $T(G)$. Допустим, что при некотором натуральном n элементы $g, g^2, \dots, g^n$ линейно зависимы. Тогда найдутся такие числа $c_k, \dots, c_n$ ($k \leq n$), что $c_k \neq 0$ и

$$c_k g^k + \dots + c_n g^n = 0. \quad (4)$$

Обозначим $h_p(g) = m_p \geq 1$, $h_p(g^k) = u_p$. Так как $g^k \notin T(G)$, то для каждого p из некоторого бесконечного множества простых чисел $u_p < \infty$. Зафиксируем одно из таких p и запишем элементы $\pi_p(g)$, $\pi_p(g^k)$ и $\pi_p(g^{k+t})$ ($t \geq 1$) в виде

$$\begin{aligned} \pi_p(g) &= (p^{m_p} s_{i_1}^{(p)} p_i^{(p)})_{i \in I_p}, \\ \pi_p(g^k) &= (p^{u_p} s_{i_k}^{(p)} e_i^{(p)})_{i \in I_p}, \\ \pi_p(g^{k+t}) &= (p^{u_p + m_p t} s_{i_{k+t}}^{(p)} e_i^{(p)})_{i \in I_p}, \end{aligned}$$

где $s_{il}^{(p)} \in \mathbb{Z}$, $l = 1, \dots, n$. Тогда существует такой индекс $i_p \in I_p$, что $o(e_{i_p}^{(p)}) = p^{r_p}$, $u_p < r_p$ и p не делит $s_{i_p, k}^{(p)}$. Из (4) следует, что

$$c_k p^{u_p} s_{i_p, k}^{(p)} + c_{k+1} p^{u_p + m_p} s_{i_p, k+1}^{(p)} + \dots + c_n p^{u_p + m_p(n-k)} s_{i_p, n}^{(p)} \equiv 0 \pmod{p^{r_p}}$$

и, значит,

$$c_k p^{u_p} s_{i_p, k}^{(p)} + c_{k+1} p^{m_p} s_{i_p, k+1}^{(p)} + \dots + c_n p^{m_p(n-k)} s_{i_p, n}^{(p)} \equiv 0 \pmod{p^{r_p - u_p}}.$$

Получаем, что $c_k s_{i_p, k}^{(p)} \equiv 0 \pmod{p}$, и следовательно, p делит c_k . Так как множество таких p бесконечно, то $c_k = 0$. Значит, элементы $g, \dots, g^n$ линейно независимы при любом натуральном n .

Пусть $n \in \mathbb{N}$. Покажем, что элементы $g + G^*, \dots, g^n + G^*$ линейно независимы в G/G^* . Допустим, $c_1 g + \dots + c_n g^n \in G^*$, где $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{Z}$. Так как $g \in \bigcap_p p\tilde{G}$, то $c_1 g + \dots + c_n g^n \in \bigcap_p p\tilde{G}^*$, и следовательно, по [4, теорема 5] существует такое натуральное число k , что

$$(c_1 g + \dots + c_n g^n)^k = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq n, \\ 1 \leq i_k \leq n}} c_{i_1} \cdot \dots \cdot c_{i_k} g^{i_1 + \dots + i_k} = 0.$$

В этой сумме коэффициент при g^k равен c_1^k , коэффициент при g^{nk} равен c_n^k . По доказанному выше элементы $g^k, \dots, g^{nk}$ линейно независимы, поэтому $c_1 = c_n = 0$. Аналогично получаем, что $c_2 = \dots = c_{n-1}$. Таким образом, элементы $g + G^*, \dots, g^n + G^*$ линейно независимы при любом натуральном n , что противоречит конечности ранга группы G/G^* . Следовательно, элемент g нильпотентен в кольце $(G, \times)$, откуда получаем, что $\bigcap_p pG$ — ниль-идеал этого кольца.

Рассмотрим теперь подгруппу $\bigcap_p pG^{**}$. Она является идеалом кольца $(G, \times)$, так как G^{**} — сервантная вполне характеристическая подгруппа группы G . Любой элемент $g \in \bigcap_p pG^{**}$ можно представить в виде $g = \tilde{g} + g^*$, где $\tilde{g} \in \tilde{A}$, $g^* \in A^*$.

Тогда существует такое натуральное число n , что $(g^*)^n \in T(A)$ [4, лемма 2]. Так как $\tilde{A}$ — идеал кольца $(A, \times)$, то $g^n \in \tilde{A} \cap G = \tilde{G}$. Но $g^n \in \bigcap_p pG$, следовательно,

элемент g^n содержится в подгруппе $\bigcap_p p\tilde{G}$, являющейся ниль-идеалом, поэтому $g^{nm} = 0$ для некоторого $m \in \mathbb{N}$. Таким образом, подгруппа $\bigcap_p pG^{**}$ является ниль-идеалом кольца $(G, \times)$.

Покажем, что идеал $\bigcap_p pG$ кольца $(G, \times)$ является ниль-идеалом. Так как аддитивная группа фактор-кольца $(G/G^{**}, \times)$ является делимой группой без кручения конечного ранга, то по основной теореме Веддербёрна о сепарабельных конечномерных алгебрах [6] существует разложение $G/G^{**} = S \oplus F$ векторного пространства G/G^{**} в прямую сумму векторных пространств. Здесь S — полупростая подалгебра в алгебре $(G/G^{**}, \times)$, F — радикал этой алгебры, обязательно нильпотентный.

Покажем, что $S = 0$. Допустим противное. Тогда в подалгебре S , а значит и в алгебре $(G/G^{**}, \times)$, существует ненулевой идемпотентный элемент $g + G^{**}$, т. е. элемент g не принадлежит группе G^{**} и

$$g \times g = g + \tilde{g} + g^*, \quad (5)$$

где $\tilde{g} \in \tilde{A}$, $g^* \in A^*$. Для элемента g^* выполняется следующее условие

найдутся $d > 1$ и $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, такие что для каждого p

найдётся неубывающая неограниченная функция $f_p: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{N}_0$, такая что

$$\text{для любого } i \in \mathbb{N}_0 \text{ справедливо } h_p(p^i k g^*) > d(i + f_p(i)). \quad (6)$$

Так как $kg \notin G^{**}$, то существует такое простое число p , что

$$\text{для каждого } n \in \mathbb{N}_0 \text{ найдётся } i > n, \text{ такое что } h_p(p^i k g) \leq d(i + f_p(i)). \quad (7)$$

Зафиксируем это p . Из (5) следует, что $\pi_p(kg \times g) = \pi_p(kg) + \pi_p(k\tilde{g}) + \pi_p(kg^*)$. Так как $\tilde{g} \in \tilde{A}$, то существует такое натуральное число n_0 , что $p^{n_0} \pi_p(k\tilde{g}) = 0$. Поэтому $\pi_p(p^i k g \times g) = \pi_p(p^i k g) + \pi_p(p^i k g^*)$ для всех $i \geq n_0$. Из делимости группы $G/T(G)$ следует, что существует натуральное число n_1 , такое что $h_p(p^i g) > i + 1$ для всех $i \geq n_1$, т. е. для всех $i \geq n_1$ существуют такие элементы $g_i \in G$, что $p^i g = p^{i+1} g_i$.

Пусть $\bar{n} = \max\{n_0, n_1\}$. Тогда из (6) и (7) получаем, что существует такое натуральное число $i_0 > \bar{n}$, что

$$h_p(p^{i_0}kg) \leq d(i_0 + f_p(i_0)) < h_p(p^{i_0}kg^*).$$

Следовательно, $h_p(p^{i_0}kg \times g) = h_p(p^{i_0}kg)$. С другой стороны,

$$h_p(p^{i_0}kg \otimes g) = h_p(kp^{i_0+1}g_{i_0} \otimes g) = h_p(pg_{i_0} \otimes p^{i_0}kg) \geq 1 + h_p(p^{i_0}kg).$$

Но из (7) следует, что элемент $\pi_p(g)$ имеет бесконечный порядок, поэтому $h_p(p^{i_0}kg) \in \mathbb{N}$ и $1 + h_p(p^{i_0}kg) > h_p(p^{i_0}kg)$. Таким образом, $h_p(p^{i_0}kg \otimes g) > h_p(p^{i_0}kg \times g)$, противоречие.

Следовательно, $S = 0$ и $(G/G^{**}, \times)$ — нильпотентная алгебра. Значит, для любого элемента $g \in \bigcap_p pG$ существует такое натуральное число n , что

$$g^n \in G^{**} \cap \left(\bigcap_p pG \right) = \bigcap_p pG^{**},$$

но так как $\bigcap_p pG^{**}$ — ниль-идеал кольца $(G, \times)$, то существует такое $m \in \mathbb{N}$, что $g^{nm} = 0$. Следовательно, $\bigcap_p pG$ — ниль-идеал кольца $(G, \times)$.

Пусть теперь $G^1 \neq 0$ и $\times$ — ассоциативное умножение на G . Тогда определено фактор-кольцо $(\bar{G}, \times)$. Аддитивная группа этого кольца является dqt-группой, и фактор-группа $\bar{G}/(\bar{G})^* = (G/G^1)/(G^*/G^1) \cong G/G^*$ имеет конечный ранг. Следовательно, для любого элемента $g \in \bigcap_p pG$ существует такое $n \in \mathbb{N}$, что $g^n \in G^1$. Так как $G^1 \times G^1 = 0$ [4], то $g^{2n} = 0$. Следовательно, $\bigcap_p pG$ — ниль-идеал кольца $(G, \times)$. $\square$

Из теорем 4 и 9 получаем следствия.

Следствие 10. Пусть G — такая dqt-группа, что фактор-группа G/G^* имеет конечный ранг. Тогда

$$N^*(G) = J^*(G) = \bigcap_p pG.$$

Следствие 11. Пусть G — такая dqt-группа, что фактор-группа G/G^* имеет конечный ранг. Пусть

$$G^{**} = \{g \in G \mid \text{найдутся } d > 1 \text{ и } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\},$$

такие что kg удовлетворяет условию (**) для d и любого $p\}$

и $G \neq G^{**}$. Тогда на группе G не существует ни одного ассоциативного кольца с единицей.

Следующий пример показывает, что условие $G \neq G^{**}$ в следствии 11 существенно.

Пример. Пусть $G = \prod_p \langle e_p \rangle$, где $o(e_p) = p$. Тогда $G = G^{**}$ и $G^* = T(G)$.

Если в группе $G/T(G)$ взять сервантную подгруппу $G_1/T(G)$, порождённую элементом $g + T(G)$, где $g = (e_p)_p$, то группа G_1 удовлетворяет условиям теоремы 9 и $G_1 = G_1^{**}$. Определим ассоциативное умножение $\times$ на G_1 , положив $(m_p e_p)_p \times (k_p e_p)_p = (m_p k_p e_p)_p$ для любых элементов $(m_p e_p)_p$ и $(k_p e_p)_p$ из G_1 . Нетрудно убедиться, что элемент g является единичным элементом в кольце $(G_1, \times)$.

Отметим, наконец, что класс групп, удовлетворяющих условиям теоремы 9, содержит все dqt-группы конечного ранга без кручения. Вместе с тем существуют dqt-группы G более чем счётного ранга без кручения, у которых ранг фактор-группы G/G^* конечен.

Пример. Рассмотрим группу C , являющуюся p -адическим пополнением группы $B = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} \langle e_k \rangle$, где $o(e_k) = p^k$. В группе C/C^* рассмотрим сервантную подгруппу G/C^* , порождённую элементом $g + C^*$, где $g \in C \setminus C^*$ (такой элемент g существует по теореме 6). Очевидно, $G^* = C^*$, $T(G) = T(C)$ и G/G^* — группа ранга 1. В [4] показано, что фактор-группа $G^*/T(G)$ имеет несчётный ранг, следовательно, и ранг группы $G/T(G)$ более чем счётный. Заметим, кстати, что $N^*(G) = J^*(G) = \bigcap_p pG \neq \bigcap_p pG^*$ по следствию 10.

В заключение приведём пример dqt-группы G , для которой

$$\bigcap_p pG^* \subsetneq N^*(G) \subsetneq \bigcap_p pG$$

и

$$\bigcap_p pG^* \subsetneq J^*(G) \subsetneq \bigcap_p pG.$$

Пример. Пусть T_p — редуцированная неограниченная p -группа, $C_p = \text{Ext}(\mathbb{Q}/\mathbb{Z}, T_p)$ — урегулированная копериодическая группа. По теореме 6 в группе C_p существует элемент $c_p \in pC_p \setminus pC_p^*$.

Пусть s, t, r — различные простые числа. Рассмотрим группы C_s, C_t, C_r и в них подгруппы A_s, A_t, A_r , определённые следующим образом. В группе C_s выберем такую подгруппу A_s , что $N^*(A_s) = J^*(A_s) = sA_s^* \neq sA_s$ (такая подгруппа существует по следствию 8). В фактор-группе C_t/C_t^* рассмотрим сервантную подгруппу A_t/C_t^* , порождённую элементом $c_t + C_t^*$. Так как $c_t \in tA_t$ и $c_t \notin tA_t^*$, то $N^*(A_t) = J^*(A_t) = tA_t \neq tA_t^*$ по следствию 10. Положим $A_r = C_r$. Тогда $N^*(A_r) = rA_r^*$, $J^*(A_r) = rA_r$ и $N^*(A_r) \neq J^*(A_r)$ по следствию 7.

Рассмотрим группы

$$G_1 = A_s \oplus A_t \oplus A_r, \quad G_2 = A_s \oplus A_t. \quad (8)$$

Группы A_i ($i = s, t, r$) являются вполне характеристическими подгруппами групп G_1 и G_2 , следовательно, в любом кольце на каждой из этих групп разложения 8 являются разложениями в прямую сумму идеалов. Поэтому нетрудно убедиться,

что

$$\begin{aligned} N^*(G_1) &= N^*(A_s) \oplus N^*(A_t) \oplus N^*(A_r) = sA_s^* \oplus tA_t \oplus rA_r^*, \\ J^*(G_1) &= J^*(A_s) \oplus J^*(A_t) \oplus J^*(A_r) = sA_s^* \oplus tA_t \oplus rA_r, \\ N^*(G_2) &= N^*(A_s) \oplus N^*(A_t) = sA_s^* \oplus tA_t, \\ J^*(G_2) &= J^*(A_s) \oplus J^*(A_t) = sA_s^* \oplus tA_t. \end{aligned}$$

Ясно, что для групп G_1 и G_2 выполняются следующие соотношения:

$$\bigcap_p pG_1^* \subsetneq N^*(G_1) \subsetneq \bigcap_p pG_1, \quad \bigcap_p pG_1^* \subsetneq J^*(G_1) \subsetneq \bigcap_p pG_1, \quad N^*(G_1) \neq J^*(G_1)$$

и

$$\bigcap_p pG_2^* \subsetneq N^*(G_2) \subsetneq \bigcap_p pG, \quad N^*(G_2) = J^*(G_2).$$

Литература

- [1] Джекобсон Н. Строение колец. — М.: ИЛ, 1961.
- [2] Иванов А. В. Абелевы группы с самоинъективными кольцами эндоморфизмов и кольцами эндоморфизмов с аннуляторным условием // Абелевы группы и модули. — Томск: ТГУ, 1982. — С. 93—109.
- [3] Компанцева Е. И. Кольца без кручения // Фундамент. и прикл. мат. — 2009. — Т. 15, № 8. — С. 95—143.
- [4] Компанцева Е. И. Абсолютные ниль-идеалы абелевой группы // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 8. — С. 63—76.
- [5] Крылов П. А. Смешанные абелевы группы как модули над своими кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 2000. — Т. 6, вып. 3. — С. 793—812.
- [6] Кертис К., Райнер И. Теория представлений конечных групп и ассоциативных алгебр. — М.: Наука, 1969.
- [7] Фукс Л. Бесконечные абелевы группы. Т. 1, 2. — М.: Мир, 1974; 1977.
- [8] Fuchs L., Rangaswamy K. M. On generalized regular rings // Math. Z. — 1968. — Vol. 107. — P. 71—81.
- [9] Rangaswamy K. M. Abelian groups with endomorphic images of special types // J. Algebra. — 1967. — Vol. 6. — P. 271—280.
- [10] Toubassi E. H., Lawver D. A. Height-slope and splitting length of Abelian groups // Publ. Mat. — 1973. — Vol. 20. — P. 63—71.

