Раскраски частичных систем Штейнера и их приложения*

А. Б. КУПАВСКИЙ
Московский физико-технический институт (государственный университет)
e-mail: kupavskii@yandex.ru

Д. А. ШАБАНОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: dm.shabanov.msu@gmail.com

УДК 519.112.7+519.179.1+519.179.4

Ключевые слова: раскраски гиперграфов, разреженные гиперграфы, метод случайной перекраски, частичные системы Штейнера, случайный гиперграф.

Аннотация

В работе рассматриваются экстремальные задачи о раскрасках частичных систем Штейнера. Получено новое достаточное условие r-раскрашиваемости для некоторого класса подобных систем в терминах ограничения на максимальную степень вершины. Кроме того, в качестве следствия получена новая нижняя оценка для пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа в биномиальной модели.

Abstract

A. B. Kupavskii, D. A. Shabanov, Colorings of partial Steiner systems and their applications, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 77—115.

This paper deals with extremal problems concerning colorings of partial Steiner systems. We establish a new sufficient condition for r-colorability of a hypergraph from some class of such systems in terms of maximum vertex degree. Moreover, as a corollary we obtain a new lower bound for the threshold probability for r-colorability of a random hypergraph in a binomial model.

1. Введение и формулировки результатов

В настоящей работе исследуются экстремальные и вероятностные задачи о раскрасках гиперграфов. Вначале мы напомним основные определения из теории гиперграфов.

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 12-01-00683-а), программы поддержки ведущих научных школ (грант № НШ-2519.2012.1) и гранта Президента Российской Федерации МК-1122.2012.1.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 77—115.

1.1. Основные определения

Гиперграфом H называется пара $H = (V, E)$, где $V = V(H)$ — это конечное множество, называемое *множеством вершин гиперграфа*, а $E = E(H)$ — это некоторая совокупность подмножеств множества V (эти подмножества называются *рёбрами* гиперграфа). Если $E \subseteq \binom{V}{k}$, т. е. каждое ребро содержит ровно k вершин, то гиперграф H называется *k-однородным*. Через $K_n^{(k)}$ мы будем обозначать полный k-однородный гиперграф на n вершинах.

Раскраска множества вершин V называется *правильной* для гиперграфа $H = (V, E)$, если в этой раскраске никакие рёбра из E не являются одноцветными. Гиперграф H называется r-раскрашиваемым, если для него существует правильная раскраска вершин в r цветов (*r-раскраска*). Наконец, *хроматическим числом* $\chi(H)$ гиперграфа H называется такое минимальное число r, что H является r-раскрашиваемым.

Степенью вершины v в гиперграфе H называется число рёбер H, содержащих v. Мы будем обозначать максимальную степень вершины в гиперграфе H через $\Delta(H)$. *Циклом длины* 3 (*3-циклом* или *треугольником*) в гиперграфе H называется такая неупорядоченная тройка различных рёбер (e, f, h) этого гиперграфа, что $(e \cap f) \setminus h \neq \varnothing$, $(e \cap h) \setminus f \neq \varnothing$, $(h \cap f) \setminus e \neq \varnothing$.

Гиперграф $H = (V, E)$ называется *l-простым*, если каждые два его различных ребра имеют не более l общих вершин, т. е.

$$\text{для любых } e, f \in E,\ f \neq e,\ \text{ справедливо } |e \cap f| \leqslant l.$$

Кроме того, 1-простые гиперграфы принято называть просто *простыми*. Частным случаем l-простых гиперграфов являются так называемые системы Штейнера. *Системой Штейнера* $S(l, k, m)$ называется k-однородный гиперграф на m вершинах, любые l вершин которого содержатся (как подмножество) ровно в одном ребре гиперграфа. Таким образом, система Штейнера $S(l, k, m)$ является $(l-1)$-простым гиперграфом. Впервые понятие системы Штейнера появилось ещё в 1853 году в работе самого Дж. Штейнера [31]. Совокупности подмножеств, образующие системы Штейнера, часто возникают в различных задачах теории кодирования. Подробнее об этом можно прочитать, например, в обзоре [8] и книге [10]. В свою очередь, l-простые гиперграфы в мировой литературе принято называть *частичными системами Штейнера*.

1.2. Раскраски гиперграфов с ограниченными степенями вершин

Проблема r-раскрашиваемости гиперграфов в общем случае является NP-полной, и в связи с этим особый интерес для различных приложений представляет поиск легко проверяемых достаточных условий r-раскрашиваемости гиперграфов. Для этого, например, можно использовать результаты о количественной связи между хроматическим числом и другими характеристиками гиперграфа. Одной из наиболее естественных таких характеристик является максимальная степень вершины.

Первый результат, дающий достаточное условие r-раскрашиваемости k-однородного гиперграфа в терминах ограничения на максимальную степень вершины, был доказан П. Эрдёшем и Л. Ловасом в 1973 году в их знаменитой работе [15].

Теорема 1 (П. Эрдёш, Л. Ловас [15]). *Пусть $k \geqslant 3$, $r \geqslant 2$ — натуральные числа, H — k-однородный гиперграф с условием*

$$\Delta(H) \leqslant \frac{r^{k-1}}{ek}. \tag{1}$$

Тогда гиперграф H является r-раскрашиваемым.

Улучшения теоремы 1, ослабляющие условие (1) на $\Delta(H)$, были получены при различных соотношениях между параметрами r и k Дж. Радхакришнаном, А. Сринивасаном [26], А. В. Косточкой, М. Кумбхатом, В. Рёдлем [22], а также Д. А. Шабановым [27].

Для класса простых гиперграфов первый аналог теоремы П. Эрдёша и Л. Ловаса был доказан З. Сабо в 1990 году в [32].

Теорема 2 (З. Сабо [32]). *Пусть заданы $\varepsilon > 0$ и $r \geqslant 2$. Тогда существует такое число $k_0 = k_0(\varepsilon, r)$, что для любого $k > k_0$ и любого k-однородного простого гиперграфа H с условием*

$$\Delta(H) \leqslant r^{k-1}k^{-\varepsilon} \tag{2}$$

выполнено $\chi(H) \leqslant r$, т. е. H является r-раскрашиваемым.

В силу того что в формулировке теоремы 2 величина ε может быть выбрана сколь угодно близкой к нулю, её в формуле (2) можно заменить на некоторую функцию $\varepsilon(k, r) = o(1)$ при любом фиксированном r и растущем k. Из доказательства же самого З. Сабо (см. [32]) следует, что

$$\varepsilon(k, r) = \Theta\left(\sqrt[4]{\frac{\ln r}{\ln k}}\right).$$

Результат теоремы 2 был сначала обобщён на случай l-простых гиперграфов А. В. Косточкой и М. Кумбхатом [21], а затем оба эти результата были улучшены Д. А. Шабановым [28].

Теорема 3 (Д. А. Шабанов [28]). *Существует такое натуральное число k_0, что для всех $k > k_0$, всех $r \geqslant 2$ и $l \geqslant 2$, удовлетворяющих соотношению*

$$r \leqslant k^{1/9l}, \tag{3}$$

а также любого l-простого k-однородного гиперграфа H с условием

$$\Delta(H) \leqslant r^{k-1}k^{-3/t}, \tag{4}$$

где

$$t = t(k,r,l) = \left\lfloor \sqrt{\min\left(\frac{\ln k}{l\ln r},\ \frac{\ln k}{2\ln((4/3)\ln k)}\right)} \right\rfloor,$$

выполнено $\chi(H) \leqslant r$, *т. е.* H *является* r*-раскрашиваемым.*

Однако, как несложно понять из условия теоремы 3, она, как и теорема З. Сабо, даёт нетривиальную по сравнению с теоремой 1 оценку только в случае, когда параметр числа цветов r не слишком велик по сравнению с параметром однородности k. Это, во-первых, требуется уже в условии (3), а во-вторых, уже при $2l\ln r > \ln k$ величина t из (4) становится равной единице, а сама правая часть оценки (4) принимает вид $r^{k-1}k^{-3}$, что существенно слабее ограничения (1) в теореме П. Эрдёша и Л. Ловаса, не требующей l-простоты гиперграфа.

Таким образом, вопрос о том, можно ли доказать для произвольного соотношения между параметрами r и k аналог теоремы 3 с ограничением вида

$$\Delta(H) \leqslant r^{k-1}k^{-\varphi(k)}, \quad \varphi(k) = o(1) \ \text{ при } \ k \to \infty \tag{5}$$

вместо (4), остаётся открытым. Отметим, что перечисленные ранее улучшения теоремы 1 также весьма далеки от условия вида (5). В частности, наилучший в общей ситуации подобный результат для класса всех k-однородных гиперграфов, обоснованный А. В. Косточкой, М. Кумбхатом и В. Рёдлем [22], даёт следующее достаточное условие r-раскрашиваемости:

$$\Delta(H) \leqslant e^{-r^2}\left(\frac{k}{\ln k}\right)^{a/(a+1)}\frac{r^{k-1}}{k}, \quad a = \lfloor \log_2 r \rfloor.$$

Основным результатом настоящей работы является новое достаточное условие r-раскрашиваемости для некоторого специального подкласса 2-простых k-однородных гиперграфов. Обозначим через $\mathcal{H}(k,\omega)$ класс 2-простых k-однородных гиперграфов H, в которых каждое ребро содержится не более чем в ω 3-циклах. Тогда имеет место следующая теорема о раскрасках гиперграфов из $\mathcal{H}(k,\omega)$.

Теорема 4. *Существует такое натуральное число* k_0, *что для всех* $k \geqslant k_0$, $r \geqslant 2$, $\omega \leqslant \sqrt{\ln k/(\ln\ln k)}$ *и любого* $H \in \mathcal{H}(k,\omega)$ *с условием*

$$\Delta(H) \leqslant r^{k-1}k^{-4\left\lfloor \sqrt{\ln k/(\ln(2\ln k))} \right\rfloor^{-1}} \tag{6}$$

выполнено $\chi(H) \leqslant r$, *т. е.* H *является* r*-раскрашиваемым.*

Полученный в теореме 4 результат — это достаточное условие r-раскрашиваемости 2-простого гиперграфа искомого вида (5). Однако при этом в теореме мы требуем выполнения дополнительного условия на 3-циклы в гиперграфе: каждое ребро содержится не более чем в $\omega \leqslant \sqrt{\ln k/(\ln\ln k)}$ треугольников. Вопрос о том, можно ли доказать аналогичный результат для l-простых гиперграфов при $l > 2$, пока остаётся открытым.

Дальнейшая структура работы будет следующей. Во втором разделе мы обсудим задачу о пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа в биномиальной модели и сформулируем новую оценку в данной задаче. В разделе 3 мы выведем эту оценку из теоремы 4. Доказательству теоремы 4 будет посвящён раздел 4. Наконец, в разделе 5 мы обсудим задачи о предписанных раскрасках гиперграфов.

2. Раскрашиваемость случайных гиперграфов

Во втором разделе мы обсудим задачу о раскраске в теории случайных гиперграфов. Сначала напомним основные сведения из теории случайных подмножеств.

2.1. Общие сведения из теории случайных подмножеств

Пусть Γ — некоторое множество из N элементов. Пусть p — произвольное число из отрезка $[0,1]$. Случайным подмножеством $\Gamma(p)$ называется случайный элемент, принимающий значения во множестве всех подмножеств Γ и имеющий на нём распределение

$$\mathsf{P}(\Gamma(p) = G) = p^{|G|}(1-p)^{N-|G|}$$

для любого $G \subset \Gamma$. Данную модель $\Gamma(p)$ принято называть *биномиальной* (в этой модели, как несложно убедиться, элементы Γ включаются в $\Gamma(p)$ независимо друг от друга с вероятностью p).

Пусть $\mathcal{Q}$ — семейство подмножеств Γ («свойство» подмножеств Γ). Оно называется *монотонно возрастающим*, если из того, что $A \in \mathcal{Q}$ и $A \subset B$, следует, что B тоже принадлежит $\mathcal{Q}$. Семейство $\mathcal{Q}$ называется *монотонно убывающим*, если из того что $A \in \mathcal{Q}$ и $A \supset B$, следует, что $B \in \mathcal{Q}$. Ясно, что если система $\mathcal{Q}$ монотонно возрастает, то её дополнение $2^{\Gamma} \setminus \mathcal{Q}$ монотонно убывает.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы множество Γ_n мощности $N = N(n)$ ($N \to \infty$ при $n \to \infty$), а также монотонно возрастающая система подмножеств $\mathcal{Q}_n$ множества Γ_n. Функция $p^* = p^*(n) \in [0,1]$ называется *пороговой вероятностью* для системы $\{\mathcal{Q}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, если

— для любой последовательности $p = p(n)$ с условием $p \ll p^*$ выполнено

$$\mathsf{P}(\Gamma_n(p) \in \mathcal{Q}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

— для любой последовательности $p = p(n)$ с условием $p \gg p^*$ выполнено

$$\mathsf{P}(\Gamma_n(p) \in \mathcal{Q}_n) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Совершенно аналогично определяется понятие пороговой вероятности для системы монотонно убывающих семейств $\{\mathcal{Q}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ (как пороговая вероятность для $\{2^{\Gamma_n} \setminus \mathcal{Q}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$).

Замечательный факт, установленный Б. Боллобашем и Э. Томасоном в 1987 г. (см. [13]), состоит в том, что в случае монотонного семейства $\mathcal{Q}_n$ пороговая вероятность всегда существует.

Теорема 5 (Б. Боллобаш, Э. Томасон [13]). *Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы множество Γ_n мощности $N = N(n)$, $N \to \infty$ при $n \to \infty$, а также монотонно возрастающая система подмножеств $\mathcal{Q}_n$ множества Γ_n. Тогда для системы $\{\mathcal{Q}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$ существует пороговая вероятность $p^* = p^*(n)$.*

Отыскание пороговых вероятностей и пороговых функций для монотонных свойств случайных подмножеств является одной из центральных задач вероятностной комбинаторики.

Самой известной из изучаемых моделей случайных подмножеств являются случайные графы, качественное изучение которых началось со знаменитых работ [16, 17] П. Эрдёша и А. Реньи на рубеже 50-60-х годов XX века. Модель $G(n,p)$ случайных графов П. Эрдёша и А. Реньи — это биномиальная модель случайного подмножества $\Gamma_n(p)$, где в качестве Γ_n берётся множество всех рёбер полного графа на n вершинах. Случайные графы — это одна из центральных областей исследований вероятностной комбинаторики, им посвящено огромное число статей и монографий, среди которых особенно стоит выделить книги [3, 12, 20].

Естественным обобщением модели $G(n,p)$ случайного графа является биномиальная модель случайного гиперграфа $H(n,k,p)$, в которой в качестве исходного множества Γ_n берётся множество рёбер $K_n^{(k)}$, полного k-однородного гиперграфа на n вершинах. В настоящем разделе нас будет интересовать пороговая вероятность для монотонно убывающего свойства гиперграфов {хроматическое число не превосходит r}.

2.2. Пороговая вероятность r-раскрашиваемости случайного гиперграфа

Одним из самых замечательных результатов о пороговых вероятностях r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ является тот факт, что при фиксированных $k \geqslant 3$ и $r \geqslant 2$ данная пороговая является точной. Этот результат несложно получить, используя общие результаты Э. Фридгута [19] о необходимых и достаточных условиях существования точных пороговых вероятностей, а также аналогичное утверждение Э. Фридгута и Д. Ахлиоптаса [4] для случайного графа $G(n,p)$. Дадим определение точной пороговой вероятности в общем случае.

Пусть для каждого $n \in \mathbb{N}$ заданы множество Γ_n мощности $N = N(n)$ ($N \to \infty$ при $n \to \infty$), а также монотонно возрастающая система подмножеств $\mathcal{Q}_n$ множества Γ_n. Функция $p^* = p^*(n) \in [0,1]$ называется *точной пороговой вероятностью* для системы $\{\mathcal{Q}_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, если

— для любого $\varepsilon > 0$ и для любой последовательности $p = p(n)$ с условием $p \leqslant (1-\varepsilon)p^*$ выполнено

$$\mathsf{P}(\Gamma_n(p) \in \mathcal{Q}_n) \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty;$$

— для любого $\varepsilon > 0$ и для любой последовательности $p = p(n)$ с условием $p \geqslant (1+\varepsilon)p^*$ выполнено

$$\mathsf{P}(\Gamma_n(p) \in \mathcal{Q}_n) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Изучение точных пороговых вероятностей r-раскрашиваемости случайных гиперграфов началось с неопубликованной работы Н. Алона и Дж. Спенсера [7]. Им удалось доказать следующее утверждение.

Лемма 1 (Н. Алон, Дж. Спенсер). *Пусть $k \geqslant 3$ — фиксированное натуральное число.*

1. *Для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием*

$$p \geqslant (1+\varepsilon)2^{k-1}(\ln 2)\,\frac{n}{\binom{n}{k}}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant 2\bigr) = 0.$$

2. *Существуют такие абсолютные константы $c, k_0 > 0$, что для всех $k \geqslant k_0$ и любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием*

$$p \leqslant c\,\frac{2^k}{k^2}\,\frac{n}{\binom{n}{k}}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant 2\bigr) = 1.$$

Таким образом, Н. Алон и Дж. Спенсер нашли оценки точной пороговой вероятности 2-раскрашиваемости случайного k-однородного гиперграфа для фиксированного $k \geqslant 3$. Зазор между верхней и нижней оценкой в лемме 1 имеет порядок $\Theta(k^2)$. Первое улучшение результатов Н. Алона и Дж. Спенсера было получено Д. Ахлиоптасом, Дж. Кимом, М. Кривелевичем и П. Тетали в 2002 г. (см. [5]).

Теорема 6 (Д. Ахлиоптас, Дж. Ким, М. Кривелевич, П. Тетали [5]). *Для любого фиксированного $k \geqslant 3$ и любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ с условием*

$$p \leqslant \frac{1}{25}\,\frac{2^{k-1}}{k}\,\frac{n}{\binom{n}{k}}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant 2\bigr) = 1.$$

Как видно из теоремы 6, авторам удалось улучшить нижнюю оценку Н. Алона и Дж. Спенсера примерно в k раз. Почти точное значение пороговой вероятности 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа было найдено всё в том же 2002 г. Д. Ахлиоптасом и К. Муром (см. [6]). Они показали, что простая верхняя оценка Н. Алона и Дж. Спенсера была изначально близка к правильному ответу.

Теорема 7 (Д. Ахлиоптас, К. Мур [6]). *Существует такая функция $\delta(k) > 0$, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $p = p(n)$ с условием*

$$p \leqslant (1-\varepsilon)\left(2^{k-1}(\ln 2) - \left(\frac{\ln 2 + 1}{2}\right) - \delta(k)\right)\frac{n}{\binom{n}{k}}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(\chi\big(H(n,k,p)\big) \leqslant 2\big) = 1.$$

Доказательство теоремы 7 основано на уже упомянутых результатах Э. Фридгута [19] о существовании точных пороговых вероятностей, а также на методе Лапласа асимптотического анализа интегралов.

Наилучшая же нижняя оценка точной пороговой вероятности 2-раскрашиваемости случайного гиперграфа была получена А. Койа-Огланом и Л. Здеборовой. Они уточнили результат Д. Ахлиоптаса и К. Мура следующим образом.

Теорема 8 (А. Койа-Оглан, Л. Здеборова [14]). *Существует такая функция $\delta(k) > 0$, стремящаяся к нулю при $k \to \infty$, что для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $p = p(n)$ с условием*

$$p \leqslant (1-\varepsilon)\big(2^{k-1}(\ln 2) - \ln 2 - \delta(k)\big)\frac{n}{\binom{n}{k}}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\big(\chi\big(H(n,k,p)\big) \leqslant 2\big) = 1.$$

Итак, задача о нахождении пороговой вероятности для 2-раскрашиваемости случайного k-однородного гиперграфа весьма близка к решению в случае фиксированного $k \geqslant 3$. Вопрос же о нахождении пороговой вероятности для r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ для фиксированного $r > 2$ не исследовался настолько подробно. Более того, можно задаться подобным вопросом для случая, когда параметры k и r являются функциями от n: $k = k(n)$, $r = r(n)$. Тогда, правда, нам не гарантировано существование точной пороговой вероятности, но обычная пороговая вероятность существует всегда ввиду теоремы 5.

Простым обобщением леммы 1 на случай r цветов является следующее утверждение.

Лемма 2. *Пусть $k = k(n) \geqslant 3$ и $r = r(n) \geqslant 2$ — некоторые функции от n.*

1. *Если* $k^2 r = o(n)$, *то для любого* $\varepsilon > 0$ *и любой функции* $p = p(n) \in [0,1]$ *с условием*
$$p \geqslant (1+\varepsilon) r^{k-1} (\ln r) \frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{7}$$
выполнено
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) = 0.$$

2. *Существуют такие абсолютные константы* $c, d_0 > 0$, *что для любых* k *и* r *с условиями*
$$r^{k-1} \geqslant d_0, \quad r^{k-1} = o(n)$$
и любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ *с условием*
$$p \leqslant c\,\frac{r^{k-1}}{k^2}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{8}$$
выполнено
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) = 1.$$

Доказательство теоремы 6 тоже, по-видимому, без особых изменений переносится на случай не слишком быстро растущего k. Кроме того, как отметили сами авторы в заключительном комментарии работы [5], теорема 6 допускает естественное обобщение на случай r-раскрашиваемости.

Следствие 1 (Д. Ахлиоптас, Дж. Ким, М. Кривелевич, П. Тетали [5]). *Для любых фиксированных* $k \geqslant 3$, $r \geqslant 2$ *и любой функции* $p = p(n) \in [0,1]$ *с условием*
$$p \leqslant \frac{(r+1)!}{(r+1)^{2(r+1)}}\,\frac{r^k}{k}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{9}$$
выполнено
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) = 1.$$

Заметим, что следствие 1 не даёт нетривиального результата по сравнению с леммой 2, когда r достаточно велико по сравнению с k. Например, при $r > 2\ln k/(\ln\ln k)$ имеют место следующие простые неравенства:
$$\frac{(r+1)!}{(r+1)^{2(r+1)}}\,\frac{r^k}{k}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \leqslant \frac{r^{k-1}}{k}(r+1)^r\,\frac{n}{\binom{n}{k}} < \frac{r^{k-1}(\ln k)^2}{k^3}\,\frac{n}{\binom{n}{k}}.$$
Нижняя оценка пороговой вероятности (9)) в таких условиях становится хуже оценки (8).

Методы же доказательств теоремы 7, а также теоремы 8 явным образом не могут быть перенесены на случай произвольного фиксированного значения параметра $r > 2$, и их доказательства не могут быть применены ни при каких растущих k или r.

Ещё один подход к поиску пороговой вероятности r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$ — это изучение асимптотического поведения хроматического числа $H(n,k,p)$. Вопрос об асимптотике хроматического числа случайного графа $G(n,p)$ долгое время оставался открытым. Только в 1988 г. Б. Боллобаш [11] с помощью мартингальных методов установил асимптотическое значение $\chi\bigl(G(n,p)\bigr)$ при фиксированном p и $n \to +\infty$:

$$\chi\bigl(G(n,p)\bigr) \cdot \frac{2\log_{(1-p)^{-1}} n}{n} \xrightarrow{P} 1.$$

Доказательство Б. Боллобаша без особых изменений можно перенести и на случай достаточно медленно убывающего $p = p(n)$: $p = p(n) \geqslant n^{-1/3+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$. Для более быстро убывающих функций $p = p(n)$ (вплоть до $p = \Omega(1/n)$) асимптотическое поведение $\chi\bigl(G(n,p)\bigr)$ было найдено Т. Лучаком [25] в 1991 г. Аналогичные результаты относительно хроматического числа $H(n,k,p)$ были получены Э. Шамиром [29] в 1989 г. для фиксированного $k > 2$ и $p > n^{-\varepsilon}$, а также М. Кривелевичем и Б. Судаковым [23] в 1998 г. для почти всех остальных значений $p = p(n)$. Приведём точную формулировку теоремы М. Кривелевича и Б. Судакова.

Теорема 9 (М. Кривелевич, Б. Судаков [23]). *Пусть $k \geqslant 2$ фиксировано. Существует такая константа $d_0 = d_0(k)$, что для любого $p = p(n)$ с условиями*

$$d = d(n) = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p \geqslant d_0, \quad d = o(n^{k-1})$$

выполнено

$$\mathsf{P}\left(\left(\frac{d}{k\ln d}\right)^{1/(k-1)} \leqslant \chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant \left(\frac{d}{k\ln d}\left(1 + \frac{28k\ln\ln d}{\ln d}\right)\right)^{1/(k-1)}\right) \to 1.$$

Приведём следствие из этой теоремы, дающее хорошую нижнюю оценку пороговой вероятности r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$.

Следствие 2. *Пусть $k \geqslant 2$ фиксировано. Существует такая константа $r_0 = r_0(k)$, что для любого $r = r(n)$ с условиями*

$$r \geqslant r_0, \quad r^{k-1}\ln r = o(n^{k-1})$$

выполнено

$$\mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) \to 1, \quad \text{где} \ \ p = \frac{1}{2}\, r^{k-1}\ln r\, \frac{n}{\binom{n}{k}}.$$

Доказательство. Посчитаем функцию d из теоремы 9:

$$d = (k-1)\binom{n-1}{k-1}p = \frac{1}{2}(k-1)kr^{k-1}\ln r.$$

Выберем такое r_0, чтобы $r_0^{k-1}\ln r_0 > d_0$, где d_0 взято из теоремы 9. Тогда для d выполнены все условия теоремы 9, а потому

$$\mathsf{P}\left(\chi\big(H(n,k,p)\big) \leqslant \left(\frac{d}{k\ln d}\left(1+\frac{28k\ln\ln d}{\ln d}\right)\right)^{1/(k-1)}\right) \to 1.$$

Осталось проверить неравенство

$$\left(\frac{d}{k\ln d}\left(1+\frac{28k\ln\ln d}{\ln d}\right)\right)^{1/(k-1)} \leqslant r.$$

Если $d_0 = d_0(k)$ достаточно велико, то получаем соотношение

$$\frac{d}{k\ln d}\left(1+\frac{28k\ln\ln d}{\ln d}\right) \leqslant \frac{2d}{k\ln d},$$

откуда следует, что

$$\frac{2d}{k\ln d} = \frac{r^{k-1}(k-1)\ln r}{\ln d} \leqslant r^{k-1},$$

так как $d \geqslant r^{k-1}$. □

Следствие 2 вместе с оценкой (7) из леммы 2 показывают, что функция $p^* = r^{k-1}\ln r\, n/\binom{n}{k}$ является пороговой вероятностью (и даже почти точной пороговой вероятностью) r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$ в достаточно широкой области значений параметров: k фиксировано, r достаточно велико по сравнению с k и $r^{k-1}\ln r = o(n^{k-1})$.

Конечно, теорема 9 (равно как и следствие 2) может быть доказана не только для фиксированных k, но и для слабо растущих функций $k = k(n)$. Вычисления из доказательства теоремы 9 дают следующие необходимые соотношения между параметрами d, p, k и n:

$$d \geqslant (\ln d)^{28k-27}, \quad n^{1/3} \geqslant \big(\ln(n^{k-1}p)\big)^{3(k-1)-1/2}. \tag{10}$$

Эти соотношения означают, что в следствии 2 мы имеем такие условия на параметры:

$$r = \Omega(k^{28}(\ln k)^{28}), \quad n \geqslant k^{9k+O(k\ln\ln k/(\ln k))}. \tag{11}$$

Таким образом, несмотря на то, что следствие 2 даёт очень хорошую нижнюю оценку пороговой вероятности, его утверждение выполняется только для достаточно больших r по сравнению с k: $r = \Omega(k^{28}(\ln k)^{28})$. Напомним также, что оценка (9) становится лучше, чем (8) только при $r = O(\ln k/\ln\ln k)$. В итоге мы можем смело утверждать, что в очень широкой области значений параметров k и r (даже без учёта их соотношения с n),

$$\frac{2\ln k}{\ln\ln k} \leqslant r \leqslant k^{28}(\ln k)^{28}, \tag{12}$$

наилучшей остаётся оценка (8).

Замечание 1. Доказательство теоремы 9, по-видимому, можно обобщить на случай меньших значений величины d (и, следовательно, на параметр r в следствии 2), чем это было сформулировано в условии (10). Но, например, окончательное условие $r > k^4$ является крайне существенным.

На этом мы заканчиваем обсуждение ранее известных результатов и переходим к формулировке нового результата.

2.3. Новая нижняя оценка пороговой вероятности r-раскрашиваемости

Основной результат второго раздела настоящей работы даёт новую нижнюю оценку пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа и сформулирован в теореме 10.

Теорема 10. *Пусть зафиксировано $\delta \in (0,1)$. Пусть, кроме того, функции $k = k(n)$ и $r = r(n) \geqslant 2$ удовлетворяют следующим условиям: $k \geqslant k_0$ для некоторого $k_0 = k_0(\delta)$,*

$$(k-1)\ln r < \frac{1-\delta}{2}\ln n, \quad r^{k-1}k^{-\varphi(k)} \geqslant 6\ln n, \tag{13}$$

где

$$\varphi(k) = 4\left\lfloor \sqrt{\frac{\ln k}{\ln(2\ln k)}} \right\rfloor^{-1}.$$

Тогда для любой функции $p = p(n)$ с условием

$$p \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{r^{k-1}}{k^{1+\varphi(k)}}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{14}$$

выполнено

$$\mathsf{P}\bigl(\chi\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Сравним результат, полученный в теореме 10, с ранее известными. Ясно, что неравенство (14) требует более слабого ограничения на функцию p, чем (8) из леммы 2 для всех достаточно больших k. Остаётся сравнить (14) с результатом следствия 1. Ясно, что (14) становится сильнее, чем (9), если

$$k^{4\left\lfloor \sqrt{\ln k/(\ln(2\ln k))}\right\rfloor^{-1}} < \frac{(r+1)^{2(r+1)}}{2r(r+1)!}.$$

Данное соотношение, например, выполняется в асимптотической области $r \gg \sqrt{\ln k}$.

Таким образом, наш новый результат (14) даёт новую нижнюю оценку пороговой вероятности r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Эта оценка улучшает все предыдущие результаты в широкой области значений параметров (напомним, что нам интересна только (12)):

$$\sqrt{\ln k} \ll r \leqslant k^{29}(\ln k)^{28}, \quad 6\,k^{\varphi(k)}\ln n \leqslant r^{k-1} \leqslant n^{(1-\delta)/2}.$$

Например, (14) даёт новую оценку, когда $k \sim r \sim \ln n/(5\ln\ln n)$. Кроме того, результат (14) только в $k^{1+\varphi(k)}\ln r$ раз меньше, чем верхняя оценка (7) из леммы 2.

В следующем разделе мы приведём доказательство теоремы 10.

3. Доказательство теоремы 10

Ввиду убывания вероятности $\mathsf{P}\big(\chi\big(H(n,k,p)\big) \leqslant r\big)$ с ростом p нам достаточно рассматривать только случай

$$p = \frac{r^{k-1}}{2k^{1+\varphi(k)}}\,\frac{n}{\binom{n}{k}}.$$

В конечном счёте, мы хотим применить теорему 4 к случайному гиперграфу $H(n,k,p)$. Для этого нам необходимо показать, что с вероятностью, стремящейся к единице, $H(n,k,p)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(k,\omega)$ с $\omega = \lfloor\sqrt{\ln k/\ln\ln k}\rfloor$, т. е. что он с большой вероятностью является 2-простым и каждое его ребро содержится в не более чем ω 3-циклах.

Введём следующие случайные величины: Y — количество пар рёбер случайного гиперграфа $H(n,k,p)$, имеющих по крайней мере три общие вершины; Z — количество рёбер $H(n,k,p)$, содержащихся в более чем ω треугольниках. Оценим математические ожидания этих случайных величин:

$$\mathsf{E}Y \leqslant \binom{n}{3}\binom{n-3}{k-3}^2 p^2 \leqslant \frac{n^3k^6}{n^6}\binom{n}{k}^2\left(\frac{r^{k-1}}{k}n\binom{n}{k}^{-1}\right)^2 = \frac{(r^{k-1})^2k^4}{n}.$$

Следовательно,

$$\ln\mathsf{E}Y = (2k-2)\ln r + 4\ln k - \ln n \overset{(13)}{\leqslant} (1-\delta)\ln n + 4\ln k - \ln n \leqslant -\frac{\delta}{2}\ln n.$$

Отсюда получаем, что

$$\lim_{n\to\infty}\mathsf{E}Y = 0$$

и

$$\mathsf{P}(H(n,k,p) \text{ является 2-простым}) \to 1. \tag{15}$$

Теперь рассмотрим рёбра, содержащиеся в большом числе треугольников. Предположим, что u — это ребро $H(n,k,p)$. Обозначим через T_u множество всех треугольников, содержащих u. Кроме того, введём величину $D(u',u)$, *степень ребра* u' *по отношению к* u, равную числу 3-циклов из T_u, содержащих ребро $u' \neq u$. Аналогично для каждой вершины $v \in V\big(H(n,k,p)\big)$ обозначим через $d(v,u)$ *степень вершины* v *по отношению к* u — число треугольников (u,u',u'') из T_u с условием $v \in (u'\cap u'')\setminus u$.

Рассмотрим количество рёбер, имеющих большую степень по отношению к хотя бы одному ребру u случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Обозначим через $Z_1(u)$ число рёбер, имеющих степень более 4 по отношению к u, т. е.

$$Z_1(u) = \left|\big\{u' \in E\big(H(n,k,p)\big) \colon D(u',u) > 4\big\}\right|.$$

Кроме того, введём величину

$$Z_1 = \sum_{u\in E(H(n,k,p))} Z_1(u).$$

Оценим математическое ожидание случайной величины Z_1:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}Z_1 &\leqslant n\binom{n-1}{k-1}^2 k^{10}\binom{n-2}{k-2}^5 p^7 \leqslant \binom{n}{k}^7 \frac{k^{22}}{n^{11}}\left(\frac{r^{k-1}}{k}n\binom{n}{k}^{-1}\right)^7 = \\ &= \frac{r^{7(k-1)}k^{15}}{n^4} = \exp\{7(k-1)\ln r + 15\ln k - 4\ln n\} \overset{(13)}{\leqslant} \\ &\leqslant \exp\left\{\frac{7}{2}(1-\delta)\ln n + 15\ln k - 4\ln n\right\} \leqslant n^{-1/2}.\end{aligned}$$

Прокомментируем только первое неравенство в данной цепочке. Сначала мы выбираем вершину из пересечения ребра u и ребра u', имеющего большую степень по отношению к u. Затем мы выбираем оставшиеся вершины этих двух рёбер. Далее мы выбираем те пять вершин на каждом из двух рёбер, которые принадлежат пяти рёбрам, образующим 3-циклы с u и u'. В конце мы выбираем оставшиеся вершины данных рёбер.

Таким образом,

$$\mathsf{P}\big(\text{для любых } u,u' \in E\big(H(n,k,p)\big) \text{ имеем } D(u',u) \leqslant 4\big) \to 1. \tag{16}$$

Совершенно аналогично мы устанавливаем, что с вероятностью, стремящейся к единице, для любого ребра $u \in E\big(H(n,k,p)\big)$ и вершины $v \notin u$ выполнено $d(v,u) \leqslant 4$. Обозначим через Z_2 число таких пар v, u, что $d(v,u) \geqslant 5$. Тогда математическое ожидание случайной величины Z_2 можно оценить сверху следующим образом:

$$\begin{aligned}\mathsf{E}Z_2 &\leqslant n\binom{n-1}{k}k^5\binom{n-2}{k-2}^5 p^6 \leqslant \binom{n}{k}^6 \frac{k^{15}}{n^9}\left(\frac{r^{k-1}}{k}n\binom{n}{k}^{-1}\right)^6 = \frac{r^{6(k-1)}k^9}{n^3} = \\ &= \exp\{6(k-1)\ln r + 9\ln k - 3\ln n\} \overset{(13)}{\leqslant} \\ &= \exp\{3(1-\delta)\ln n + 9\ln k - 3\ln n\} \leqslant n^{-\delta/2}.\end{aligned}$$

Отсюда получаем, что

$$\mathsf{P}\big(\text{для любой вершины } v \text{ и ребра } u \in E\big(H(n,k,p)\big) \text{ выполнено } d(v,u) \leqslant 4\big) \to 1. \tag{17}$$

Введём следующее событие $\mathcal{A}_n$:

$$\mathcal{A}_n = \big\{\text{для любых } u,u' \in E\big(H(n,k,p)\big) \text{ и любой } v \in V\big(H(n,k,p)\big) \\ \text{выполнено } D(u',u) \leqslant 4 \text{ и } d(v,u) \leqslant 4\big\}.$$

В силу (16) и (17) вероятность данного события стремится к единице, $\mathsf{P}(\mathcal{A}_n) \to 1$.

Пусть событие $\mathcal{A}_n$ имеет место, а также нашлось ребро u в $H(n,k,p)$, содержащееся в не менее чем ω 3-циклах. Рассмотрим следующее множество вершин V_u:

$$V_u = \{v \in V\colon d(v,u) > 0\}.$$

Для любой вершины $v \in V_u$ пусть $E(v,u)$ — множество рёбер, содержащих v и входящих хотя бы в один из 3-циклов из T_u. Событие $\mathcal{A}_n$ означает, что $d(v,u) \leqslant 4$ для всех v и u и, следовательно, $|E(v,u)| \leqslant 8$, $|V_u| \geqslant (1/8)|T_u| \geqslant$ $\geqslant (1/8)\omega$. Дальнейшая наша задача — доказать существование некоторого подходящего подмножества T_u достаточно большого размера. Для этого мы запустим процесс удаления «плохих» вершин.

Во-первых, положим $V_u^0 = V_u$ и $T_u^0 = T_u$. Предположим теперь, что построены множества V_u^s и T_u^s. Мы сформируем множества V_u^{s+1} и T_u^{s+1} следующим образом. Выберем произвольный 3-цикл $t_{s+1} = (u'_s, u''_s, u) \in T_u^s$ и произвольную вершину $v_{s+1} \in (u'_s \cap u''_s) \setminus u$. Теперь положим

$$V_u^{s+1} = V_u^s \setminus \{v_{s+1}\},$$
$$T_u^{s+1} = T_u^s \setminus \{t \in T_u^s \colon t \text{ содержит ребро из } E(v_{s+1},u)\}.$$

Затем повторим данную процедуру с множествами T_u^{s+1} и V_u^{s+1} и будем продолжать её, пока оба множества V_u^{s+1} и T_u^{s+1} непусты.

Сколько шагов процедуры мы можем гарантировать? Поскольку имеет место событие $\mathcal{A}_n$, получаем, что $|T_u^{i+1}| \geqslant |T_u^i| - 32$. Действительно, $E(v_{i+1},u)$ состоит из не более чем восьми рёбер и каждое ребро принадлежит не более чем четырём 3-циклам. Таким образом, мы можем гарантировать не менее $\omega' = \lceil (1/32)\omega \rceil$ шагов процедуры.

Рассмотрим получившийся набор 3-циклов $\{t_1, \ldots, t_{\omega'}\}$, $t_s = (u'_s, u''_s, u)$, $s = 1, \ldots, \omega'$, и множество вершин $\{v_1, \ldots, v_{\omega'}\}$. По построению все рёбра $u'_1, u''_1, u'_2, u''_2, \ldots, u'_{\omega'}, u''_{\omega'}$ различны, все вершины $v_1, \ldots, v_{\omega'}$ также различны и для любого $s = 1, \ldots, \omega'$ будет выполнено $v_s \in u'_s \cap u''_s \setminus u$. Оценим вероятность события (обозначим его через $\mathcal{B}_n$), что для некоторого ребра u в гиперграфе $H(n,k,p)$ имеет место описанная выше конструкция. Ясно, что

$$\begin{aligned}\mathsf{P}(\mathcal{B}_n) &\leqslant \binom{n}{k} k^{2\omega'} (n-k)^{\omega'} \binom{n-2}{k-2}^{2\omega'} p^{2\omega'+1} \leqslant \\ &\leqslant \frac{n^{\omega'} k^{6\omega'}}{n^{4\omega'}} \binom{n}{k}^{2\omega'+1} \left(\frac{r^{k-1}}{k} n \binom{n}{k}^{-1} \right)^{2\omega'+1} = \frac{(r^{k-1})^{2\omega'+1} k^{4\omega'-1}}{n^{\omega'-1}}.\end{aligned}$$

Следовательно, для всех $k \geqslant k_0$

$$\begin{aligned}&\ln \mathsf{P}(\mathcal{B}_n) = (k-1)(2\omega'+1)\ln r + (4\omega'-1)\ln k - (\omega'-1)\ln n \overset{(13)}{\leqslant} \\ &\leqslant (\omega'-1)\left((1-\delta)\left(\frac{2\omega'+1}{2\omega'-2}\right)\ln n + \frac{4\omega'-1}{(\omega'-1)}\ln k - \ln n \right) \leqslant (\omega'-1)\left(-\frac{\delta}{2}\ln n\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Отсюда получаем, что
$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(\mathcal{B}_n) = 0.$$

Таким образом, мы показали, что если имеет место событие $\mathcal{A}_n$ и другое событие, состоящее в том, что нашлось ребро $u \in E\big(H(n,k,p)\big)$ с условием $|T_u| > \omega$, то имеет место событие $\mathcal{B}_n$. Значит,

$$\mathsf{P}\big(\text{нашлось } u \in E\big(H(n,k,p)\big), \text{ такое что } |T_u| > \omega\big) \leqslant \mathsf{P}(\overline{\mathcal{A}_n}) + \mathsf{P}(\mathcal{B}_n) \to 0. \quad (19)$$

Сведём воедино полученную информацию. Из соотношений (15) и (19) следует, что с вероятностью, стремящейся к единице, случайный гиперграф $H(n,k,p)$ принадлежит семейству $\mathcal{H}(k,\omega)$ с $\omega = \lfloor\sqrt{\ln k/\ln\ln k}\rfloor$. Для того чтобы доказать r-раскрашиваемость $H(n,k,p)$ с большой вероятностью, нам, согласно теореме 4, достаточно показать, что с вероятностью, стремящейся к единице, его максимальная степень вершины $\Delta\big(H(n,k,p)\big)$ не превосходит $r^{k-1}k^{-\varphi(k)}$.

Для каждой вершины v случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ введём случайную величину X_v, равную её степени в $H(n,k,p)$. Ясно, что X_v имеет биномиальное распределение $\mathrm{Bin}\left(\binom{n-1}{k-1}, p\right)$. Используя классическое неравенство Чернова, утверждающее, что если X — биномиальная случайная величина, то для любого $\lambda > 0$

$$\mathsf{P}(X > \mathsf{E}X + \lambda) \leqslant \exp\left\{-\frac{\lambda^2}{2(\mathsf{E}X + \lambda/3)}\right\},$$

с $\lambda = \mathsf{E}X_v$ и условие 13, получаем оценку

$$\mathsf{P}\big(X_v \geqslant r^{k-1}k^{-\varphi(k)}\big) \leqslant \exp\left\{-\frac{3r^{k-1}k^{-\varphi(k)}}{16}\right\} \leqslant \exp\left\{-\frac{9}{8}\ln n\right\} = n^{-9/8}.$$

Следовательно,

$$\mathsf{P}\big(\Delta\big(H(n,k,p)\big) \geqslant r^{k-1}k^{-\varphi(k)}\big) \leqslant n \cdot n^{-9/8} = o(1). \quad (20)$$

Завершим доказательство. Мы доказали, что с вероятностью, стремящейся к единице, случайный гиперграф $H(n,k,p)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(k,\omega)$ с $\omega = \lfloor\sqrt{\ln k/\ln\ln k}\rfloor$ и его максимальная степень не превосходит $r^{k-1}k^{-\varphi(k)}$. Применяя теорему 4, получаем искомое утверждение: $\mathsf{P}\big(\chi\big(H(n,k,p)\big) \leqslant r\big) \to 1$ при $n \to \infty$. Теорема 10 доказана.

Замечание 2. Если $k = k(n) \to +\infty$, то параметр $\delta \in (0,1)$ из теоремы 10 можно заменить на некоторую бесконечно малую величину. Например, из неравенства (18) следует, что достаточно взять

$$\delta = 50\sqrt{\frac{\ln\ln k}{\ln k}}.$$

4. Доказательство теоремы 4

Доказательство теоремы 4 основано на применении метода случайной перекраски. Данный метод был впервые предложен Й. Беком [9], а затем развивался в работах Дж. Спенсера [30], Дж. Радхакришанана и А. Сринивасана [26]. В настоящей работе мы используем конструкцию из работы [28] о раскрасках l-простых гиперграфов с ограниченными степенями вершин.

Структура самого доказательства будет следующей. Мы сформулируем некоторую общую многопараметрическую теорему 11 об r-раскрашиваемости гиперграфов из класса $\mathcal{H}(k,\omega)$. Далее мы докажем теорему 11, и, наконец, выведем теорему 4 из теоремы 11, осуществив подходящий выбор параметров.

4.1. Общая теорема

Теорема 4 является простым следствием следующей многопараметрической теоремы.

Теорема 11. *Пусть даны натуральные числа $k \geqslant 3$, $r \geqslant 2$, $\omega \geqslant 1$ и положительные числа b, α. Введём следующие обозначения*:

$$t = \left\lfloor \sqrt{\frac{\ln k}{\ln(\alpha \ln k)}} \right\rfloor, \quad q = \frac{\alpha \ln k}{k}. \tag{21}$$

Пусть гиперграф $H = (V, E)$ принадлежит классу $\mathcal{H}(k,\omega)$, и предположим, что каждое ребро H пересекает не более d других рёбер H, причём

$$d \leqslant r^{k-1} k^{1-b/t} - 1. \tag{22}$$

Если выполняются неравенства

$$b \leqslant t < k - \omega, \tag{23}$$

$$\frac{2}{k} \leqslant q \leqslant \frac{1}{2}, \tag{24}$$

$$\frac{k^2}{2^k} + (t+1)k^{1-\alpha} e^{\alpha(\ln k)(t+\omega)/k} (\alpha \ln k)^{t+\omega} + \frac{(t+1)^2}{t!}\, k^{2-b} (\alpha \ln k)^{t\omega} + \\ + (t+1)t \left(\frac{2e\alpha \ln k}{t-1}\right)^{t-1} k^{1+\alpha-b} < \frac{1}{4} \tag{25}$$

то $\chi(H) \leqslant r$, т. е. гиперграф H является r-раскрашиваемым.

Для обоснования теоремы 11 нам необходимо показать существование правильной раскраски вершин в r цветов для гиперграфа H. Мы построим некоторую случайную r-раскраску и оценим вероятность того, что данная раскраска не является правильной для H. Если эта вероятность окажется строго меньше единицы, то мы докажем существование искомой раскраски и теорема будет доказана.

4.2. Алгоритм случайной раскраски

Мы следуем идеям Дж. Радхакришнана и А. Сринивасана из работы [26], а также используем конструкцию случайной раскраски из [28]. Пусть множество вершин имеет вид $V = \{v_1, \ldots, v_w\}$. Алгоритм построения раскраски состоит из двух этапов.

Этап 1. Раскрасим все вершин случайно, независимо и равномерно в r цветов. Обозначим полученную случайную раскраску через χ_0.

Раскраска χ_0 может содержать как одноцветные рёбра, так и «почти одноцветные» рёбра. Ребро $e \in E$ будем называть *почти одноцветным* в раскраске χ_0, если для некоторого цвета u выполнено условие

$$n-t-\omega+2 \leqslant |\{v \in e\colon v \text{ покрашено в цвет } u \text{ в } \chi_0\}| < n.$$

В этом случае цвет u будем называть *доминирующим* цветом в ребре e. Для любых $v \in V$, $u=1,\ldots,r$ введём следующие обозначения:

$$\begin{aligned}&\mathcal{M}(v)=\{e \in E\colon v \in e,\ e \text{ одноцветно в } \chi_0\},\\ &\mathcal{AM}(v,u)=\{e \in E\colon v \in e,\\ &\quad e \text{ почти одноцветно в } \chi_0 \text{ с доминирующим цветом } u\}.\end{aligned}$$

Этап 2. На втором этапе мы хотим перекрасить некоторые вершины в рёбрах, которые были одноцветными в начальной раскраске χ_0. Для этого рассмотрим все вершины гиперграфа H в порядке естественной нумерации $v_1,\ldots,v_w$. Пусть случайные величины $\{\eta_1,\ldots,\eta_w\}$ независимые и одинаково распределённые, каждая принимает значения $1,\ldots,r$ с одной и той же вероятностью p (значение параметра p мы выберем позднее) и значение 0 с вероятностью $1-rp$. Наш процесс перекраски состоит из w шагов.

Шаг 1. Если множество $\mathcal{M}(v_1)$ непусто, $\mathcal{M}(v_1) \neq \varnothing$, и, кроме того, не нашлось таких $u=1,\ldots,r$ и $e \in \mathcal{AM}(v_1,u)$, что

1) $\eta_1=u$,
2) v_1 — единственная вершина в e, не покрашенная в цвет u в раскраске χ_0,

то попытаемся перекрасить вершину v_1 согласно значению случайной величины η_1:

— если $\eta_1=0$, то мы не перекрашиваем v_1,
— если $\eta_1 \neq 0$, то мы присваиваем вершине v_1 цвет η_1.

Во всех остальных ситуациях цвет вершины v_1 мы не меняем. Обозначим через χ_1 раскраску, получившуюся после рассмотрения вершины v_1.

Пусть вершины $v_1,\ldots,v_{i-1}$ уже рассмотрены, а раскраска χ_{i-1} построена.

Шаг i. Предположим, что некоторое ребро $f \in \mathcal{M}(v_i)$ всё ещё является одноцветным в раскраске χ_{i-1} и, кроме того, нет таких $u=1,\ldots,r$ и $e \in \mathcal{AM}(v_i,u)$, что

1) $\eta_i=u$,
2) v_i является единственной вершиной в e, не покрашенной в цвет u в раскраске χ_{i-1}.

Тогда мы пытаемся перекрасить v_i согласно значению случайной величины η_i:

— если $\eta_i=0$, то не перекрашиваем v_i,
— если $\eta_i \neq 0$, то мы присваиваем вершине v_i цвет η_i.

Во всех остальных ситуациях мы не меняем цвет вершины v_i. Обозначим получившуюся раскраску через χ_i.

Итоговую случайную раскраску, получающуюся после рассмотрения всех вершин, обозначим через $\tilde{\chi}$.

Приведём формальную конструкцию случайной раскраски $\tilde{\chi}$ с помощью набора независимых случайных величин. Данная конструкция очень важна для проведения аккуратного доказательства. Нам будет необходимо проанализировать событие $\mathcal{F}$, состоящее в том, что раскраска $\tilde{\chi}$ не является правильной для гиперграфа H. Мы разделим $\mathcal{F}$ на некоторое число «локальных» событий и оценим вероятности этих событий. В конце мы применим локальную лемму для обоснования того, что с положительной вероятностью не выполнено ни одно из данных событий. Это позволит обосновать тот факт, что $\tilde{\chi}$ с положительной вероятностью является правильной r-раскраской для H и, следовательно, что H является r-раскрашиваемым.

4.3. Формальная конструкция случайной раскраски из раздела 4.2

Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, 2, 3, \ldots, w\}$. Зафиксируем также некоторую нумерацию рёбер гиперграфа H. Рассмотрим следующий набор независимых в совокупности случайных величин:

— $\xi_1, \ldots, \xi_w$ — одинаково распределённые случайные величины, принимающие значения $1, 2, \ldots, r$ с одной и той же вероятностью $1/r$;

— $\eta_1, \ldots, \eta_w$ — одинаково распределённые случайные величины, принимающие значения $1, 2, \ldots, r$ с вероятностью p, а также значение 0 с оставшейся вероятностью $1 - rp$. Положим параметр p равным $p = q/(r-1)$. Согласно условию (24) подобный выбор параметра корректен, так как для любого $r \geqslant 2$ будет выполнено $rp \leqslant r/\bigl(2(r-1)\bigr) \leqslant 1$.

Пусть $e \in E$ — некоторое ребро H. Для каждого $u = 1, \ldots, r$ введём события $\mathcal{M}(e,u)$ и $\mathcal{AM}(e,u)$:

$$\mathcal{M}(e,u) = \bigcap_{s \in e} \{\xi_s = u\}, \quad \mathcal{AM}(e,u) = \biggl\{0 < \sum_{s \in e} I\{\xi_s \neq u\} \leqslant t + \omega - 2\biggr\}. \tag{26}$$

Определим индуктивно случайные величины ζ_i, $i = 1, \ldots, w$. Обозначим через $\mathcal{D}_1$ и $\mathcal{A}_1$ события

$$\mathcal{D}_1 = \bigcup_{e \in E:\, 1 \in e} \bigcup_{u=1}^{r} \mathcal{M}(e,u),$$

$$\mathcal{A}_1 = \bigcup_{f \in E:\, 1 \in f} \bigcup_{u=1}^{r} \Biggl(\biggl\{\xi_1 \neq u,\ \eta_1 = u,\ \sum_{s \in f:\, s > 1} I\{\xi_s = u\} = k - 1\biggr\} \cap \mathcal{AM}(f,u)\Biggr)$$

и положим

$$\zeta_1 = \xi_1 I\{\bar{\mathcal{D}}_1 \cup \{\eta_1 = 0\} \cup \mathcal{A}_1\} + \eta_1 I\{\mathcal{D}_1 \cap \{\eta_1 \neq 0\} \cap \bar{\mathcal{A}}_1\}.$$

Для $i > 1$ введём события $\mathcal{D}_i$ и $\mathcal{A}_i$ по правилу

$$\mathcal{D}_i = \bigcup_{e\in E\colon i\in e}\bigcup_{u=1}^{r}\Big\{\mathcal{M}(e,u)\cap\bigcap_{s\in e\colon s<i}\{\zeta_s = u\}\Big\},$$

$$\mathcal{A}_i = \bigcup_{f\in E\colon i\in f}\bigcup_{u=1}^{r}\bigg(\Big\{\xi_i \neq u,\ \eta_i = u,$$

$$\sum_{s\in f\colon s<i} I\{\zeta_s = u\} + \sum_{s\in f\colon s>i} I\{\xi_s = u\} = k-1\Big\}\cap\mathcal{AM}(f,u)\bigg).$$

Тогда случайная величина ζ_i определяется следующим образом:

$$\zeta_i = \xi_i I\{\bar{\mathcal{D}}_i \cup \{\eta_i = 0\}\cup\mathcal{A}_i\} + \eta_i I\{\mathcal{D}_i\cap\{\eta_i\neq 0\}\cap\bar{\mathcal{A}}_i\}.$$

Легко убедиться, что случайные величины ζ_i принимают только значения из множества $\{1,2,\dots,r\}$. Значит, случайный вектор $\vec{\zeta} = (\zeta_1,\dots,\zeta_w)$ можно интерпретировать как случайную r-раскраску множества вершин V (вершине i присваивается цвет ζ_i). Обозначим через $\mathcal{F}$ событие, состоящее в том, что $\vec{\zeta}$ не является правильной раскраской вершин гиперграфа H. Формально,

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e\in E}\bigcup_{u=1}^{r}\bigcap_{s\in e}\{\zeta_s = u\}. \tag{27}$$

Наша цель состоит в том, чтобы доказать, что в условиях теоремы 11 выполняется неравенство $\mathsf{P}(\mathcal{F}) < 1$.

Разделим событие $\bigcap_{s\in e}\{\zeta_s = u\}$ на три части в зависимости от поведения случайных величин $\{\xi_s\colon s\in e\}$. Для этого введём события $\mathcal{C}_0(e,u)$, $\mathcal{C}_1(e,u)$, $\mathcal{C}_2(e,u)$:

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_0(e,u) &= \bigcup_{a=1,\ a\neq u}^{r}\bigcap_{s\in e}\{\zeta_s = u,\ \xi_s = a\},\\ \mathcal{C}_1(e,u) &= \bigcap_{s\in e}\{\zeta_s = u,\ \xi_s = u\},\\ \mathcal{C}_2(e,u) &= \bigcap_{s\in e}\{\zeta_s = u\}\cap\bigcap_{a=1}^{r}\bar{\mathcal{M}}(e,a).\end{aligned} \tag{28}$$

Мы будем рассматривать данные три события по отдельности. Но прежде чем перейти к их анализу, установим одно простое неравенство, которым будем пользоваться в дальнейшем. Из условия (24) следует, что

$$\alpha\ln k = qk \geqslant 2. \tag{29}$$

Отметим, что последнее неравенство означает, что параметр t в (21) корректно определён (под корнем не возникает отрицательного числа).

4.4. Первая составляющая $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_0(e, u)$

Предположим, что произошло событие $\mathcal{C}_0(e,u)$. Тогда для любого $s \in e$ выполнено $\zeta_s = \eta_s$, ведь $\zeta_s \neq \xi_s$. Отсюда получаем соотношение

$$\bigcup_{u=1}^{r} \mathcal{C}_0(e,u) \subset \bigcup_{u=1}^{r} \bigcup_{a=1,\ a\neq u}^{r} \bigcap_{s\in e} \{\eta_s = u,\ \xi_s = a\} = \mathcal{Q}_0(e). \tag{30}$$

Вероятность же события $\mathcal{Q}_0(e)$ легко считается:

$$\mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_0(e)\big) = \sum_{u=1}^{r} \sum_{a=1,\ a\neq u}^{r} \prod_{s\in e} \mathsf{P}(\eta_s = u,\ \xi_s = a) = r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^k. \tag{31}$$

4.5. Вторая составляющая $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_1(e, u)$

Предположим, что произошло событие $\mathcal{C}_1(e,u)$. Тогда, очевидно, должны быть выполнены и все события $\mathcal{D}_s$, $s \in e$. Следовательно, для любой вершины $s \in e$ равенство $\xi_s = \zeta_s = u$ могло получиться двумя способами: либо $\eta_s \in \{0,u\}$, либо $\eta_s \notin \{0,u\}$ и произошло событие $\mathcal{A}_s$. Рассмотрим следующее разбиение события $\mathcal{C}_1(e,u)$:

$$\mathcal{C}_1(e,u) = \mathcal{S}_0(e,u) \cup \mathcal{S}_1(e,u), \tag{32}$$

где

$$\mathcal{S}_0(e,u) = \mathcal{C}_1(e,u) \cap \left\{\sum_{s\in e} I\big\{\eta_s \notin \{0,u\}\big\} \leqslant t+\omega-1\right\},$$

$$\mathcal{S}_1(e,u) = \mathcal{C}_1(e,u) \cap \left\{\sum_{s\in e} I\big\{\eta_s \notin \{0,u\}\big\} > t+\omega-1\right\}.$$

Рассмотрим событие $\mathcal{S}_0(e,u)$. Согласно определению (28) события $\mathcal{C}_1(e,u)$ имеет место соотношение

$$\mathcal{S}_0(e,u) \subset \bigcap_{s\in e} \{\xi_s = u\} \cap \left\{\sum_{s\in e} I\big\{\eta_s \notin \{0,u\}\big\} \leqslant t+\omega-1\right\}.$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_1(e)$ объединение по u последних событий:

$$\bigcup_{u=1}^{r} \mathcal{S}_0(e,u) \subset \bigcup_{u=1}^{r} \left\{\bigcap_{s\in e} \{\xi_s = u\} \cap \left\{\sum_{s\in e} I\big\{\eta_s \notin \{0,u\}\big\} \leqslant t+\omega-1\right\}\right\} = \mathcal{Q}_1(e). \tag{33}$$

Вероятность события $\mathcal{Q}_1(e)$ оценивается следующим образом:

$$\mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_1(e)\big) = r^{1-k} \sum_{j=0}^{t+\omega-1} \binom{k}{j} q^j (1-q)^{k-j} \leqslant r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega} \sum_{j=0}^{t+\omega-1} (kq)^j \leqslant$$
$$\leqslant r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega}. \tag{34}$$

Последнее неравенство вытекает из оценки (29): $kq = \alpha \ln k \geqslant 2$.

Рассмотрим теперь событие $\mathcal{S}_1(e,u)$. Зафиксируем вершину $v \in e$ с условием $\eta_v \notin \{0,u\}$. Как мы уже отметили ранее, для каждой подобной вершины должно быть выполнено событие $\mathcal{A}_v$. Из $\mathcal{A}_v$ в свою очередь следует, что для некоторого ребра f, $v \in f$, и некоторого цвета $a \neq u$ должно быть выполнено событие

$$\mathcal{W}(v,f,u,a) = \Big\{\xi_v = u,\ \eta_v = a,\\ \sum_{s\in f\colon s<v} I\{\zeta_s = a\} + \sum_{s\in f\colon s>v} I\{\xi_s = a\} = k-1\Big\} \cap \mathcal{AM}(f,a).$$

Несложно понять, что в этом случае ребро f отлично от e, $f \neq e$, и, кроме того, v является единственной их общей вершиной, $f \cap e = \{v\}$. Действительно, с одной стороны, для всех $s \in e$ выполнено равенство $\xi_s = \zeta_s = u$. С другой стороны, для всех $s \in f \setminus \{v\}$ либо $\zeta_s = a$, либо $\xi_s = a$.

Рассмотрим множество вершин $\{v_1,\dots,v_h\} = \big\{v \in e\colon \eta_v \notin \{0,u\}\big\}$. Тогда для любого $i = 1,\dots,h$ из события $\mathcal{S}_1(e,u)$ вытекает событие $\mathcal{W}(v_i,f_i,u,a_i)$ для некоторого ребра f_i с условием $\{v_i\} = f_i \cap e$ и некоторого цвета $a_i \neq u$. Более того, из события $\mathcal{S}_1(e,u)$ также следует, что в этом случае $h = h(e,u) \geqslant t+\omega$. Поскольку ребро e содержится не более чем в ω 3-циклах, найдётся такой поднабор рёбер $\{f'_1,\dots,f'_t\} \subset \{f_1,\dots,f_h\}$, что f'_i и f'_j не пересекаются для всех $i \neq j$.

Для дальнейшего удобства введём понятие *конфигурации первого типа*. Будем говорить, что для заданного ребра e набор рёбер $\{f_1,\dots,f_t\}$ образует конфигурацию первого типа (обозначение: $\{f_1,\dots,f_t\} \in \mathrm{CONF1}(e)$), если для любого $i = 1,\dots,t$ выполнено $|f_i \cap e| = 1$ и, кроме того, все эти рёбра f_i попарно не пересекаются.

Таким образом, рассуждая как выше, получаем соотношение

$$\mathcal{S}_1(e,u) \subset \\ \subset \bigcap_{s\in e}\{\xi_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1,\dots,a_t=1\\ a_i\neq u}}^{r} \ \bigcup_{\{f_1,\dots,f_t\}\in \mathrm{CONF1}(e)} \ \bigcap_{i=1}^{t} \mathcal{W}(e\cap f_i, f_i, u, a_i), \quad (35)$$

где набор рёбер $\{f_1,\dots,f_t\}$ считается упорядоченным согласно изначально выбранной нумерации множеств рёбер E, т. е. номер ребра f_i строго меньше ребра f_j при $i<j$. Введём обозначения: $\hat{f}_i = f_i \setminus e$ и $v_i = e \cap f_i$, $i = 1,\dots,t$. Из определения конфигурации первого типа следует, что множества $\hat{f}_i$, $i = 1,\dots,t$, не имеют общих вершин, $\hat{f}_i \cap \hat{f}_j = \varnothing$ при $i \neq j$. Кроме того, $|\hat{f}_i| = k-1$.

Если произошло событие $\mathcal{W}(e\cap f_i, f_i, u, a_i)$, то ввиду события $\mathcal{AM}(f_i,a_i)$ ребро f_i содержит не более $t+\omega-2$ вершин s с условием $\xi_s \neq a_i$. Более того, для всех таких вершин имеет место равенство $\zeta_s = a_i$, и стало быть, $\zeta_s = \eta_s = a_i$. Множество же $\hat{f}_i$ содержит не более $t+\omega-3$ подобных вершин, поскольку вершина v_i не принадлежит $\hat{f}_i$ и $\xi_{v_i} = u \neq a_i$. В итоге получаем соотношение

$$\bigcap_{s\in e}\{\xi_s=u\}\cap\bigcap_{i=1}^{t}\mathcal{W}(e\cap f_i,f_i,u,a_i)\subset\bigcap_{s\in e}\{\xi_s=u\}\cap\bigcap_{i=1}^{t}\{\eta_{v_i}=a_i\}\cap$$
$$\cap\bigcap_{i=1}^{t}\Big\{\bigcap_{s\in\hat{f}_i}(\{\xi_s\neq a_i,\ \eta_s=a_i\}\cup\{\xi_s=a_i\})\Big\}\cap\bigcap_{i=1}^{t}\Big\{\sum_{s\in\hat{f}_i}I\{\xi_s\neq a_i\}\leqslant t+\omega-3\Big\}. \tag{36}$$

Обозначим через $\mathcal{Q}_2(e,F)$, где $F=\{f_1,\ldots,f_t\}\in\mathrm{CONF1}(e)$, объединение по u и $a_1,\ldots,a_t$ последних событий:

$$\mathcal{Q}_2(e,F)=\bigcup_{u=1}^{r}\ \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_t=1,\\ a_i\neq u}}^{r}\Big\{\bigcap_{s\in e}\{\xi_s=u\}\cap\bigcap_{i=1}^{t}\{\eta_{v_i}=a_i\}\cap$$
$$\cap\bigcap_{i=1}^{t}\Big\{\bigcap_{s\in\hat{f}_i}(\{\xi_s\neq a_i,\ \eta_s=a_i\}\cup\{\xi_s=a_i\})\Big\}\cap\bigcap_{i=1}^{t}\Big\{\sum_{s\in\hat{f}_i}I\{\xi_s\neq a_i\}\leqslant t+\omega-3\Big\}\Big\}. \tag{37}$$

Из соотношений (35) и (36) получаем

$$\bigcup_{u=1}^{r}\mathcal{S}_1(e,u)\subset\bigcup_{F\in\mathrm{CONF1}(e)}\mathcal{Q}_2(e,F). \tag{38}$$

Теперь оценим вероятность события $\mathcal{Q}_2(e,F)$:

$$\mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_2(e,F)\big)=\sum_{u=1}^{r}\ \sum_{\substack{a_1,\ldots,a_t=1,\\ a_i\neq u}}^{r}r^{-k}p^t\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{t+\omega-3}\binom{|\hat{f}_i|}{j}\left(\frac{r-1}{r}\right)^{j}p^j\left(\frac{1}{r}\right)^{|\hat{f}_i|-j}=$$
$$=r(r-1)^t r^{-k}p^t r^{-\sum\limits_{i=1}^{t}|\hat{f}_i|}\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{t+\omega-3}\binom{|\hat{f}_i|}{j}q^j=$$
$$=r(r-1)^t r^{-k}p^t r^{-t(k-1)}\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{t+\omega-3}\binom{k-1}{j}q^j\leqslant$$
$$\leqslant r^{-(t+1)(k-1)}q^t\prod_{i=1}^{t}\sum_{j=0}^{t+\omega-3}k^jq^j\leqslant r^{-(t+1)(k-1)}q^t(kq)^{t(t+\omega-2)}. \tag{39}$$

4.6. Третья составляющая $\mathcal{F}$: событие $\mathcal{C}_2(e,u)$

Сначала покажем, что если произошло событие $\mathcal{C}_2(e,u)$, то сумма $\sum\limits_{s\in e}I\{\xi_s\neq u\}$ не может быть очень маленькой, а именно установим равенство

$$\mathcal{C}_2(e,u)=\mathcal{C}_2(e,u)\cap\Big\{\sum_{s\in e}I\{\xi_s\neq u\}\geqslant t+\omega-1\Big\}. \tag{40}$$

Действительно, рассмотрим пересечение следующих трёх событий (см. определение (28) события $\mathcal{C}_2(e,u)$):

$$\mathcal{C}_2(e,u)\cap\left\{\sum_{s\in e}I\{\xi_s\neq u\}\leqslant t+\omega-2\right\}= \\ =\bigcap_{s\in e}\{\zeta_s=u\}\cap\bigcap_{a=1}^{r}\bar{\mathcal{M}}(e,a)\cap\left\{\sum_{s\in e}I\{\xi_s\neq u\}\leqslant t+\omega-2\right\}.$$

Второе и третье события означают, что произошло событие $\mathcal{AM}(e,u)$ (см. (26)). Из первого же события следует, что для любого $s\in e$ с условием $\xi_s\neq u$ выполнено $\zeta_s=\eta_s=u$. Поскольку имеет место событие $\mathcal{AM}(e,u)$, обозначенное множество вершин непусто. Рассмотрим такую вершину $v\in e$, что $\xi_v\neq u$ и $\xi_s=u$ для всех $s\in e$, $s>v$. Ясно, что будет выполнено событие $\mathcal{A}_v$. Следовательно, $\zeta_v=\xi_v\neq u$, и мы получаем противоречие с первым событием в пересечении. Значит, приведённые три события несовместны, и равенство (40) обосновано.

Теперь мы будем оценивать вероятность события $\mathcal{C}_2(e,u)$. Рассмотрим случайное множество вершин $T=\{s\in e\colon \xi_s\neq u\}$. Так как имеет место событие $\mathcal{C}_2(e,u)$, то, во-первых, для всех $v\in T$ выполнено $\zeta_v=\eta_v=u$ и, во-вторых, $|T|\geqslant t+\omega-1$ (см. (40)). Введём обозначение $E(e)=\{f\in E\setminus\{e\}\colon f\cap e\neq\varnothing\}$.

Если $\zeta_v\neq\xi_v$ для вершины v, то должны быть выполнены два события: D_v и

$$\mathcal{B}(e,f_v,v,u,a_v)=\left\{\mathcal{M}(f_v,a_v)\cap\bigcap_{s\in f_v\colon s<v}\{\zeta_s=a_v\}\cap\{\zeta_v=\eta_v=u\}\right\}, \tag{41}$$

где f_v — это некоторое ребро с условием, что $v\in e\cap f_v$ и v является первой (по нумерации) вершиной из $e\cap f_v$, а $a_v\neq u$ — некоторый цвет. Легко убедиться, что подобные рёбра f_v различны для различных v.

Пусть Y — произвольное подмножество вершин ребра e мощности $y=|Y|\geqslant t+\omega-1$. Тогда имеет место соотношение

$$\mathcal{C}_2(e,u)\cap\{T=Y\}\subset \\ \subset\bigcap_{s\in e\setminus Y}\{\xi_s=u\}\cap\bigcup_{\substack{a_1,\dots,a_y=1,\\ a_i\neq u}}^{r}\ \bigcup_{\substack{f_1,\dots,f_y\in E(e),\\ v_i\in f_i\cap e}}\ \bigcap_{i=1}^{y}\mathcal{B}(e,f_i,v_i,u,a_i), \tag{42}$$

где v_i — это первая вершина из $f_i\cap e$. Поскольку $y\geqslant t+\omega-1$ и ребро e содержится не более чем в ω 3-циклах, существует такой поднабор рёбер $\{f_1',\dots,f_{t-1}'\}\subset\{f_1,\dots,f_y\}$, что все множества $\hat{f}_i'=f_i'\setminus e$, $i=1\dots,t-1$, попарно не пересекаются и первые вершины множеств $f_i'\cap e$ различны для различных $i=1,\dots,t-1$.

Для удобства введём понятие *конфигурации второго типа*. Будем говорить, что для заданного ребра e неупорядоченный набор рёбер $F=\{f_1,\dots,f_{t-1}\}$ образует конфигурацию второго типа (обозначение $F\in\mathrm{CONF2}(e)$), если для любого $i=1,\dots,t$ выполнено $f_i\in E(e)$ и, кроме того, все множества $f_i\setminus e$

попарно не пересекаются. Также будем использовать обозначение

$$S(F) = \bigcup_{i=1}^{t-1} (f_i \cap e),$$

где $F = \{f_1, \ldots, f_{t-1}\} \in \mathrm{CONF2}(e)$.

Ввиду (42) и приведённых выше рассуждений получаем следующее вложение:

$$\mathcal{C}_2(e,u) \subset \bigcup_{\substack{F \in \mathrm{CONF2}(e),\\ F=\{f_1,\ldots,f_{t-1}\}}} \Bigg\{ \bigcap_{s \in e \setminus S(F)} \big\{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u,\ \eta_s = u\}\big\} \cap \\ \cap \bigcap_{s \in S(F)} \{\eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_{t-1}=1,\\ a_i \neq u}}^{r} \bigcap_{i=1}^{t-1} \mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i) \Bigg\}, \quad (43)$$

где набор рёбер $\{f_1, \ldots, f_t\}$ упорядочен согласно изначально выбранной нумерации множества E, а вершина v_i — это первая вершина множества $f_i \cap e$ для любого $i = 1, \ldots, t-1$.

Событие $\mathcal{B}(e, f_i, v_i, u, a_i)$ очевидным образом (см. (41)) содержится в событии $\bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \cap \{\eta_{v_i} = u\}$. Следовательно, согласно (43) имеет место соотношение

$$\mathcal{C}_2(e,u) \subset \bigcup_{\substack{F \in \mathrm{CONF2}(e),\\ F=\{f_1,\ldots,f_{t-1}\}}} \Bigg\{ \bigcap_{s \in e \setminus S(F)} \big\{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u,\ \eta_s = u\}\big\} \cap \\ \cap \bigcap_{s \in S(F)} \{\xi_s \neq u,\ \eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_{t-1}=1,\\ a_i \neq u}}^{r} \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \Bigg\}.$$

Возьмём объединение по u у обеих частей:

$$\bigcup_{u=1}^{r} \mathcal{C}_2(e,u) \subset \bigcup_{\substack{F \in \mathrm{CONF2}(e),\\ F=\{f_1,\ldots,f_{t-1}\}}} \bigcup_{u=1}^{r} \Bigg\{ \bigcap_{s \in e \setminus S(F)} \Big\{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u,\ \eta_s = u\}\Big\} \cap \\ \cap \bigcap_{s \in S(F)} \{\eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_{t-1}=1,\\ a_i \neq u}}^{r} \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \Bigg\}. \quad (44)$$

Введём событие

$$\mathcal{Q}_3(e,F) = \bigcup_{u=1}^{r} \Bigg\{ \bigcap_{s \in e \setminus S(F)} \Big\{\{\xi_s = u\} \sqcup \{\xi_s \neq u,\ \eta_s = u\}\Big\} \cap \\ \cap \bigcap_{s \in S(F)} \{\eta_s = u\} \cap \bigcup_{\substack{a_1,\ldots,a_{t-1}=1,\\ a_i \neq u}}^{r} \bigcap_{i=1}^{t-1} \bigcap_{s \in f_i} \{\xi_s = a_i\} \Bigg\}, \quad (45)$$

где e — это ребро H, $F = \{f_1, \ldots, f_{t-1}\} \in \mathrm{CONF2}(e)$, и рёбра записаны согласно их нумерации. Из соотношений (44) и (45) получаем

$$\bigcup_{u=1}^{r} \mathcal{C}_2(e,u) \subset \bigcup_{F \in \mathrm{CONF2}(e)} \mathcal{Q}_3(e,F). \tag{46}$$

Нам осталось оценить вероятность события $\mathcal{Q}_3(e,F)$.

Рассмотрим множество рёбер $F = \{f_1, \ldots, f_{t-1}\}$ более подробно. Гиперграф $H(F) = (V,F)$ можно разбить на некоторое число связных компонент. Пусть $H_1, \ldots, H_l$ — эти компоненты. Поскольку F является конфигурацией второго типа, рёбра f_i и f_j могут иметь общие вершины только внутри ребра e. Напомним также, что гиперграф H является 2-простым. Для каждой компоненты H_j, $j = 1, \ldots, l$, введём обозначения

$$h_j = |\{f \in E(H_j) \colon |f \cap e| = 2\}|, \quad l_j = |\{f \in E(H_j) \colon |f \cap e| = 1\}|.$$

Так как H является 2-простым, имеет место равенство

$$\sum_{j=1}^{l} (h_j + l_j) = t - 1. \tag{47}$$

Для каждой компоненты H_j рассмотрим граф G_j: $G_j = (V_j, E_j)$, где

$$V_j = e \cap V(H_j), \quad E_j = \{f \cap e \colon f \in E(H_j) \text{ и } |f \cap e| = 2\}|.$$

Следующее утверждение проясняет структуру конфигурации второго типа.

Утверждение 1. *Для любого $j = 1, \ldots, l$ граф G_j является либо деревом, либо изолированной вершиной.*

Доказательство. Если $h_j = 0$, то, конечно, $l_j > 0$. Но в этом случае H_j имеет ровно одно ребро f. Действительно, если $g \in E(H_j)$ и $g \neq f$, то $|g \cap e| = 1$ и $|g \cap f| > 0$. Но это означает, что $f \cap e = g \cap e$, т. е. g имеет ту же первую (и единственную) вершину в своём пересечении с e, что и f. Получилось противоречие с определением конфигурации второго типа. Таким образом, граф G_j представляет собой только изолированную вершину.

Пусть теперь $h_j > 0$. Так как H_j связный и $F \in \mathrm{CONF2}(e)$, граф G_j также связный. Предположим, что в G_j есть цикл $(w_1, \ldots, w_m)$, $m \geqslant 3$, т. е. $\{w_i, w_{i+1}\} \in E(G_j)$, $i = 1, \ldots, m-1$, и $\{w_1, w_m\} \in E(G_j)$. Без ограничения общности будем считать, что $w_1 < w_j$ для $j > 1$, т. е. w_1 — это вершина с наименьшим номером в цикле. Так как $\{w_1, w_2\} \in E(G_j)$, существует такое ребро $g_1 \in E(H_j)$, что $\{w_1, w_2\} = g_1 \cap e$, стало быть, w_1 — первая вершина в $g_1 \cap e$. Совершенно аналогично получаем, что существует другое ребро $g_2 \in E(H_j)$ с условиями $\{w_1, w_m\} = g_2 \cap e$, и значит, w_1 — это первая вершина из $g_2 \cap e$. Получили противоречие с тем, что F — конфигурация второго типа, $F \in \mathrm{CONF2}(e)$. Следовательно, G_j — дерево. □

Из утверждения 1 следует, что $|V(G_j)| = |E(G_j)| + 1 = h_j + 1$ и, значит, выполнено

$$|S(F)| = \sum_{j=1}^{l} |V(G_j)| = \sum_{j=1}^{l} (h_j + 1). \tag{48}$$

Из определений величин h_j и l_j получаем, что для любого $j = 1, \ldots, l$ имеет место равенство

$$\left| \bigcup_{f \in H_j} f \right| = (k-2)h_j + (k-1)l_j + |V(G_j)| = (k-1)(h_j + l_j) + 1. \tag{49}$$

Наконец, из утверждения 1 также следует, что для любого $j = 1, \ldots, l$

$$l_j \leqslant 1. \tag{50}$$

Действительно, ввиду биекции между рёбрами H_j и их первыми вершинами в пересечениях с e выполнено

$$h_j + l_j = |E(H_j)| \leqslant |V(G_j)| = h_j + 1,$$

и неравенство (50) обосновано.

Используя введённые обозначения, вероятность события $\mathcal{Q}_3(e, F)$ (см. (45)) легко посчитать:

$$\mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_3(e,F)\big) = r \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{r} \right)^{k - |S(F)|} p^{|S(F)|} (r-1)^l \prod_{j=1}^{l} r^{-\left| \bigcup_{f \in H_j} f \right|}. \tag{51}$$

Прокомментируем появление последних двух множителей в правой части (51). Так как все рёбра набора F одноцветны в начальной раскраске ξ, значения случайных величин ξ_s должны совпадать для всех вершин $s \in V(H_j)$ компоненты H_j. Таким образом, нам нужно выбирать цвет, не равный u, только для каждой компоненты (множитель $(r-1)^l$). Последний же множитель равен вероятности того, что каждое ребро компоненты H_j полностью покрашено в выбранный цвет в раскраске ξ.

С учётом соотношений (47)—50 получаем следующую верхнюю оценку вероятности события $\mathcal{Q}_3(e, F)$:

$$\begin{aligned} \mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_3(e,F)\big) &= r \left(\frac{1}{r} + \frac{q}{r} \right)^{k - |S(F)|} p^{|S(F)|} (r-1)^l \prod_{j=1}^{l} r^{-\left| \bigcup_{f \in H_j} f \right|} = \\ &= r^{1-k} (1+q)^{k - |S(F)|} (rp)^{|S(F)|} (r-1)^l \prod_{j=1}^{l} r^{-(k-1)(h_j + l_j) - 1} = \\ &= r^{1-k} (1+q)^{k - |S(F)|} (rp)^{|S(F)|} (r-1)^l r^{-(k-1)(t-1) - l} \leqslant \\ &\leqslant r^{(1-k)t} (1+q)^k (rp)^{|S(F)|} \leqslant r^{(1-k)t} (1+q)^k (2q)^{t-1}. \end{aligned} \tag{52}$$

В комментариях нуждается только последнее неравенство. В силу условия (24) выполнено $2q \leqslant 1$. Кроме того, мы знаем, что $rp = \big(r/(r-1)\big)q \leqslant 2q$. Наконец, из (47), (49) и (50) следует, что $|S(F)| \geqslant t-1$.

Оценка (52) завершает анализ отдельных частей события $\mathcal{F}$. Далее мы покажем, что в условиях теоремы 11 вероятность этого события строго меньше единицы.

4.7. Применение локальной леммы

Напомним, что из определений (27) и (28) событий $\mathcal{F}$ и $\mathcal{C}_i(e,u)$, $i=1,2,3$, $e \in E$, $u=1,\ldots,r$, следует, что имеет место равенство

$$\mathcal{F} = \bigcup_{e\in E}\bigcup_{u=1}^{r}\big(\mathcal{C}_1(e,u)\cup\mathcal{C}_2(e,u)\cup\mathcal{C}_3(e,u)\big).$$

Ввиду полученных в предыдущих разделах соотношений (30)—(33), (38) и (46) справедливо соотношение

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{e\in E}\{\mathcal{Q}_0(e)\cup\mathcal{Q}_1(e)\}\cup\bigcup_{e\in E}\bigcup_{F\in\mathrm{CONF1}(e)}\mathcal{Q}_2(e,F)\cup\bigcup_{e\in E}\bigcup_{F\in\mathrm{CONF2}(e)}\mathcal{Q}_3(e,F). \quad (53)$$

Далее нам понадобиться классическое утверждение под названием «локальная лемма», впервые доказанное в работе П. Эрдёша и Л. Ловаса [15]. Мы сформулируем его в некотором специальном случае.

Теорема 12. *Пусть $\mathcal{B}_1,\ldots,\mathcal{B}_N$ — события на некотором вероятностном пространстве. Пусть $S_1,\ldots,S_N$ — такие подмножества индексов в $\mathcal{R}_N=\{1,\ldots,N\}$, что для каждого $i=1,\ldots,N$ событие $\mathcal{B}_i$ независимо с алгеброй, порождённой событиями $\{\mathcal{B}_j,\ j\in\mathcal{R}_N\setminus S_i\}$. Если для любого $i=1,\ldots,N$ выполняется неравенство*

$$\sum_{j\in S_i\cup\{i\}}\mathsf{P}(\mathcal{B}_j)\leqslant\frac{1}{4}, \quad (54)$$

то

$$\mathsf{P}\bigg(\bigcap_{j=1}^{N}\bar{\mathcal{B}}\bigg)\geqslant\prod_{j=1}^{N}\big(1-2\mathsf{P}(\mathcal{B}_i)\big)>0.$$

Доказательство локальной леммы можно найти, например, в [1]. Рассмотрим систему событий Ψ, состоящую из всех событий $\mathcal{Q}_i(e)$, $i=0,1$, $e\in E$, всех событий $\mathcal{Q}_2(e,F)$, $e\in E$, $F\in\mathrm{CONF1}(e)$, и всех событий $\mathcal{Q}_3(e,F)$, $e\in E$, $F\in\mathrm{CONF2}(e)$. Ввиду (53) выполняется неравенство

$$\mathsf{P}(\mathcal{F})\leqslant\mathsf{P}\bigg(\bigcup_{\mathcal{B}\in\Psi}\mathcal{B}\bigg)=1-\mathsf{P}\bigg(\bigcap_{\mathcal{B}\in\Psi}\bar{\mathcal{B}}\bigg). \quad (55)$$

Мы покажем, что вероятность события $\bigcap_{\mathcal{B}\in\Psi}\bar{\mathcal{B}}$ строго больше нуля. Согласно локальной лемме (см. теорему 12) для этого для каждого $\mathcal{B}\in\Psi$ достаточно указать такую систему событий $\Psi_{\mathcal{B}} \subset \Psi$, что $\mathcal{B}$ и алгебра событий $\{\mathcal{Q} \in \Psi \setminus \Psi_{\mathcal{B}}\}$ независимы и, кроме того, выполняется неравенство

$$\sum_{\mathcal{Q} \in \Psi_{\mathcal{B}} \cup \{\mathcal{B}\}} \mathsf{P}(\mathcal{Q}) \leqslant \frac{1}{4}. \tag{56}$$

Любое событие $\mathcal{B} \in \Psi$ может иметь один из трёх видов:

1) $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_i(e)$ для некоторого $e \in E$ и $i \in \{0, 1\}$;
2) $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_2(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \mathrm{CONF1}(e)$;
3) $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_3(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \mathrm{CONF2}(e)$.

Определим для каждого события $\mathcal{B} \in \Psi$ его *область* $D(\mathcal{B})$ по следующему правилу:

$$D(\mathcal{B}) = \begin{cases} e, & \text{если } \mathcal{B} = \mathcal{Q}_i(e),\ i = 0, 1, \\ e \cup \Big(\bigcup\limits_{f \in F} f\Big), & \text{если } \mathcal{B} = \mathcal{Q}_i(e, F),\ i = 2, 3. \end{cases}$$

Из определений (30), (33), (37), (45) следует, что событие $\mathcal{B}$ принадлежит алгебре, порождённой событиями $\{\xi_j, \eta_j \colon j \in D(\mathcal{B})\}$. Тогда это событие независимо с алгеброй, порождённой случайными величинами $\{\xi_j, \eta_j \colon j \in V \setminus D(\mathcal{B})\}$. Возьмём систему событий $\Psi_{\mathcal{B}}$, состоящую из всех таких событий $\mathcal{Q} \in \Psi$, что области $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{B}$ имеют непустое пересечение. Формально

$$\Psi_{\mathcal{B}} = \{\mathcal{Q} \in \Psi \colon D(\mathcal{Q}) \cap D(\mathcal{B}) \neq \varnothing\}.$$

При таком выборе $\Psi_{\mathcal{B}}$ событие $\mathcal{B}$ будет независимо с алгеброй, порождённой $\{\mathcal{J} \in \Psi \setminus \Psi_{\mathcal{B}}\}$. Нам остаётся только проверить выполнение неравенства (56). В силу выбора $\Psi_{\mathcal{B}}$ получаем соотношение

$$\sum_{\mathcal{J} \in \Psi_{\mathcal{B}}} \mathsf{P}(\mathcal{J}) \leqslant \sum_{e \in E \colon e \cap D(\mathcal{B}) \neq \varnothing} \Big(\mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_0(e)\big) + \mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_1(e)\big)\Big) + \\ + \sum_{\substack{e \in E,\ F \in \mathrm{CONF1}(e)\colon \\ D(\mathcal{B}) \cap D(\mathcal{Q}_2(e,F)) \neq \varnothing}} \mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_2(e, F)\big) + \sum_{\substack{e \in E,\ F \in \mathrm{CONF2}(e)\colon \\ D(\mathcal{B}) \cap D(\mathcal{Q}_3(e,F)) \neq \varnothing}} \mathsf{P}\big(\mathcal{Q}_3(e, F)\big). \tag{57}$$

Обозначим через $a(\mathcal{B})$, $b(\mathcal{B})$ и $c(\mathcal{B})$ количество слагаемых в первой, второй и третьей суммах в выражении в правой части (57) соответственно. С помощью этих обозначений из соотношения (57) и оценок (31)—(52) получаем неравенство

$$\sum_{\mathcal{J} \in \Psi_{\mathcal{B}}} \mathsf{P}(\mathcal{B}) \leqslant a(\mathcal{B}) \left(r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^k + r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega}\right) + \\ + b(\mathcal{B}) r^{-(t+1)(k-1)} q^t (kq)^{t(t+\omega-2)} + c(\mathcal{B}) r^{-t(k-1)} (1+q)^k (2q)^{t-1}. \tag{58}$$

Рассмотрим три случая в зависимости от вида события $\mathcal{B}$.

1. $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_i(e)$ для некоторого $e \in E$ и $i \in \{0, 1\}$. По условию (22) теоремы 11 существует не более d других рёбер, пересекающих произвольное $e \in E$.

Отсюда следует, что

$$a(\mathcal{B}) \leqslant d+1, \quad b(\mathcal{B}) \leqslant (d+1)\binom{d}{t} + (d+1)d\binom{d-1}{t-1},$$
$$c(\mathcal{B}) \leqslant (d+1)\binom{d}{t-1} + (d+1)d\binom{d-1}{t-2}. \quad (59)$$

Первое неравенство в (59) очевидно. Для обоснования остальных двух достаточно заметить, что e может пересекаться либо с e' из события $\mathcal{Q}_2(e', F)$, либо с некоторым $f \in F$.

2. $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_2(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \mathrm{CONF1}(e)$. Такое событие зависит от $(t+1)$ рёбер. Следовательно, используя оценки из (59), получаем

$$a(\mathcal{B}) \leqslant (t+1)(d+1), \quad b(\mathcal{B}) \leqslant (t+1)\left((d+1)\binom{d}{t} + (d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right),$$
$$c(\mathcal{B}) \leqslant (t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1} + (d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right). \quad (60)$$

3. $\mathcal{B} = \mathcal{Q}_3(e, F)$ для некоторых $e \in E$ и $F \in \mathrm{CONF2}(e)$. Подобное событие зависит от t рёбер. По аналогии с предыдущим случаем получаем

$$a(\mathcal{B}) \leqslant t(d+1), \quad b(\mathcal{B}) \leqslant t\left((d+1)\binom{d}{t} + (d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right),$$
$$c(\mathcal{B}) \leqslant t\left((d+1)\binom{d}{t-1} + (d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right). \quad (61)$$

Легко убедиться с использованием (59)—(61), что верхние оценки величин $a(\mathcal{B})$, $b(\mathcal{B})$ и $c(\mathcal{B})$ максимальны во втором случае. Следовательно, для доказательства (56) достаточно в силу (58) проверить выполнение неравенства

$$W = (t+1)(d+1)\left(r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^k + r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega}\right) +$$
$$+ (t+1)\left((d+1)\binom{d}{t} + (d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right) r^{-(t+1)(k-1)} q^t (kq)^{t(t+\omega-2)} +$$
$$+ (t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1} + (d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right) r^{-t(k-1)} (1+q)^k (2q)^{t-1} \leqslant \frac{1}{4}. \quad (62)$$

В следующем разделе мы приведём некоторые дополнительные вычисления.

4.8. Вспомогательная аналитика

Величина W (см. (62)) состоит из четырёх слагаемых:

$$(t+1)(d+1)r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^k, \quad (t+1)(d+1)r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega},$$

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t}+(d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right)q^t r^{-(k-1)(t+1)}(kq)^{t(t+\omega-2)},$$
$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1}+(d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right)r^{-(k-1)t}(1+q)^k(2q)^{t-1}.$$

Рассмотрим и оценим их по отдельности.

1. Первое слагаемое имеет вид $(t+1)(d+1)r(r-1)\,(p/r)^k$. С помощью ограничения (22), условий (23) и (24) получаем следующую верхнюю его оценку:

$$(t+1)(d+1)r(r-1)\left(\frac{p}{r}\right)^n \leqslant (t+1)kr^{k-1}r^{1-n}(r-1)\left(\frac{q}{r-1}\right)^k =$$
$$= (t+1)k(r-1)^{1-k}q^k \leqslant k^2q^k \leqslant k^2 2^{-k}. \quad (63)$$

2. Второе слагаемое равно $(t+1)(d+1)r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega}$. По выбору параметра q в (21) имеем

$$\begin{aligned}&(t+1)(d+1)r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega} \leqslant\\ &\quad\leqslant (t+1)kr^{k-1}r^{1-k}(1-q)^{k-t-\omega}(kq)^{t+\omega} =\\ &\quad= (t+1)n(1-q)^{k-t-\omega}(\alpha\ln k)^{t+\omega} \leqslant (t+1)ke^{q(t+\omega)-qk}(\alpha\ln k)^{t+\omega} =\\ &\quad= (t+1)k^{1-\alpha}e^{\alpha(\ln k)(t+\omega)/k}(\alpha\ln k)^{t+\omega}. \quad (64)\end{aligned}$$

3. Рассмотрим третье слагаемое в выражении (62) для величины W:

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t}+(d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right)q^t r^{-(k-1)(t+1)}(kq)^{t(t+\omega-2)}. \quad (65)$$

Нам понадобятся несколько предварительных оценок. Во-первых, выполнены неравенства

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t}+(d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right) = (t+1)\binom{d}{t}(d+1)(t+1) \leqslant$$
$$\leqslant (t+1)^2(d+1)\frac{d^t}{t!} \leqslant (t+1)^2\frac{(d+1)^t}{t!}. \quad (66)$$

Во-вторых, из выбора параметров t и q (см. (21)) вытекают соотношения

$$q^t(kq)^{t(t+\omega-2)} = k^{-t}(kq)^{t(t+\omega-1)} \leqslant k^{-t}(kq)^{t^2+t\omega} =$$
$$= k^{-t}\exp\{t^2\ln(\alpha\ln k)\}(kq)^{t\omega} \leqslant k^{-t}\exp\{\ln k\}(\alpha\ln k)^{t\omega} = k^{1-t}(\alpha\ln k)^{t\omega}. \quad (67)$$

Наконец, из (66), (67) и начального условия (22) на величину d получаем верхнюю оценку третьего слагаемого в выражении (65):

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t}+(d+1)d\binom{d-1}{t-1}\right)q^t r^{-(k-1)(t+1)}(kq)^{t(t+\omega-2)} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(t+1)^2}{t!}(d+1)^{t+1}r^{-(k-1)(t+1)}k^{1-t}(\alpha\ln k)^{t\omega} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(t+1)^2}{t!}k^{(t+1)(1-b/t)}k^{1-t}(\alpha\ln k)^{t\omega} \leqslant$$
$$\leqslant \frac{(t+1)^2}{t!}k^{t+1-(b(t+1)/t)}k^{1-t}(\alpha\ln k)^{t\omega} =$$
$$= \frac{(t+1)^2}{t!}k^{2-b-(b/t)}(\alpha\ln k)^{t\omega} \leqslant \frac{(t+1)^2}{t!}k^{2-b}(\alpha\ln k)^{t\omega}. \quad (68)$$

4. Осталось оценить четвёртое слагаемое в (62):

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1}+(d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right)r^{-(k-1)t}(1+q)^k(2q)^{t-1}. \quad (69)$$

По аналогии с (66) имеем

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1}+(d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right)=(t+1)\binom{d}{t-1}(d+1)t \leqslant$$
$$\leqslant (t+1)t\left(\frac{de}{t-1}\right)^{t-1}(d+1) \leqslant (d+1)^t\left(\frac{e}{t-1}\right)^{t-1}(t+1)t. \quad (70)$$

Ввиду условия (21) нашей теоремы выполнено

$$(2q)^{t-1}(1+q)^k \leqslant k^{1-t}(2\alpha\ln k)^{t-1}e^{qk} = k^{1+\alpha-t}(2\alpha\ln k)^{t-1}. \quad (71)$$

Наконец, из (70), (71) и (22) получаем верхнюю оценку выражения (69):

$$(t+1)\left((d+1)\binom{d}{t-1}+(d+1)d\binom{d-1}{t-2}\right)r^{-(k-1)t}(1+q)^k(2q)^{t-1} \leqslant$$
$$\leqslant (t+1)t\left(\frac{e}{t-1}\right)^{t-1}(d+1)^t r^{-(k-1)t}k^{1+\alpha-t}(2\alpha\ln k)^{t-1} \leqslant$$
$$\leqslant (t+1)t\left(\frac{2e\alpha\ln k}{t-1}\right)^{t-1} r^{(k-1)t}k^{t(1-b/t)}r^{-(k-1)t}k^{1+\alpha-t} =$$
$$= (t+1)t\left(\frac{2e\alpha\ln k}{t-1}\right)^{t-1} k^{1+\alpha-b}. \quad (72)$$

Неравенство (72) завершает исследование величины W.

4.9. Завершение доказательства теоремы 11

Соберём вместе полученные оценки слагаемых выражения (62) для величины W. Из соотношений (63)—(72) вытекают неравенства

$$W \leqslant \frac{k^2}{2^k} + (t+1)k^{1-\alpha}e^{\alpha(\ln k)(t+\omega)/k}(\alpha \ln k)^{t+\omega} + \frac{(t+1)^2}{t!}k^{2-b}(\alpha\ln k)^{t\omega} + \\ + (t+1)t\left(\frac{2e\alpha\ln k}{t-1}\right)^{t-1}k^{1+\alpha-b} < \frac{1}{4},$$

последнее из которых выполнено ввиду условия (25) теоремы 11. Таким образом, мы обосновали необходимое соотношение (62), влекущее выполнение неравенства (56), необходимого для применения локальной леммы. Согласно локальной лемме вероятность того, что одновременно будут выполнены все события $\bar{\mathcal{B}}$, где $\mathcal{B} \in \Psi$, строго больше нуля. Ввиду (55) мы получаем, что

$$\mathsf{P}(\mathcal{F}) < 1.$$

Итак, мы доказали, что вероятность того, что случайная раскраска $\vec{\zeta}$ не является правильной r-раскраской для H, строго меньше единицы. Значит, гиперграф H является r-раскрашиваемым и $\chi(H) \leqslant r$. Теорема 11 доказана.

4.10. Завершение доказательства теоремы 4

Будем использовать теорему 11. Выберем значения параметров b и α следующим образом:

$$b = 4, \quad \alpha = 2.$$

В силу такого выбора b и α и условия $\omega \leqslant \sqrt{\ln k/\ln\ln k}$ существует такое целое число k_1, что для всех $k \geqslant k_1$ выполняются неравенства (23) и (24). Рассмотрим выражение в левой части (25). Ввиду (21) имеем, что $t = O\big(\sqrt{\ln k/\ln\ln k}\big)$, и значит,

$$(t+1)k^{1-\alpha}e^{\alpha(\ln k)(t+\omega)/k}(\alpha\ln k)^{t+\omega} = \\ = e^{O(\ln\ln k)}k^{-1}e^{o(1)}e^{O(\sqrt{\ln k \ln\ln k})} = o(1), \quad k \to \infty,$$

$$\frac{(t+1)^2}{t!}k^{2-b}(\alpha\ln k)^{t\omega} = O(k^{-2})e^{\ln k(1+o(1))} = o(1), \quad k \to \infty,$$

$$(t+1)t\left(\frac{2e\alpha\ln k}{t-1}\right)^{t-1}k^{1+\alpha-b} = e^{O(\sqrt{\ln k\ln\ln k})}k^{-1} = o(1), \quad k \to \infty.$$

Из данных соотношений следует, что существует такое целое число k_2, что для всех $k \geqslant k_2$ выполняется неравенство (25).

Пусть задан гиперграф $H = (V, E)$ из класса $\mathcal{H}(k, \omega)$ с $\omega \leqslant \sqrt{\ln k/(\ln\ln k)}$. При $k \geqslant k_0 = \max(k_1, k_2)$ гиперграф H удовлетворяет всем условиям теоремы 11, кроме (22). Однако в силу ограничения (6) на максимальную степень вершины гиперграфа H каждое его ребро $e \in E$ пересекает не более чем

$$k \cdot r^{k-1}k^{-4\lfloor\sqrt{(\ln k)/\ln(2\ln k)}\rfloor^{-1}} - k + 1 < r^{k-1}k^{1-b/t} - 1$$

других рёбер. Следовательно, для H выполнено условие (22), значит, теорема 11 к нему применима. Согласно теореме 11 гиперграф H является r-раскрашиваемым. Теорема 4 доказана.

5. Предписанные раскраски гиперграфов

В этом разделе мы обсудим вопрос о предписанной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа $H(n,k,p)$. Сначала напомним основные определения.

Пусть $H=(V,E)$ — гиперграф с множеством вершин V и множеством рёбер E, C — некоторое множество, элементы которого называются *цветами*. *Вершинным предписанием* A называется отображение, которое каждой вершине v ставит в соответствие некоторое (непустое) подмножество $A(v)\subseteq C$. Если $|A(v)|=r$ для любой вершины $v\in V$, то говорят, что *мощность* предписания A равна r.

Раскраской f вершин гиперграфа H, соответствующей предписанию A, называется такое однозначное отображение $f\colon V\to C$, что $f(v)\in A(v)$. При этом говорят, что каждая вершина v окрашена в цвет $f(v)$. Как и раньше, раскраска называется *правильной* для гиперграфа H, если в ней все рёбра из E неодноцветны. Гиперграф называется *предписанно r-раскрашиваемым*, если для любого множества цветов C и любого вершинного предписания A мощности r найдётся правильная раскраска, соответствующая данному предписанию. *Предписанным хроматическим числом* гиперграфа H называется минимальное натуральное число r, такое что H является предписанно r-раскрашиваемым. Мы будем обозначать предписанное хроматическое число гиперграфа H через $\mathrm{ch}(H)$, как это принято в мировой литературе. Из приведённого определения следует, что для любого гиперграфа H выполняется неравенство

$$\mathrm{ch}(H)\geqslant\chi(H).$$

Изучение предписанных хроматических чисел графов и гиперграфов было инициировано в [2, 18]. Нас будет интересовать вопрос о пороговой вероятности предписанной r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$.

5.1. Пороговая вероятность предписанной r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$

Предписанное хроматическое число случайного гиперграфа $H(n,k,p)$ изучалось в работе М. Кривелевича и В. Ву [24]. Они показали, что $\mathrm{ch}\big(H(n,k,p)\big)$ асимптотически ведёт себя почти как обычное хроматическое число $\chi\big(H(n,k,p)\big)$. Их первый результат выполнен для почти всех p, но имеет небольшой зазор между $\mathrm{ch}\big(H(n,k,p)\big)$ и $\chi\big(H(n,k,p)\big)$.

Теорема 13 (М. Кривелевич, В. Ву [24]). *Пусть $k\geqslant 2$ фиксировано. Тогда существует такое $C=C(k)>0$, что для всех $p=p(n)$ с условием $Cn^{1-k}\leqslant p\leqslant 0{,}9$ выполняется сходимость*

$$\mathsf{P}\Big(ch\big(H(n,k,p)\big)\leqslant\big(1+\psi(n)\big)k^{1/(k-1)}\chi\big(H(n,k,p)\big)\Big)\to 1\quad\text{при}\quad n\to\infty,$$

где $\psi(n)\to 0$ при $n^{k-1}p\to\infty$.

Вторая теорема из [24] устанавливает, что для достаточно больших p данный зазор может быть убран.

Теорема 14 (М. Кривелевич, В. Ву [24]). *Пусть $k \geqslant 2$ фиксировано и $0 < \varepsilon < (k-1)^2/(2k)$. Тогда для любой $p = p(n)$ с условием $n^{-(k-1)^2/(2k)+\varepsilon} \leqslant$ $\leqslant p \leqslant 0{,}9$ выполняется сходимость*

$$\mathsf{P}\Big(\mathrm{ch}\big(H(n,k,p)\big) = \big(1+o(1)\big)\chi\big(H(n,k,p)\big)\Big) \to 1 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Из теорем 13 и 9 вытекает следующий аналог следствия 2 для предписанной r-раскрашиваемости.

Следствие 3. *Пусть $k \geqslant 3$ и $\varepsilon \in (0,1)$ фиксированы. Тогда существует такое $r_0 = r_0(k,\varepsilon)$, что для любой функции $r = r(n)$ с условиями*

$$r \geqslant r_0, \quad r^{k-1} \ln r = o(n^{k-1}),$$

выполняется следующая сходимость:

$$\mathsf{P}\big(\mathrm{ch}\big(H(n,k,p)\big) \leqslant r\big) \to 1, \quad \text{где} \quad p = (1-\varepsilon)\frac{r^{k-1}\ln r}{k}\,\frac{n}{\binom{n}{k}}.$$

Видно, что нижняя оценка пороговой вероятности для предписанной r-раскрашиваемости, приведённая в следствии 3, не совпадает с верхней оценкой (7) из леммы 2 (ведь если гиперграф не является r-раскрашиваемым, то он также не является и предписанно r-раскрашиваемым). Зазор между оценками имеет порядок k. Напомним, что применение теоремы 9 требует следующих ограничений на параметры r и k в следствии 3 (см. (11)):

$$r = \Omega(k^{29}(\ln k)^{28}), \quad n \geqslant k^{9k+O(k\ln\ln k/\ln k)}. \tag{73}$$

Что известно про предписанную r-раскрашиваемость при $r = O(k^{29}(\ln k)^{28})$?

Замечание 3. Заметим, что для очень больших r (например, для $r > \sqrt{n}$) и фиксированного k теорема 14 вместе с теоремой 9 даёт асимптотическое значение для пороговой вероятности предписанной r-раскрашиваемости случайного гиперграфа:

$$p^* \sim r^{k-1}\ln r\,\frac{n}{\binom{n}{k}}.$$

Доказательство следствия 1 основано на применении детерминированного алгоритма раскраски, который напрямую не может быть перенесён на случай произвольного предписания мощности r, поэтому нельзя сказать, что нижняя оценка следствия 1 выполнена и для предписанной r-раскрашиваемости. Кроме того, доказательства теорем 7 и 8 также нельзя напрямую адаптировать для предписанных раскрасок. Следовательно, в случае, когда r невелико по сравнению с k, известен только результат леммы 3, которая обобщает результат (8).

Лемма 3. *Существуют такие абсолютные константы $c, d_0 > 0$, что для любых k и r с условиями*

$$r^{k-1} \geqslant d_0, \quad r^{k-1} = o(n)$$

и любой функции $p = p(n) \in [0,1]$ *с условием*

$$p \leqslant c\,\frac{r^{k-1}}{k^2}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{74}$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}\bigl(\mathrm{ch}\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) = 1.$$

Наш новый результат настоящего раздела обобщает результат теоремы 10 на случай предписанных раскрасок.

Теорема 15. *Пусть зафиксировано* $\delta \in (0,1)$. *Пусть, кроме того, функции* $k = k(n)$ *и* $r = r(n) \geqslant 2$ *удовлетворяют следующим условиям*: $k \geqslant k_0$ *для некоторого* $k_0 = k_0(\delta)$,

$$(k-1)\ln r < \frac{1-\delta}{2}\ln n, \quad r^{k-1}k^{-\varphi(k)} \geqslant 6\ln n, \tag{75}$$

где

$$\varphi(k) = 4\left\lfloor\sqrt{\frac{\ln k}{\ln(2\ln k)}}\right\rfloor^{-1}.$$

Тогда для любой функции $p = p(n)$ *с условием*

$$p \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{r^{k-1}}{k^{1+\varphi(k)}}\,\frac{n}{\binom{n}{k}} \tag{76}$$

выполнено $\mathsf{P}\bigl(\mathrm{ch}\bigl(H(n,k,p)\bigr) \leqslant r\bigr) \to 1$ *при* $n \to \infty$.

Приведённая в теореме 15 оценка лучше (для всех достаточно больших k), чем результат (74) леммы 3, но хуже, чем результат следствия 3. Следовательно, теорема 15 даёт наилучшую из известных нижнюю оценку (76) пороговой вероятности предписанной r-раскрашиваемости $H(n,k,p)$ в широкой области значений параметров (напомним ограничение (73)):

$$r \leqslant k^{29}(\ln k)^{28}, \quad 6\,k^{\varphi(k)}\ln n \leqslant r^{k-1} \leqslant n^{(1-\delta)/2},$$

где $k \geqslant k_0$ достаточно велико.

Доказательство теоремы 15 почти полностью повторяет доказательство теоремы 10, за исключением того, что вместо основного результата настоящей работы, теоремы 4, надо воспользоваться её аналогом для предписанных раскрасок.

Теорема 16. *Существует такое натуральное число* k_0, *что для всех* $k \geqslant k_0$, $r \geqslant 2$, $\omega \leqslant \sqrt{\ln k/(\ln\ln k)}$ *и любого* $H \in \mathcal{H}(k,\omega)$ *с условием*

$$\Delta(H) \leqslant r^{k-1}k^{-4\lfloor\sqrt{\ln k/(\ln(2\ln k))}\rfloor^{-1}}$$

выполнено $\mathrm{ch}(H) \leqslant r$, *т. е.* H *является предписанно* r*-раскрашиваемым.*

В следующем разделе мы приведём идею доказательства теоремы 16.

5.2. Идея доказательства теоремы 16

Для доказательства теоремы 16 достаточно показать, что в условиях вспомогательной теоремы 11 гиперграф H является не только r-раскрашиваемым, но и предписанно r-раскрашиваемым. Основное содержание доказательства при этом остаётся прежним, разница проявляется в изначальном распределении случайных величин.

Пусть $H = (V, E)$ — гиперграф из класса $\mathcal{H}(k, \omega)$, удовлетворяющий условиям теоремы 11, и пусть $A = \{A(v) \colon v \in V\}$ — произвольное вершинное предписание мощности r с множеством цветов $\mathbb{N}$. Без ограничения общности можно считать, что $V = \{1, \ldots, w\}$. По сравнению с разделом 4.3 рассмотрим случайные величины с другим распределением. Пусть $\xi_1, \ldots, \xi_w$ и $\eta_1, \ldots, \eta_w$ — независимые случайные величины со следующим распределением:

— ξ_i, $i = 1, \ldots, w$, имеет равномерное распределение на множестве $A(i)$ $(i = 1, \ldots, w)$,
— η_i, $i = 1, \ldots, w$, принимают все значения из $A(i)$ с равной вероятностью p и значение 0 с вероятностью $1 - rp$.

Для каждого ребра $e \in E$ введём множество цветов $M(e)$ по правилу $M(e) = \bigcap\limits_{s \in e} A(s)$. Ясно, что в раскраске, соответствующей предписанию L, одноцветным может быть только ребро e цвета из множества $M(e)$. Для каждого $u \in M(e)$ введём события $\mathcal{M}(e, u)$, $\mathcal{AM}(e, u)$ так же, как это было сделано в разделе 4.3 (см. (26)). Далее построение случайной раскраски $\vec{\zeta} = (\zeta_1, \ldots, \zeta_w)$ осуществляется тем же способом, что и в разделе 4.3. Единственное отличие заключается в том, что в определениях событий $\mathcal{A}_i$ и $\mathcal{D}_i$ параметр u не принимает значения от 1 до r, а принадлежит соответствующему множеству $M(e)$ или $M(f)$. Оставшаяся часть доказательства остаётся прежней без каких-либо неочевидных изменений.

Литература

[1] Алон Н., Спенсер Дж. Вероятностный метод. — М.: Бином, 2007.

[2] Визинг В. Г. Раскраска вершин графа в предписанные цвета // Методы дискретного анализа в теории кодов и схем: сб. науч. тр. Т. 29. — Новосибирск: Ин—т мат. СО АН СССР, 1976. — С. 3—10.

[3] Колчин В. Ф. Случайные графы. — М.: Физматлит, 2000.

[4] Achlioptas D., Friedgut E. A sharp threshold for k-colorability // Random Structures Algorithms. — 1999. — Vol. 14, no. 1. — P. 63—70.

[5] Achlioptas D., Kim J. H., Krivelevich M., Tetali P. Two-coloring random hypergraphs // Random Structures Algorithms. — 2002. — Vol. 20, no. 2. — P. 249—259.

[6] Achlioptas D., Moore C. On the 2-colorability of random hypergraphs // Random. — Berlin: Springer, 2002. — P. 78—90.

[7] Alon N., Spencer J. A note on coloring random k-sets: unpublished manuscript.

[8] Assmus E. F., Jr., Key J. D. Steiner Systems, Designs and Their Codes. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. — P. 295—316.

[9] Beck J. On 3-chromatic hypergraphs // Discrete Math. — 1978. — Vol. 24, no. 2. — P. 127—137.

[10] Beth T., Jungnickel D., Lenz H. Design Theory. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

[11] Bollobás B. The chromatic number of random graphs // Combinatorica. — 1988. — Vol. 8, no. 1. — P. 49—56.

[12] Bollobás B. Random Graphs. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2001.

[13] Bollobás B., Thomason A. Thresholds functions // Combinatorica. — 1987. — Vol. 7. — P. 35—38.

[14] Coja-Oghlan A., Zdeborová L. The condensation transition in random hypergraph 2-coloring // Proc. 23rd SODA. — 2012. — P. 241—250.

[15] Erdős P., Lovász L. Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions // Infinite and Finite Sets. — Amsterdam: North Holland, 1973. — (Coll. Math. Soc. Jänos Bolyai; Vol. 10). — P. 609—627.

[16] Erdős P., Rényi A. On random graphs. I // Publ. Math. Debrecen. — 1959. — Vol. 6. — P. 290—297.

[17] Erdős P., Rényi A. On the evolution of random graphs // Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci. — 1960. — Vol. 5, no. 1-2. — P. 17—61.

[18] Erdős P., Rubin A. L., Taylor H. Choosability in graphs // Proc. West Coast Conf. on Combinatorics, Graph Theory and Computing. — 1980. — Vol. 26. — P. 125—157.

[19] Friedgut E. Necessary and sufficient conditions for sharp thresholds of graph properties // J. Amer. Math. Soc. — 1999. — Vol. 12. — P. 1017—1054.

[20] Jansen S., Łuczak T., Rucinski A. Random Graphs. — New York: Wiley—Interscience, 2000.

[21] Kostochka A. V., Kubmhat M. Coloring uniform hypergraphs with few edges // Random Structures Algorithms. — 2009. — Vol. 35, no. 3. — P. 348—368.

[22] Kostochka A. V., Kumbhat M., Rödl V. Coloring uniform hypergraphs with small edge degrees // Fete of Combinatorics and Computer Science. — Berlin: Springer, 2010. — (Bolyai Soc. Math. Stud.; Vol. 20). — P. 213—238.

[23] Krivelevich M., Sudakov B. The chromatic numbers of random hypergraphs // Random Structures Algorithms. — 1998. — Vol. 12. — P. 381—403.

[24] Krivelevich M., Vu V. Choosability in random hypergraphs // J. Combin. Theory Ser. B. — 2001. — Vol. 83, no. 2. — P. 241—257.

[25] Łuczak T. The chromatic number of random graphs // Combinatorica. — 1991. — Vol. 11, no. 1. — P. 45—54.

[26] Radhakrishnan J., Srinivasan A. Improved bounds and algorithms for hypergraph two-coloring // Random Structures Algorithms. — 2000. — Vol. 16, no. 1. — P. 4—32.

[27] Shabanov D. A. On r-chromatic hypergraphs // Discrete Math. — 2012. — Vol. 312, no. 2. — P. 441—458.

[28] Shabanov D. A. Random coloring method in the combinatorial problem of Erdős and Lovász // Random Structures Algorithms. — 2012. — Vol. 40, no. 2. — P. 227—253.

[29] Shamir E. Chromatic number of random hypergraphs and associated graphs // Adv. Comput. Res. — 1989. — Vol. 5. — P. 127—142.

[30] Spencer J. H. Coloring n-sets red and blue // J. Combin. Theory Ser. A. — 1981. — Vol. 30. — P. 112—113.

[31] Steiner J. Combinatorische Aufgabe // J. Reine Angew. Math. — 1853. — B. 45. — S. 181—182.

[32] Szabó Z. An application of Lovász' local lemma — a new lower bound for the van der Waerden number // Random Structures Algorithms. — 1990. — Vol. 1, no. 3. — P. 343—360.