Симметрические многочлены и не конечно порождённые $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные идеалы*

Э. А. ДА КОСТА
Университет Бразилиа, Бразилия
e-mail: eudes@uft.edu.br

А. Н. КРАСИЛЬНИКОВ
Университет Бразилиа, Бразилия
e-mail: alexei@unb.br

УДК 512.552.2+512.552.3

Ключевые слова: многочлены, инвариантные идеалы, конечные порождающие множества.

Аннотация

Пусть K — поле, а $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество положительных целых чисел. Пусть $R_n = K[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N}]$ — кольцо многочленов от x_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N})$ над K. Пусть $\mathrm{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, 2, \ldots, n\})$ и $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ — группы перестановок множеств $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $\mathbb{N}$ соответственно. Тогда S_n и $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ действуют на R_n естественным образом: $\tau(x_{ij}) = x_{\tau(i)j}$ и $\sigma(x_{ij}) = x_{i\sigma(j)}$ для всех $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathrm{S}_n$ и $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Пусть $\bar{R}_n$ — подалгебра (S_n-)симметрических многочленов в R_n, то есть

$$\bar{R}_n = \{f \in R_n \mid \tau(f) = f \text{ для каждого } \tau \in \mathrm{S}_n\}.$$

Идеал I в $\bar{R}_n$ называется $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантным, если $\sigma(I) = I$ для каждого $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. В 1992 году второй автор доказал, что если $\mathrm{char}(K) = 0$ или $\mathrm{char}(K) = p > n$, то каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в $\bar{R}_n$ конечно порождённый (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал). В этой заметке мы доказываем, что это не так, если $\mathrm{char}(K) = p \leqslant n$. Мы также делаем короткий обзор некоторых результатов о $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантных идеалах в алгебрах многочленов и связанных с этим вопросов.

Abstract

E. A. da Costa, A. N. Krasilnikov, Symmetric polynomials and nonfinitely generated $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$*-invariant ideals*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 69—76.

Let K be a field and let $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ be the set of all positive integers. Let $R_n = K[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N}]$ be the ring of polynomials in x_{ij} $(1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N})$ over K. Let $\mathrm{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, 2, \ldots, n\})$ and $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ be the groups of permutations of the sets $\{1, 2, \ldots, n\}$ and $\mathbb{N}$, respectively. Then S_n and $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ act on R_n in a natural way:

*Первый автор поддержан грантом Национального совета Бразилии по научно-техническому развитию 554712/2009-1. Второй автор частично поддержан грантом Национального совета Бразилии по научно-техническому развитию 307328/2012-0, грантом Университета Бразилиа и грантом РФФИ 11-01-00945.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 69—76.

$\tau(x_{ij}) = x_{\tau(i)j}$ and $\sigma(x_{ij}) = x_{i\sigma(j)}$, for all $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ and $j \in \mathbb{N}$, $\tau \in \mathrm{S}_n$ and $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Let $\bar{R}_n$ be the subalgebra of (S_n-)symmetric polynomials in R_n, i.e.,

$$\bar{R}_n = \{f \in R_n \mid \tau(f) = f \text{ for each } \tau \in \mathrm{S}_n\}.$$

An ideal I in $\bar{R}_n$ is called $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-invariant if $\sigma(I) = I$ for each $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. In 1992, the second author proved that if $\mathrm{char}(K) = 0$ or $\mathrm{char}(K) = p > n$, then every $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-invariant ideal in $\bar{R}_n$ is finitely generated (as such). In this note, we prove that this is not the case if $\mathrm{char}(K) = p \leqslant n$. We also survey some results about $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-invariant ideals in polynomial algebras and some related topics.

Посвящается А. Л. Шмелькину по случаю его 75-летия
и В. Т. Маркову по случаю его 65-летия

1. Введение

Пусть K — ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей, а $\mathbb{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — множество положительных целых чисел. Пусть

$$R_n = K[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N}] \,—$$

кольцо многочленов от x_{ij} ($1 \leqslant i \leqslant n$, $j \in \mathbb{N}$) над K.

Если A — непустое множество, то $\mathrm{Sym}(A)$ будет обозначать группу всех перестановок A. Группа $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ действует на R_n естественным образом: $\sigma(x_{ij}) = x_{i\sigma(j)}$, если $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Идеал I в R_n называется $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-*инвариантным*, если $\sigma(I) = I$ для всех $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$.

Ясно, что R_n содержит идеалы, не являющиеся конечно порождёнными. Тем не менее справедлива следующая теорема.

Теорема 1 (см. [5, 7, 8, 16]). *Пусть K — нётерово ассоциативное и коммутативное кольцо с единицей. Тогда каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в R_n конечно порождённый* (*как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал*).

Для $n = 1$ эта теорема была доказана Д. Коэном [7] в 1967 г. и независимо переоткрыта М. Ашенбреннером и К. Хилларом [5] в 2007 г. Для произвольного положительного n она была доказана Д. Коэном [8] в 1987 г. и независимо переоткрыта К. Хилларом и С. Салливантом [16] в 2012 г. Результаты Д. Коэна были мотивированы проблемой конечности базиса тождеств метабелевых групп, а результаты М. Ашенбреннера, К. Хиллара и С. Салливанта — приложениями в химии и алгебраической статистике.

Пусть

$$d_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \det \begin{pmatrix} x_{1i_1} & x_{1i_2} & \ldots & x_{1i_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{ni_1} & x_{ni_2} & \ldots & x_{ni_n} \end{pmatrix} \,—$$

определитель приведённой выше матрицы. Ясно, что $d_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ — многочлен, лежащий в R_n. Пусть L_n — подалгебра в R_n, порождённая всевозможными многочленами $d_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ ($i_l \in \mathbb{N}$). Тогда группа $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ действует на L_n естественным образом: $\sigma(d_{i_1 i_2 \ldots i_n}) = d_{\sigma(i_1)\sigma(i_2)\ldots\sigma(i_n)}$ ($\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$). Также естественным образом определяются $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные идеалы в L_n.

Приведённый ниже результат был доказан Я. Драйсмой [9] в 2010 г. Этот результат решает поставленную в [5] проблему, возникшую в приложениях к алгебраической статистике и химии.

Теорема 2 (см. [9]). *Пусть K — поле характеристики 0. Тогда каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в L_n конечно порождённый (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал).*

Однако теорема 2 оказывается в общем случае неверной над полем простой характеристики: над полем K характеристики 2 алгебра L_2 содержит $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные идеалы, не являющиеся конечно порождёнными. Точнее, справедлива следующая теорема.

Теорема 3 (см. [12]). *Пусть K — поле характеристики 2. Пусть I — $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в L_2, порождённый множеством*

$$\{d_{12}d_{23}\ldots d_{(k-1)k}d_{1k} \mid k = 3, 4, \ldots\}.$$

Тогда I не является конечно порождённым $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантным идеалом.

Доказательство теоремы 3 основано на идеях М. Вон-Ли [17], развитых для того, чтобы построить пример не конечно базируемого многообразия алгебр Ли, являющихся расширениями абелевых алгебр с помощью нильпотентных.

Неизвестно, является ли подалгебра L_n $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-нётеровой, если поле K имеет характеристику $p > 2$. Чтобы найти подход к решению этого вопроса, можно рассмотреть более простой (но схожий) вопрос о $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-нётеровости подалгебры $\bar{R}_n$ симметрических многочленов, определяемой ниже.

Пусть $\mathrm{S}_n = \mathrm{Sym}(\{1, 2, \ldots, n\})$. Группа S_n действует на R_n естественным образом: $\tau(x_{ij}) = x_{\tau(i)j}$. Другими словами, S_n действует на бесконечной матрице

$$\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \ldots & x_{1i} & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n1} & x_{n2} & \ldots & x_{ni} & \ldots \end{pmatrix},$$

переставляя её строки.

Мы будем называть многочлен $f \in R_n$ *симметрическим*, если $\tau(f) = f$ для всех $\tau \in \mathrm{S}_n$. Пусть $\bar{R}_n$ — множество всех симметрических многочленов из R_n. Ясно, что $\bar{R}_n$ — $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантная K-подалгебра в R_n. $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные идеалы в $\bar{R}_n$ определяются естественным образом.

Приведённая ниже теорема была доказана вторым автором настоящей заметки в [4, лемма 7] в 1992 г., чтобы доказать конечность базиса тождеств определённых многообразий алгебр Ли, являющихся расширениями нильпотентных алгебр с помощью абелевых.

Теорема 4 (см. [4]). *Пусть K — поле характеристики 0 или характеристики $p > n$. Тогда каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в $\bar{R}_n$ конечно порождённый (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал).*

Целью настоящей заметки является доказательство следующей теоремы.

Теорема 5. *Пусть K — поле характеристики p, $0 < p \leqslant n$. Тогда алгебра $\bar{R}_n$ содержит $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные идеалы, не являющиеся конечно порождёнными.*

Таким образом, алгебра $\bar{R}_n$ является $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-нётеровой, если $\operatorname{char} K = 0$ или $\operatorname{char} K > n$, и не является $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-нётеровой, если $0 < \operatorname{char} K \leqslant n$. Возможно (хотя пока это остаётся неизвестным), что так же обстоит дело и с алгеброй L_n, если $\operatorname{char} K > 2$.

Теорема 5 сразу вытекает из следующего результата. Для каждого $k \in \mathbb{N}$ пусть h_k — многочлен из R_n, определяемый следующим образом:

$$h_k = x_{11}x_{12}\ldots x_{1k} + x_{21}x_{22}\ldots x_{2k} + \ldots + x_{n1}x_{n2}\ldots x_{nk}.$$

Например,

$$h_1 = x_{11} + x_{21} + \ldots + x_{n1}, \quad h_2 = x_{11}x_{12} + x_{21}x_{22} + \ldots + x_{n1}x_{n2}.$$

Ясно, что $h_k \in \bar{R}_n$ для всех k.

Пусть U — $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный идеал в $\bar{R}_n$, порождённый множеством

$$\{h_k \in \bar{R}_n \mid k = 1, 2, \ldots\}.$$

Наш основной результат состоит в следующем.

Теорема 6. *Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Предположим, что $n \geqslant p$. Тогда идеал U не является конечно порождённым $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантным идеалом в $\bar{R}_n$.*

Мы докажем теорему 6, доказав следующий немного более сильный результат.

Теорема 7. *Пусть K — поле характеристики $p > 0$. Предположим, что $n \geqslant p$. Тогда ни для какого $k \in \mathbb{N}$ многочлен h_k не лежит в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале $\bar{R}_n$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$.*

Замечания.

1. Другие недавно полученные результаты о $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-нётеровых алгебрах многочленов можно найти, например, в статьях [6, 11, 13—15], обзоре [10] и в работах, указанных в списке литературы этих статей.
2. В [4] было доказано, что если $\operatorname{char} K = 0$ или $\operatorname{char} K > n$, то каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный $\bar{R}_n$-подмодуль из R_n конечно порождённый (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный $\bar{R}_n$-подмодуль).
3. Пусть Ψ — множество эндоморфизмов ψ_{kl} $(k \neq l)$ кольца многочленов $R_n = K[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant n,\ j \in \mathbb{N}]$, таких что

$$\psi_{kl}(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ik}x_{il}, & \text{если } j = l; \\ x_{ij} & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Будем называть подмножество S из R_n Ψ-замкнутым, если $\psi_{kl}(S) \subseteq S$ для всех $\psi_{kl} \in \Psi$. В [2] было доказано, что над нётеровым ассоциативным и коммутативным кольцом K с единицей каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный Ψ-замкнутый $\bar{R}_n$-подмодуль в R_n конечно порождённый (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный Ψ-замкнутый $\bar{R}_n$-подмодуль). Более того, над таким K каждый $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантный Ψ-замкнутый $\tilde{R}_n$-подмодуль в R_n конечно порождённый [3]. Здесь $\tilde{R}_n$ — K-подалгебра в $\bar{R}_n$, порождённая всеми произведениями вида

$$f(x_{11}, x_{12}, \ldots) f(x_{21}, x_{22}, \ldots) \ldots f(x_{n1}, x_{n2}, \ldots),$$

где $f(t_1, t_2, \ldots) \in K[t_i \mid i \in \mathbb{N}]$. Отметим, что результат о $\bar{R}_n$-модулях доказывается с использованием техники, похожей на технику Д. Коэна [7], тогда как в доказательстве результата о $\tilde{R}_n$-модулях важную роль играют другие соображения. Эти результаты о конечно порождённых $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантных Ψ-замкнутых $\bar{R}_n$- и $\tilde{R}_n$-подмодулях в R_n были получены в [2, 3] для того, чтобы решить проблему конечности базиса тождеств для определённых многообразий групп и их представлений.

4. Пусть M — свободная метабелева группа, свободно порождённая множеством $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$. Тогда группа $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$ действует на M, переставляя свободные порождающие x_i. Д. Коэн [7] доказал, что в M все $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные нормальные подгруппы конечно порождённые (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные нормальные подгруппы). Приложение этого результата к решению одной теоретико-групповой проблемы можно найти, например, в [1]. Отметим, что $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные нормальные подгруппы свободных групп многообразия конечно порождённые (как $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантные нормальные подгруппы) не только в многообразии метабелевых групп, но также в некоторых бо́льших многообразиях [18]. Нетрудно показать, однако, что в многообразии центрально-метабелевых групп (а значит, и ни в каких многообразиях, его содержащих) это свойство не выполнено.

2. Доказательство теоремы 7

Отметим, что при доказательстве теоремы 7 без ограничения общности можно считать, что $n = p$. Действительно, предположим, что $n > p$. Пусть $\psi\colon R_n \to R_p$ — гомоморфизм R_n на R_p, такой что

$$\psi(x_{ij}) = \begin{cases} x_{ij}, & \text{если } 1 \leqslant i \leqslant p, \\ 0, & \text{если } p < i \leqslant n. \end{cases}$$

Ясно, что $\psi(\bar{R}_n) = \bar{R}_p$ и $\psi\sigma = \sigma\psi$ для всех $\sigma \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$. Следовательно, для того чтобы доказать, что многочлен

$$h_k = x_{11}x_{12}\ldots x_{1k} + x_{21}x_{22}\ldots x_{2k} + \ldots + x_{n1}x_{n2}\ldots x_{nk}$$

не содержится в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_n$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$, достаточно доказать, что многочлен

$$\psi(h_k) = x_{11}x_{12}\ldots x_{1k} + x_{21}x_{22}\ldots x_{2k} + \ldots + x_{p1}x_{p2}\ldots x_{pk}$$

не лежит в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\psi(\bar{R}_n) = \bar{R}_p$, порождённом множеством $\{\psi(h_l) \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$, где

$$\psi(h_l) = x_{11}x_{12}\ldots x_{1l} + x_{21}x_{22}\ldots x_{2l} + \ldots + x_{p1}x_{p2}\ldots x_{pl}.$$

Значит, теорему достаточно доказать в предположении $n = p$, как и утверждалось.

Пусть $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ — простое подполе в K, $\mathbb{F}_p < K$. Заметим, что при доказательстве теоремы 7 можно без ограничения общности предполагать, что $K = \mathbb{F}_p$. Действительно, пусть $R_{p,\mathbb{F}_p} = \mathbb{F}_p[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ j \in \mathbb{N}]$, и пусть $\bar{R}_{p,\mathbb{F}_p}$ — подалгебра симметрических многочленов в $R_{p,\mathbb{F}_p}$. Тогда $R_{p,\mathbb{F}_p} < R_p = K[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ j \in \mathbb{N}]$, $\bar{R}_{p,\mathbb{F}_p} < \bar{R}_p$ и $h_k \in \bar{R}_{p,\mathbb{F}_p}$ для всех k.

Предположим, что h_k содержится в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_p$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$. Тогда

$$h_k = \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) f_s,$$

где $\sigma_s \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, $f_s \in \bar{R}_p$, $l_s < k$ для всех s. Пусть $\mathcal{B}$ — базис K, рассматриваемого как векторное пространство над $\mathbb{F}_p$, такой что $1 \in \mathcal{B}$. Тогда для каждого s выполнено $f_s = f_{s,0} + \sum_t b_t f_{s,t}$, где $f_{s,0} \in R_{p,\mathbb{F}_p}$ и для всех t $b_t \in \mathcal{B} \setminus \{1\}$, $f_{s,t} \in R_{p,\mathbb{F}_p}$. Следовательно,

$$h_k = \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) f_{s,0} + \sum_s \sum_t b_t\, \sigma_s(h_{l_s}) f_{s,t}.$$

Так как $h_k, \sigma_s(h_{l_s}) f_{s,0}, \sigma_s(h_{l_s}) f_{s,t} \in R_{p,\mathbb{F}_p}$, мы получаем

$$h_k = \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) f_{s,0}. \tag{1}$$

Заметим, что $f_{s,0} \in \bar{R}_{p,\mathbb{F}_p}$ для всех s. Действительно, для каждого $\tau \in \mathrm{S}_n$ имеем

$$f_{s,0} + \sum_t b_t f_{s,t} = f_s = \tau(f_s) = \tau(f_{s,0}) + \sum_t b_t \tau(f_{s,t}),$$

откуда следует, что $\tau(f_{s,0}) = f_{s,0}$. Таким образом, если h_k содержится в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_p$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$, то в силу (1) h_k лежит в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_{p,\mathbb{F}_p}$, порождённом $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$. Следовательно, при доказательстве теоремы можно предполагать, что $K = \mathbb{F}_p$.

С этого момента мы будем считать, что $K = \mathbb{F}_p$, и будем писать R_p и $\bar{R}_p$ вместо соответственно $R_{p,\mathbb{F}_p}$ и $\bar{R}_{p,\mathbb{F}_p}$.

Пусть $R = \mathbb{Z}[x_{ij} \mid 1 \leqslant i \leqslant p,\ j \in \mathbb{N}]$. Пусть $\mu\colon R \to R_p$ — гомоморфизм R на R_p, такой что $\mu(x_{ij}) = x_{ij}$ для всех i, j. Предположим от противного, что h_k содержится в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_p$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$. Тогда в $\bar{R}_p$ выполнено равенство

$$h_k = \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) f_s,$$

где $\sigma_s \in \mathrm{Sym}(\mathbb{N})$, $f_s \in \bar{R}_p$, $l_s < k$ для всех s. Но это значит, что в R выполняется равенство

$$h_k = \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) g_s + pg, \tag{2}$$

где $g_s, g \in R$, $\mu(g_s) = f_s$ для всех s. Ясно, что мы можем предполагать, что $g_s \in \bar{R}$ для всех s. Значит,

$$g = \frac{1}{p}\biggl(h_k - \sum_s \sigma_s(h_{l_s}) g_s\biggr) \in \bar{R}.$$

Пусть

$$m = x_{11}^{u_{11}}\, x_{21}^{u_{21}} \ldots x_{p1}^{u_{p1}}\, x_{12}^{u_{12}}\, x_{22}^{u_{22}} \ldots x_{p2}^{u_{p2}} \ldots x_{1k}^{u_{1k}}\, x_{2k}^{u_{2k}} \ldots x_{pk}^{u_{pk}} \in R \text{ —}$$

одночлен. Определим *полистепень* $d(m)$ одночлена m следующим образом:

$$d(m) = (u_1, u_2, \ldots, u_k, 0, 0, \ldots),$$

где $u_k = u_{1k} + u_{2k} + \ldots + u_{pk}$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Заметим, что $d(m \cdot m') = d(m) + d(m')$ для всех одночленов m, m' из R. Заметим также, что мы можем предполагать, что все многочлены h_k, $\sigma_s(h_{l_s}) g_s$ и g в (2) имеют одну и ту же полистепень $(1, 1, \ldots, 1, 0, 0, \ldots)$.

Пусть $S = \mathbb{Z}[t_j \mid j \in \mathbb{N}]$. Определим гомоморфизм $\eta\colon R \to S$ алгебры R на S, полагая $\eta(x_{ij}) = t_j$. Ясно, что $\eta(h_k) = pt_1 t_2 \ldots t_k$, $\eta\bigl(\sigma_s(h_{l_s})\bigr) = pt_{\sigma_s(1)} t_{\sigma_s(2)} \ldots t_{\sigma_s(l_s)}$.

Заметим, что если $m \in R$ — одночлен полистепени $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, 0, 0, \ldots)$, где $\varepsilon_j = 0, 1$, то число элементов S_p-орбиты m кратно p. Значит, $\eta(m) = p(qm')$ для некоторого одночлена $m' \in S$ и некоторого $q \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для всех s выполнено $\eta(g_s) = pu_s$ и $\eta(g) = pu$ для некоторых $u_s, u \in S$.

Применяя η к обеим частям равенства (2), получаем

$$pt_1 t_2 \ldots t_k = p^2 \sum_s t_{\sigma_s(1)} t_{\sigma_s(2)} \ldots t_{\sigma_s(l_s)} u_s + p^2 u$$

для некоторых $u_s, u \in S$. Получено противоречие, поскольку правая часть приведённого выше равенства — (ненулевое) кратное p^2 в кольце многочленов $S = \mathbb{Z}[t_j \mid j \in \mathbb{N}]$, а левая часть на p^2 не делится. Значит, h_k не лежит в $\mathrm{Sym}(\mathbb{N})$-инвариантном идеале алгебры $\bar{R}_p$, порождённом множеством $\{h_l \mid l \in \mathbb{N},\ l \neq k\}$, что и требовалось доказать.

Теорема 7 доказана.

Литература

[1] Дерябина Г. С., Красильников А. Н. О разрешимых группах экспоненты 4 // Сиб. мат. журн. — 2003. — Т. 44. — С. 58—60.

[2] Красильников А. Н. О тождествах триангулируемых матричных представлений групп // Тр. ММО. — 1989. — Т. 52. — С. 229—245.

[3] Красильников А. Н. О конечности базиса тождеств групп с нильпотентным коммутантом // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1990. — Т. 54. — С. 1181—1195.

[4] Красильников А. Н. О тождествах алгебр Ли с нильпотентным коммутантом над полем конечной характеристики // Мат. заметки. — 1992. — Т. 51. — С. 47—52.

[5] Aschenbrenner M., Hillar C. J. Finite generation of symmetric ideals // Trans. Am. Math. Soc. — 2007. — Vol. 359. — P. 5171—5192.

[6] Brouwer A. E., Draisma J. Equivariant Gröbner bases and the Gaussian two-factor model // Math. Comp. — 2011. — Vol. 80. — P. 1123—1133.

[7] Cohen D. E. On the laws of a metabelian variety // J. Algebra. — 1967. — Vol. 5. — P. 267—273.

[8] Cohen D. E. Closure relations, Buchberger's algorithm, and polynomials in infinitely many variables // Computation Theory and Logic. — Berlin: Springer, 1987. — (Lect. Notes Comput. Sci.; Vol. 270). — P. 78—87.

[9] Draisma J. Finiteness for the k-factor model and chirality varieties // Adv. Math. — 2010. — Vol. 223. — P. 243—256.

[10] Draisma J. Noetherianity up to symmetry. — 2013. — arXiv:1310.1705.

[11] Draisma J., Eggermont R. H., Krone R., Leykin A. Noetherianity for infinite-dimensional toric varieties. — 2013. — arXiv:1306.0828.

[12] Draisma J., Krasilnikov A. Sym($\mathbb{N}$)-invariant ideals in a certain subalgebra of a polynomial algebra. — In preparation.

[13] Draisma J., Kuttler J. On the ideals of equivariant tree models // Math. Ann. — 2009. — Vol. 344. — P. 619—644.

[14] Draisma J., Kuttler J. Bounded-rank tensors are defined in bounded degree // Duke Math. J. — 2014. — Vol. 163, no. 1. — P. 1—266.

[15] Hillar C. J., Martín del Campo A. Finiteness theorems and algorithms for permutation invariant chains of Laurent lattice ideals // J. Symbol. Comput. — 2013. — Vol. 50. — P. 314—334.

[16] Hillar C. J., Sullivant S. Finite Gröbner bases in infinite dimensional polynomial rings and applications // Adv. Math. — 2012. — Vol. 229 — P. 1—25.

[17] Vaughan-Lee M. R. Abelian-by-nilpotent varieties of Lie algebras // J. London Math. Soc. (2). — 1975. — Vol. 11. — P. 263—265.

[18] Vaughan-Lee M. R. Abelian by nilpotent varieties // Quart. J. Math. Oxford Ser. (2). — 1970. — Vol. 21. — P. 193—202.