Об одном классе конечных групп с абелевым централизатором элемента порядка 3 типа $(3, 2, 2)$

В. И. ЛОГИНОВ
Институт системного анализа РАН
e-mail: viloginov@inbox.ru

УДК 512.542.5

Ключевые слова: конечная группа, централизатор элемента порядка 3, циклическая силовская 3-подгруппа, сильно 3-вложенная подгруппа.

Аннотация

В работе изучается строение конечных групп, в которых централизатор элемента порядка 3 изоморфен $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. Анализ проводится в классе групп, порядок которых не делится на простое число 5. Показывается, что среди простых таких групп нет, и подробно исследуется возможное общее строение таких групп. Используются только результаты, опубликованные до 1980 года.

Abstract

V. I. Loginov, A class of finite groups with Abelian centralizer of an element of order 3 *of type* $(3, 2, 2)$, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 117—137.

In this work, we study the structure of finite groups in which the centralizer of an element of order 3 is isomorphic to $\mathbb{Z}_3\times\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$. The analysis is restricted to the class of groups whose order is not divisible by the prime number 5. It is shown that among finite simple groups such groups do not exist, and a detailed possible internal general structure of such groups is investigated. We use only those results that have been published before 1980.

1. Формулировка основной теоремы

Пусть X — конечная группа, $p\in\pi(X)$, $P\in\mathrm{Syl}_p(X)$ и k — целое число. Как известно, подгруппа $\Gamma_{P,k}(X)=\langle N_X(Q)\mid Q\leqslant P,\ m_p(Q)\geqslant k\rangle$ называется *k-порождённым p-ядром* группы X. (Здесь, как обычно, $m_p(Q)$ обозначает p-ранг группы Q.) Понятно, что k-порождённое p-ядро группы X определено однозначно с точностью до сопряжённости выбором P. Такие подгруппы играют важную роль в изучении строения конечных групп и, в частности, конечных простых групп. Говорят, что группа X является *k-порождённой для простого числа p*, если $X=\Gamma_{P,k}(X)$ для некоторой (следовательно, для любой) силовской p-подгруппы P группы X. Скажем, что группа X содержит *сильно p-вложенную*

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 117—137.

подгруппу, если X имеет нетривиальное собственное 1-порождённое p-ядро, т. е. $1 < \Gamma_{P,1}(X) < X$ для $P \in \mathrm{Syl}_p(X)$. Если $p = 2$, то говорят просто о *сильно вложенной* подгруппе. Следующее утверждение даёт эквивалентные формы понятия о сильно p-вложенной подгруппе.

Утверждение 1.1. *Следующие утверждения о конечной группе X эквивалентны*:

1) *X содержит сильно p-вложенную подгруппу*;
2) *X содержит собственную подгруппу H, для которой $p \in \pi(H)$ и $N_X(Q) \leqslant H$ для любой неединичной p-подгруппы Q в H*;
3) *X содержит собственную подгруппу H, для которой $p \in \pi(H)$ и $p \notin \pi(H \cap H^g)$ для любого элемента $g \in X - H$.*

Доказательство этого утверждения несложно и поэтому опускается. Подгруппу H в группе X, удовлетворяющую условию 2) или 3) утверждения 1.1, называют иногда *сильно p-вложенной* подгруппой в X. В этой терминологии можно показать, что собственное 1-порождённое p-ядро группы X всегда будет сильно p-вложенной подгруппой в X.

Первым шагом в изучении групп, содержащих сильно p-вложенную подгруппу, является следующее хорошо известное утверждение.

Утверждение 1.2. *Если группа X содержит сильно p-вложенную подгруппу, то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) *X имеет циклические или обобщённо кватернионные силовские p-подгруппы (так что в последнем случае обязательно $p = 2$)*;
2) *$\bar{X} = X/O_{p'}(X)$ содержит простую нормальную подгруппу $\bar{L}$, имеющую сильно p-вложенную подгруппу, причём $C_{\bar{X}}(\bar{L}) = \bar{1}$.*

Отметим, что если силовская p-подгруппа P группы X является циклической или обобщённо кватернионной, то $\Gamma_{P,1}(X) = N_X\big(\Omega_1(P)\big)$. В частности, если $O_p(X) = 1$, то X всегда будет содержать сильно p-вложенную подгруппу.

Утверждение 1.2 не уточняет строения X в случае 1). Однако если $p = 2$ и силовские 2-подгруппы в X циклические, то X имеет нормальное 2-дополнение по теореме Бернсайда о перемещении. Аналогично если $p = 2$ и силовские 2-подгруппы в X обобщённо кватернионные, то теорема Брауэра—Судзуки быстро сводит этот случай к группам с диэдральными силовскими 2-подгруппами. Остаётся лишь воспользоваться характеризацией таких групп Д. Горенстейном и Дж. Уолтером.

Утверждение 1.2 и доказываемая в следующем разделе лемма 2.1 сводят изучение конечных групп, содержащих сильно p-вложенную подгруппу, к случаю простых групп. При $p = 2$ пункт 2) из утверждения 1.2 был разобран Г. Бендером [8], показавшим, что группе $\bar{L}$ могут соответствовать лишь простые группы типа Ли характеристики 2 и лиевского ранга 1, называемые с тех пор *группами Бендера*. Таким образом, при $p = 2$ имеется исчерпывающее описание групп, содержащих сильно вложенную подгруппу. М. Ашбахер [5] обобщил рассуждение Г. Бендера и описал конечные группы, имеющие собственное 2-порождённое 2-ядро. Аналогов этих результатов для нечётных простых чисел пока нет.

Эти два результата Г. Бендера и М. Ашбахера — краеугольный камень при получении противоречий при изучении централизаторов инволюций в простых группах (подробнее об этом см. [19]). Отсутствие классификационной теоремы для групп с сильно p-вложенной подгруппой при нечётном p является, по-видимому, основной трудностью при любой попытке проанализировать централизаторы элементов нечётного простого порядка p в простых группах методами, использованными для изучения централизаторов инволюций, поскольку отсутствует основная процедура для получения противоречий. Этот пробел особенно заметен при $p = 3$, поскольку имеется классификация конечных простых групп, порядок которых не делится на 3 (т. е. $3'$-групп) (см. [15]).

Сказанное выше указывает на важность описания конечных групп, содержащих сильно 3-вложенную подгруппу. Первым шагом в решении этой проблемы является, конечно, утверждение 1.2. При $p = 3$ пункт 1) этого утверждения превращается в самостоятельную задачу, а лемма 2.1 сводит её к случаю простых групп. Кроме того, само условие цикличности силовских 3-подгрупп является индуктивным, так что эта задача может изучаться независимо.

Известные конечные неабелевы простые группы, имеющие неединичные циклические силовские 3-подгруппы, исчерпываются следующими: $L_2(q)$, $q > 3$, $q \neq 3^n$; $L_3(q)$, $q \equiv -1 \pmod 3$; $U_3(q)$, $q \equiv +1 \pmod 3$; а также простая спорадическая группа Янко J_1. Можно показать, что все эти группы удовлетворяют следующему сильному дополнительному условию:

($*$) централизатор любого элемента порядка 3 имеет циклические силовские 2-подгруппы.

Существуют методы, позволяющие достаточно эффективно изучать конечные группы, удовлетворяющие условию ($*$) и имеющие циклические силовские 3-подгруппы (см., например, [10—14, 24]). Таким образом, если G — конечная простая группа с циклическими силовскими 3-подгруппами, то естественно пытаться показать, что централизатор элемента порядка 3 в группе G выглядит достаточно «реально», т. е., другими словами, что G должна удовлетворять условию ($*$) и в общем случае. Следующая теорема, являющаяся основным результатом настоящей работы, разбирает в классе $5'$-групп минимальную «нереальную» ситуацию.

Теорема. *Пусть G — конечная $5'$-группа, $|G| = 3n_0$, $(3, n_0) = 1$, $\langle\pi\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $C_G(\pi) = \langle\pi\rangle \times H$. Если $H = \langle a\rangle \times \langle b\rangle \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $G/O_{3'}(G) \cong \mathbb{Z}_3$ *или* $G/O_{3'}(G) \cong D_6$, *причём G — разрешимая группа*;
2) $G/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ *или* $G/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,13)$;
3) $G/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PGL}(2,7)$ *или* $G/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PGL}(2,13)$; *в этом случае G содержит такую (нормальную) подгруппу K индекса 2, что $G = K \cdot C_G(\pi)$ и* $K/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ *или* $K/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,13)$.

Следствие. *Не существует конечных простых $5'$-групп, в которых централизатор элемента порядка 3 является абелевой группой типа $(3,2,2)$.*

Конечно, преследуемая данной работой цель не позволяет нам использовать в рассуждениях полную классификацию конечных простых групп, анонсированную в 1981 г. и формально завершённую в 2004 г. Точнее говоря, в работе используются только хорошо известные и проверенные классификационные результаты, которые были опубликованы до 1980 г.

В разделе 2 содержатся различные вспомогательные результаты. В разделе 3 проводится предварительное изучение минимального контрпримера G к основной теореме. Показывается, что G — простая группа, все собственные простые сечения которой являются группами известного типа. Кроме того, уточняется строение 3-силовского нормализатора группы G. В разделе 4 исследуются собственные неразрешимые подгруппы в G, порядок которых делится на 3. В результате строение таких подгрупп выписывается фактически с точностью до изоморфизма. Это позволяет разобрать в разделе 5 компонентный случай и доказать, что G является группой типа характеристики 2. В разделе 6 завершается доказательство основной теоремы. А именно, [21] даёт нам неразрешимую 2-локальную подгруппу M в группе G, причём результаты разделов 3 и 4 позволяют полностью определить её строение. После этого возникает конфликт с выталкиванием, в котором оказываются полезными некоторые идеи из [6].

Используемые обозначения и терминология стандартны и соответствуют работам [17,19]. В частности, все рассматриваемые группы предполагаются конечными.

П. Г. Гресь любезно делился с автором некоторыми из своих идей, за что мы ему весьма признательны. Автор выражает благодарность И. А. Чубарову за внимание к работе.

2. Вспомогательные результаты

В этом разделе мы приведём некоторые вспомогательные утверждения, которые понадобятся нам далее.

Лемма 2.1. *Пусть K — конечная группа, $p \in \pi(K)$, $O_{p'}(K) = 1$ и P — силовская p-подгруппа в K. Если P — циклическая группа, то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $K \cong P \rtimes \langle \mu \rangle$, *где* $\mu \in \mathrm{Aut}(P)$ *и* $|\mu|$ *делит* $(p-1)$;
2) $F^*(K)$ — *неабелева простая группа и* $p \notin \pi\big(K/F^*(K)\big)$.

Доказательство. Предположим сначала, что $L(K) = 1$. Тогда $F^*(K) = F(K) = O_p(K) \neq 1$, а также $C_K\big(O_p(K)\big) \leqslant O_p(K)$. Следовательно, $O_p(K) = P \lhd K$ и $C_K(P) = P$. Поэтому K/P изоморфна p'-группе автоморфизмов циклической p-группы P. Учитывая, что расширение $P \lhd K$ расщепляется по теореме Шура—Цассенхауза, мы получаем первый пункт леммы.

Предположим теперь, что $L = L(K) \neq 1$. Пусть $L = L_1L_2\dots L_n$ — однозначно определённое представление слоя L группы K в виде центрального произведения квазипростых групп L_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Очевидно, что $Z(L) \leqslant F(K) = O_p(K)$. Произведение всех компонент L_i, для которых $p \notin \pi(L_i)$, является нормальной p'-подгруппой в K. Поскольку $O_{p'}(K) = 1$, то $p \in \pi(L_i)$ для всех L_i, $1 \leqslant i \leqslant n$. Если $p \in \pi(L_i)$, то $p \in \pi\bigl(L_i/Z(L_i)\bigr)$, поскольку иначе L_i не будет совершенной группой по теореме Шура—Цассенхауза. Далее, $L/Z(L) \cong L_1/Z(L_1) \times \dots \times L_n/Z(L_n)$. Следовательно, если $n > 1$, то P не может быть циклической группой. Поэтому $n = 1$ и $L = L(K)$ является квазипростой группой.

Поскольку $F(K) \cap L = Z(L)$, $F^*(K)/Z(L) \cong F(K)/Z(L) \times L/Z(L)$ и $F(K) = O_p(K)$, то предположение $F(K)/Z(L) \neq 1$ влечёт нецикличность P. Следовательно, $Z(L) = F(K) = O_p(K)$, и $F^*(K) = L$ является квазипростой группой. Так как $p \in \pi\bigl(L/Z(L)\bigr)$, то $p \notin \pi\bigl(Z(L)\bigr)$ и $p \notin \pi\bigl(K/F^*(K)\bigr)$ по теореме Виландта [28]. Это доказывает второй пункт леммы. □

Лемма 2.2. *Пусть X — конечная разрешимая группа, допускающая (копростой) автоморфизм π простого порядка p, причём $C_X(\pi)$ — нильпотентная p'-группа. Если $q \in \pi\bigl(C_X(\pi)\bigr)$ и $O_q\bigl(C_X(\pi)\bigr)$ — абелева группа, то X имеет q-длину 1. При $p = 3$ условие разрешимости X можно опустить.*

Доказательство. Первое утверждение следует из [25, теорема 2.12]. Если $p = 3$, то простые рассуждения, использующие классификацию конечных простых $3'$-групп [15], показывают, что нильпотентность $C_X(\pi)$ влечёт разрешимость X. □

Лемма 2.3. *Пусть X — конечная группа с циклическими силовскими 3-подгруппами, $P \in \mathrm{Syl}_3(X)$, $\pi \in P^{\#}$ и j — некоторая инволюция из X. Если $j \notin O_{3'}(X)$, то j сопряжена в X с некоторой инволюцией, инвертирующей π.*

Доказательство. Эта лемма — частный случай теоремы 9C из [9]. □

Лемма 2.4. *Если $3 < q$ — степень нечётного простого числа, то в группе $\mathrm{PSL}(2, q)$ имеется подгруппа, изоморфная A_4.*

Доказательство. В группе $G = L_2(q)$ силовская 2-подгруппа S является диэдральной. Если бы $N_G(R)/C_G(R)$ была 2-группой для любой неединичной подгруппы R из S, то G имела бы нормальное 2-дополнение по теореме Фробениуса [17, теорема 7.4.5]. Поэтому $N_G(R)/C_G(R)$ не является 2-группой для некоторой нетривиальной подгруппы R из S. Если $R \ncong E_4$, то R либо циклическая, либо изоморфна $D_{2\cdot 2^n}$ для $n \geqslant 2$. В каждом из этих случаев $\mathrm{Aut}(R)$ является 2-группой. Следовательно, $R \cong E_4$. Осталось заметить, что $|\mathrm{Aut}(R)| = 2 \cdot 3$ и $C_G(R)$ не содержит элементов нечётного порядка. □

Лемма 2.5 [17, теорема 3.4.4]. *Пусть $G = QP$, где Q — элементарная абелева нормальная q-подгруппа в G и $|P| = p$, причём p и q — различные* *простые числа. Предположим, что $C_G(Q) = Q$ — минимальная нормальная подгруппа в G. Тогда если F — поле, характеристика которого отлична от p и q, то $C_V(P) \neq 0$ для любого точного FG-модуля V.*

Лемма 2.6. *Пусть X — конечная группа, T — нормальная $\{2,3\}'$-подгруппа в X, причём $X/T \cong \mathrm{PSL}(2,q)$, где $3 < q$ — степень нечётного простого числа. Если π — элемент порядка 3 в X и $C_T(\pi) = 1$, то $T = 1$.*

Доказательство. Рассуждая от противного, будем предполагать, что $T \neq 1$. Поскольку T является $3'$-группой, мы можем считать, что T — минимальная нормальная подгруппа в X. В частности, T — элементарная абелева r-группа для некоторого простого числа $r > 3$. Если $C_X(T) \neq T$, то $C_X(T) = X$, откуда следует, что $T \leqslant C_X(\pi)$ и $T = C_T(\pi) = 1$, противоречие. Следовательно, $C_X(T) = T$ и X/T точно действует на T. Используя лемму 2.4, найдём в группе X/T подгруппу, изоморфную A_4. Применяя теперь лемму 2.5 к действию этой подгруппы на T, мы получаем противоречие с исходным предположением. $\square$

Лемма 2.7 [12, теорема 5]. *Пусть Y — конечная группа, T — нормальная 2-подгруппа в Y, причём $Y/T \cong \mathrm{PSL}(2,p^n)$, $p > 3$, $p^n > 5$. Пусть π — элемент порядка 3 из Y. Предположим, что $C_T(\pi)$ — циклическая группа. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$T \cong \mathbb{Z}_{2^m}$ для некоторого $m \geqslant 0$;*
2) *$T \cong \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^m} \times \mathbb{Z}_{2^m}$ для некоторого $m \geqslant 1$, $Y/T \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ и Y/T действует как $\mathrm{GL}(3,2)$ на каждом элементарном абелевом сечении T порядка 8.*

Лемма 2.8 [6, (4.2)]. *Пусть $X \cong \mathrm{PGL}(2,7)$, $L = L(X)$ — слой X, z и t — инволюции в L и в $X - L$ соответственно. Тогда*

1) *L имеет три нетривиальных неприводимых $GF(2)$-модуля V_i, $1 \leqslant i \leqslant 3$;*
2) *V_1 и V_2 являются естественными модулями для $\mathrm{GL}(3,2)$ и не допускают X. Кроме того, z индуцирует трансвекцию на V_1 и V_2;*
3) *$\dim(V_3) = 8$ и V_3 допускает X, $m([V_3,z]) = 4$, $m([V_3,t]) = 3$ и $a(X,V_3) = 1$.*

Лемма 2.9. *Пусть t — контрагредиентный автоморфизм группы $L = \mathrm{SL}(2,7)$. Если $X = \langle t\rangle L$, то централизатор элемента π порядка 3 в группе X является абелевой группой типа $(3,2^2)$.*

Доказательство. Пусть ζ — корень степени 3 из единицы в поле $GF(7)$. Не ограничивая общности, можно считать что

$$\pi = \begin{pmatrix} \zeta & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix} \in L.$$

Понятно, что $t \in N_X(\langle\pi\rangle) - C_X(\pi)$. Простая проверка показывает, что также

$$t_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in N_L(\langle\pi\rangle) - C_L(\pi),$$

причём t_0 — элемент порядка 4 в группе L. Легко убедиться, что $[t, t_0] = 1$. Поэтому tt_0 — элемент порядка 4 в группе X, централизующий π. Нужный вывод следует теперь из простого наблюдения, что $|C_X(\pi)| = 3 \cdot 4$. $\square$

Лемма 2.10. *Пусть p — простое число и $p^n \equiv 1 \pmod 3$. Тогда p-силовский нормализатор группы $\mathrm{PSL}(2, p^n)$ содержит подгруппу, изоморфную группе Фробениуса порядка $p^n \cdot 3$.*

Доказательство. Утверждение просто проверяется. $\square$

Лемма 2.11. *Пусть Q является группой порядка 2^4. Если Q допускает автоморфизм σ порядка 7, то Q — элементарная абелева 2-группа.*

Доказательство. Несложные рассуждения показывают, что если Q — абелева группа, то Q обязательно будет элементарной абелевой 2-группой. Предположим поэтому, что Q — неабелева группа. Поскольку σ точно действует на $Q/\Phi(Q)$ по теореме Бернсайда [17, теорема 5.1.4], то $|Q/\Phi(Q)| = 2^4$ или $|Q/\Phi(Q)| = 2^3$. В первом случае $\Phi(Q) = 1$ и Q — элементарная абелева 2-группа. Поэтому $|Q/\Phi(Q)| = 2^3$ и $|\Phi(Q)| = 2$, а так как $Q' \leqslant \Phi(Q)$, то $Q' = \Phi(Q)$. Замечаем, далее, что $|Z(Q)| = 2$ или $|Z(Q)| = 2^2$. Если $|Z(Q)| = 2$, то Q — экстраспециальная группа, что невозможно по [17, теорема 5.5.2] и условию $|Q| = 2^4$. Итак, $|Z(Q)| = 2^2$, и поэтому σ централизует как $Z(Q)$, так и $Q/Z(Q)$. Следовательно, σ централизует Q в силу копростоты действия. Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 2.12. *В обозначениях леммы 2.8 если V_3 — неприводимый $GF(2)$-модуль размерности 8 группы $\mathrm{PSL}(2,7)$ и π — элемент порядка 3 из $\mathrm{PSL}(2,7)$, то $m\big(C_{V_3}(\pi)\big) = 2$.*

Доказательство. Известно, что модуль V_3 строится следующим образом (см., например, [6, с. 59]). Пусть N — тензорное произведение V_1 и V_2. Тогда $N = V_3 \oplus N_0$, где N_0 — тривиальный модуль. Непосредственное вычисление показывает, что $m\big(C_N(\pi)\big) = 3$, откуда следует нужный вывод. $\square$

Лемма 2.13. *Пусть G — неабелева простая группа, t — инволюция в G и $|C_G(t)|$ не делится на 2^5. Тогда секционный 2-ранг группы G не превосходит 4. В частности, G является известной группой по результату Д. Горенстейна и К. Харады* [20].

Доказательство. Это утверждение непосредственно следует из основных результатов [1, 2] (см. также [23]). $\square$

Лемма 2.14. *Пусть G — конечная неабелева простая группа, t — некоторая инволюция из G и $L = O^{2'}\Big(C_G(t)/O\big(C_G(t)\big)\Big)$. Если $Z(L)$ — циклическая группа и $L/Z(L) \cong \mathrm{PGL}(2, q)$ (например, если $C_G(t) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PGL}(2, q)$), q нечётно, то либо силовская 2-подгруппа группы G полудиэдральна, либо $C_G(t) \cong \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PGL}(2, 5)$ и G изоморфна группе Матьё M_{12} степени 12. В частности, G является известной группой.*

Доказательство. Первое утверждение — теорема Б из [3]. Поэтому группа G в любом случае является известной по основному результату из [4]. $\square$

Лемма 2.15. *Пусть G — простая группа, содержащая 2-подгруппу E порядка не выше 2^4, которая является силовской 2-подгруппой в $E \cdot C_G(E)$, причём фактор-группа $N_G(E)/C_G(E)$ неразрешима. Тогда либо G имеет секционный 2-ранг не выше 4, либо $G \cong \mathrm{He}, \mathrm{Co}_3, M_{24}, \mathrm{PSL}(5,2), A_{16}, A_{17}, \mathrm{HiS}, \mathrm{PSL}(4,q)$, $q \equiv 1 \pmod 8$, $\mathrm{PSU}(4,q^2)$, $q \equiv -1 \pmod 8$. В частности, учитывая основной результат из [20], мы видим, что группа G является известной.*

Доказательство. Этот результат доказан в [26, 27]. $\square$

Лемма 2.16 [23, теорема 4]. *Пусть G — конечная группа, содержащая инволюцию x. Предположим, что выполняются следующие условия:*

1) *силовская 2-подгруппа T в $C_G(x)$ имеет вид $T = U \times W$, где $U \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, $x \in U$ и $W \cong D_{2^n}$ или $W \cong QD_{2^n}$;*
2) *T является силовской 2-подгруппой в $C_G(u)$ для любой инволюции $u \in U^{\#}$.*

Тогда G имеет секционный 2-ранг не выше 4. Кроме того, если G — простая группа, то $G \cong L_2(16)$ или $G \cong J_2$.

3. Предварительное изучение минимального контрпримера к основной теореме

Лемма 3.1. *Пусть X — конечная неабелева простая $5'$-группа, $|X| = 3n$, $(3, n) = 1$, $\langle \pi \rangle \in \mathrm{Syl}_3(X)$ и $C_X(\pi) = \langle \pi \rangle \times H$. Тогда*

1) *если $H = 1$, то $X \cong L_2(7)$;*
2) *если $H \cong \mathbb{Z}_2$, то $X \cong L_2(13)$.*

Доказательство. Первое утверждение непосредственно следует из теоремы Дж. Томпсона и У. Фейта о группах с самоцентрализующейся подгруппой порядка 3 (см. [14]). Предположим теперь, что $H \cong \mathbb{Z}_2$. Основная теорема из [10] даёт нам, что X изоморфна одной из групп $L_2(q)$, где q — подходящая степень простого числа $p \neq 3$. Непосредственная проверка показывает теперь, что $q = 13$. Заметим, что второе утверждение следует также из основного результата работы [24]. $\square$

Лемма 3.2. *Пусть G — конечная $5'$-группа, все простые сечения которой являются группами известного типа. Предположим также, что $|G| = 3n_0$, $(3, n_0) = 1$, $\langle \pi \rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$, причём $C_G(\pi) = \langle \pi \rangle \times H$, где H — элементарная абелева 2-группа. Тогда $O_{3'}(G)$ имеет 2-длину 1, и если $\bar{G} = G/O_{3'}(G)$, то справедливо одно из следующих утверждений:*

1) *$\bar{G} \cong \mathbb{Z}_3$ или $\bar{G} \cong D_6$, причём G — разрешимая группа;*
2) *$\bar{G} \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ или $\bar{G} \cong \mathrm{PSL}(2,13)$;*

3) $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}(2,7)$ *или* $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}(2,13)$; *в этом случае* G *содержит такую (нормальную) подгруппу* K *индекса 2, что* $G = K \cdot C_G(\pi)$ *и* $K/O_{3'}(G) \cong$ $\cong \mathrm{PSL}(2,7)$ *или* $K/O_{3'}(G) \cong \mathrm{PSL}(2,13)$.

Доказательство. Тот факт, что $O_{3'}(G)$ имеет 2-длину 1, следует из леммы 2.2.

Пусть $\bar{G} = G/O_{3'}(G)$. Тогда из леммы 2.1 следует, что либо $\bar{G} \cong \mathbb{Z}_3$ или $\bar{G} \cong D_6$, что даёт пункт 1), либо $F^*(\bar{G})$ — простая группа известного типа. Учитывая, что $C_{\bar{G}}(\bar{\pi}) = \langle\bar{\pi}\rangle \times \bar{H}$, и просматривая все возможности для $F^*(\bar{G})$, мы замечаем, что $\bar{H} \cap F^*(\bar{G})$ — циклическая группа. Поэтому $F^*(\bar{G}) \cong L_2(7)$ или $F^*(\bar{G}) \cong L_2(13)$ по лемме 3.1. Так как $\mathrm{Aut}\big(L_2(p)\big) \cong \mathrm{PGL}(2,p)$ и $|\mathrm{PGL}(2,p) : L_2(p)| = 2$ для простого $p > 3$, то либо $\bar{G} = F^*(\bar{G})$, что даёт пункт 2), либо $\bar{G} \cong \mathrm{PGL}(2,p)$, что даёт пункт 3), для $p = 7$ или $p = 13$.

В случае 3) пусть $\bar{L} = F^*(\bar{G})$. Поскольку $\langle\bar{\pi}\rangle \in \mathrm{Syl}_3(\bar{L})$, то $\bar{G} = \bar{L} \cdot N_{\bar{G}}(\langle\bar{\pi}\rangle)$ согласно рассуждению Фраттини. Пусть $\bar{g} \in N_{\bar{G}}(\langle\bar{\pi}\rangle) - N_{\bar{L}}(\langle\bar{\pi}\rangle)$ и $\bar{t}$ — элемент из $\bar{L}$, для которого $\bar{\pi}^{\bar{t}} = \bar{\pi}^{-1}$. Если $\bar{\pi}^{\bar{g}} = \bar{\pi}^{-1}$, то $\overline{gt} \in C_{\bar{G}}(\bar{\pi}) - C_{\bar{L}}(\bar{\pi})$, откуда следует, что $\bar{G} = \bar{L} \cdot C_{\bar{G}}(\bar{\pi})$. К тому же выводу мы приходим и в случае, когда $[\bar{\pi}, \bar{g}] = \bar{1}$. Поскольку $\bar{G} = G/O_{3'}(G)$, то $C_{\bar{G}}(\bar{\pi}) = \overline{C_G(\pi)}$. Обозначая через K полный прообраз $\bar{L}$ в G, мы получаем равенство $G = K \cdot C_G(\pi)$, которое завершает доказательство. □

Лемма 3.3. *Если* G *— минимальный контрпример к основной теореме, то* G *— неабелева простая группа, все собственные простые сечения которой являются группами известного типа.*

Доказательство. Утверждение следует из минимальности G, а также из лемм 3.1 и 3.2. □

До конца этого раздела мы будем предполагать, что G — простая группа, удовлетворяющая условию основной теоремы. Нашей целью будет анализ 3-силовского нормализатора $N = N_G(\langle\pi\rangle)$ группы G. Очевидно, что $|N : C_G(\pi)| = 1$ или $|N : C_G(\pi)| = 2$. Если $|N : C_G(\pi)| = 1$, то теорема Бернсайда о перемещении даёт нам, что у группы G имеется нормальное 3-дополнение. Это противоречит предположению о простоте G. Следовательно, обязательно $|N : C_G(\pi)| = 2$, и каждый элемент из множества $N - C_G(\pi)$ инвертирует π посредством сопряжения.

Лемма 3.4. *Каждая инволюция из группы* G *сопряжена с некоторой инволюцией, инвертирующей* π. *В частности, в множестве* $N - C_G(\pi)$ *обязательно имеются инволюции.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 2.3. □

Лемма 3.5. *Число инволюций в множестве* $N - C_G(\pi)$ *равно числу элементов из* $C_G(\pi)$, *которые инвертирует некоторая инволюция* $t \in N - C_G(\pi)$.

Доказательство. Такая инволюция t существует по лемме 3.4. Поскольку каждый элемент из множества $N - C_G(\pi)$ однозначно представляется в виде th для некоторого $h \in C_G(\pi)$, то $(th)^2 = 1$ эквивалентно $h^t = h^{-1}$. □

Лемма 3.6. *Каждая инволюция $t \in N - C_G(\pi)$ централизует H.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда t действует нетривиально на $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$, и без ограничения общности можно предполагать, что $a^t = b$, $b^t = a$ и $(ab)^t = ab$. По лемме 3.4 число сопряжённых классов инволюций в группе G не превосходит числа классов инволюций из множества $N - C_G(\pi)$, сопряжённых в N. Из леммы 3.5 следует, что число инволюций в множестве $N - C_G(\pi)$ равно 6. С другой стороны, $|N| = 2^3 \cdot 3$ и $|C_N(t)| = 4$ в силу сделанного предположения. Поэтому все инволюции из множества $N - C_G(\pi)$ сопряжены в N. Следовательно, в группе G все инволюции сопряжены.

Таким образом, в группе G сопряжены инволюции ab и a. Это невозможно, поскольку $N \leqslant C_G(ab)$, а в $C_G(a)$ лежит π, но нет элементов, инвертирующих π. Полученное противоречие доказывает нужное утверждение. □

Из предыдущих двух лемм мы легко получаем следующее утверждение.

Лемма 3.7. *Все элементы из множества $N - C_G(\pi)$ являются инволюциями.*

Соберём вместе доказанные выше факты в следующей теореме.

Теорема 3.8. *Пусть G — неабелева простая группа, $|G| = 3n_0$, $(3, n_0) = 1$, $\langle \pi \rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $C_G(\pi) = \langle \pi \rangle \times H$, где $H = \langle a \rangle \times \langle b \rangle \cong E_4$. Тогда $|N_G(\langle \pi \rangle) : C_G(\pi)| = 2$ и справедливы следующие утверждения*:

1) *все элементы из множества $N_G(\langle \pi \rangle) - C_G(\pi)$ являются инволюциями*;
2) *каждая инволюция $t \in N_G(\langle \pi \rangle) - C_G(\pi)$ централизует H, т. е. $H \leqslant Z\big(N_G(\langle \pi \rangle)\big)$*;
3) *каждая инволюция из группы G сопряжена с некоторой инволюцией $t \in N_G(\langle \pi \rangle) - C_G(\pi)$*;
4) *группа G имеет не более четырёх сопряжённых классов инволюций.*

Доказательство. Пункты 1)—3) были доказаны в леммах 3.4—3.7, а из них легко следует 4). □

4. Строение неразрешимых подгрупп

В этом разделе X обозначает неразрешимую группу, все простые сечения которой являются группами известного типа. Кроме того, предполагается, что $|X| = 3 \cdot k_0$, $(3, k_0) = 1$, $\langle \pi \rangle \in \mathrm{Syl}_3(X)$ и $C_X(\pi) = \langle \pi \rangle \times H_0$, где $H_0 \cong 1$, $H_0 \cong \mathbb{Z}_2$ или $H_0 \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$. Таким образом, если $5 \notin \pi(X)$, то можно рассматривать X как собственную неразрешимую подгруппу, порядок которой делится на 3, в минимальном контрпримере к основной теореме.

Лемма 4.1. *Если $5 \notin \pi(X)$, то справедливы следующие утверждения*:

1) *$O_{3'}(X)$ имеет 2-длину 1*;
2) *$X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2, p)$ или $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PGL}(2, p)$ для $p = 7$ или $p = 13$.*

Доказательство. Утверждение следует из леммы 3.2. □

Лемма 4.2. *Если* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,p)$ *или* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PGL}(2,p)$ *для* $p = 7$ *или* $p = 13$, *то* $O_{3'}(X) = O_{2',2}\bigl(O_{3'}(X)\bigr)$.

Доказательство. Применяем к фактор-группе $X/O_{2',2}\bigl(O_{3'}(X)\bigr)$ лемму 2.6. □

Лемма 4.3. *Если* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PGL}(2,13)$, *то* $O_{3'}(X) = 1$.

Доказательство. Рассмотрим фактор-группу $\bar{X} = X/O\bigl(O_{3'}(X)\bigr)$. Ясно, что $O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X})$, и мы обозначим эту подгруппу через $\bar{T}$. Поскольку в группе $\mathrm{PGL}(2,13)$ централизатор элемента порядка 3 является абелевой группой типа $(3,2,2)$, то $C_{\bar{T}}(\bar{\pi}) = 1$. Из леммы 2.7 следует, что $\bar{T} = 1$. Поэтому $O_{3'}(X) = O_{2'}(X)$, и результат теперь непосредственно следует из леммы 2.6. □

Лемма 4.4. *Если* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,13)$, *то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $O_{3'}(X) = 1$ *и* $X \cong \mathrm{PSL}(2,13)$;
2) $X \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,13)$.

Доказательство. Пусть $K = O_{3'}(X)$. Если $C_K(\pi) = 1$, то из лемм 4.2, 2.7 и 2.6 мы получаем с помощью несложных рассуждений справедливость пункта 1).

Поскольку в группе $\mathrm{PSL}(2,13)$ централизатор элемента порядка 3 является абелевой группой типа $(3,2)$, то остаётся ещё одна возможность, когда $C_K(\pi) = \langle a \rangle$ имеет порядок 2. Из леммы 2.7 следует, что в группе $\bar{X} = X/O(K)$ имеют место равенства $O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X}) = \langle \bar{a} \rangle$. Поэтому либо $\bar{X} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,13)$, либо $\bar{X} \cong \mathrm{SL}(2,13)$. Второй случай, однако, невозможен, поскольку в группе $\mathrm{SL}(2,13)$ централизатор элемента порядка 3 является абелевой группой типа $(3,2^2)$. Следовательно, $\bar{X} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,13)$. Из леммы 2.6 теперь следует, что $O(X) = 1$. Доказательство закончено. □

Лемма 4.5. *Если* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PGL}(2,7)$, *то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $O_{3'}(X) = 1$ *и* $X \cong \mathrm{PGL}(2,7)$;
2) $X \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PGL}(2,7)$.

Доказательство. Пусть $K = O_{3'}(X)$. Если $C_K(\pi) = 1$, то из леммы 2.7 следует, что $K = O(X)$. Теперь из леммы 2.6 следует, что $K = 1$. Таким образом, мы приходим к пункту 1).

Предположим теперь, что $C_K(\pi) \neq 1$. Поскольку централизатор элемента порядка 3 в группе $\mathrm{PGL}(2,7)$ является абелевой группой типа $(3,2)$, то $C_K(\pi)$ имеет порядок 2. Положим $\bar{X} = X/O(K)$. В частности, $O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X}) = \bar{K}$.

Утверждается, что $|\bar{K}| = 2$. Действительно, если $\bar{X}$ не является 2-скованной группой, то $[\bar{K}, L(\bar{X})] = 1$, где $1 \neq L(\bar{X})$ — слой группы $\bar{X}$. Поэтому в данном случае нужное утверждение очевидно.

Предположим теперь, что $\bar{X}$ является 2-скованной группой, и пусть $\tilde{T} = \bar{K}/\Phi(\bar{K})$. Рассматривая фактор-группу $\bar{X}/\Phi(\bar{K})$, мы имеем из леммы 2.7, что либо $\tilde{T} \cong \mathbb{Z}_2$, либо $\tilde{T} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, причём слой $L\big(\bar{X}/O_2(\bar{X})\big) \cong \mathrm{PSL}(2,7) \cong$ $\cong \mathrm{GL}(3,2)$ действует на $\tilde{T}$ как $\mathrm{GL}(3,2)$. Первый случай невозможен, поскольку если $\tilde{T} \cong \mathbb{Z}_2$, то $\bar{K}$ — циклическая группа и поэтому $\bar{X}$ не может быть 2-скованной группой вопреки предположению. Второй случай также невозможен, так как по лемме 2.8 указанное действие группы $L(\bar{X}/\bar{K}) \cong \mathrm{PSL}(2,7) \cong \mathrm{GL}(3,2)$ не продолжается на группу $\bar{X}/\bar{K} \cong \mathrm{PGL}(2,7)$.

Итак, мы показали, что $|\bar{K}| = 2$. Следовательно, $L(\bar{X}) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ или $L(\bar{X}) \cong \mathrm{SL}(2,7)$. В первом случае $\bar{X} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PGL}(2,7)$, и теперь из леммы 2.6 мы получаем, что $O(K) = 1$. Таким образом, в этом случае мы приходим к пункту 2). Наконец, если $L(\bar{X}) \cong \mathrm{SL}(2,7)$, то $\bar{X} \cong \langle t\rangle \mathrm{SL}(2,7)$, где t — контрагредиентный автоморфизм группы $\mathrm{SL}(2,7)$. Однако из леммы 2.9 следует, что в этом случае централизатор элемента порядка 3 в $\bar{X}$ является абелевой группой типа $(3,2^2)$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Лемма 4.6. *Если $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$, то ядро $O(X)$ является 7-группой. Кроме того, если $O(X) \neq 1$, то $O(X)$ допускает автоморфизм порядка 3 без неподвижных точек.*

Доказательство. Из леммы 2.10 и теоремы Шура—Цассенхауза следует, что в группе $X/O(X)$ имеется подгруппа, изоморфная группе Фробениуса порядка $7 \cdot 3$. Используя нильпотентность $O(X)$ и теорему Шура—Цассенхауза, мы получаем теперь с помощью несложных рассуждений из леммы 2.5 тривиальность $O_{7'}\big(O(X)\big)$. □

Лемма 4.7. *Пусть $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$. Предположим, что X не является 2-скованной группой. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $X \cong \mathrm{PSL}(2,7)$, $O_{3'}(X) = 1$ *и* $C_X(\pi) = 1$;
2) $X \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,7)$ *и* $|C_X(\pi)| = 2$;
3) $X/O(X) \cong \mathrm{SL}(2,7)$ *и* $|C_X(\pi)| = 2$;
4) $X \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,7)$ *и* $|C_X(\pi)| = 4$;
5) $X/O(X) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SL}(2,7)$ *и* $|C_X(\pi)| = 4$.

Доказательство. Пусть $\bar{X} = X/O(X)$. Тогда $O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X})$ по лемме 4.2. Поскольку X не является 2-скованной группой, то слой $L(\bar{X})$ нетривиален. Так как $[O_2(\bar{X}), L(\bar{X})] = 1$, то $O_2(\bar{X})$ лежит в централизаторе элемента порядка 3 из группы $\bar{X}$. Следовательно, $|O_2(\bar{X})| = 1$, $|O_2(\bar{X})| = 2$ или $|O_2(\bar{X})| = 2^2$, т. е. $O_2(\bar{X}) \cong 1$, $O_2(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}_2$ или $O_2(\bar{X}) \cong E_4$. Если $O_2(\bar{X}) = 1$, то из леммы 2.6 мы получаем, что $O_{3'}(X) = 1$ и $X \cong \mathrm{PSL}(2,7)$. Таким образом, мы приходим к пункту 1). Если $O_2(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}_2$, то $\bar{X} \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,7)$ или $\bar{X} \cong \mathrm{SL}(2,7)$. Применяя в первом случае лемму 2.6, мы получаем, что $O(X) = 1$, и приходим к пунктам 2) и 3). Наконец, если $O_2(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, то $L(\bar{X}) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ или $L(\bar{X}) \cong \mathrm{SL}(2,7)$. В первом случае, применяя лемму 2.6, получаем, что $X \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2,7)$, и приходим к пункту 4). Во втором случае $X/O(X) \cong$ $\cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{SL}(2,7)$. Это даёт пункт 5) и завершает доказательство леммы. □

Лемма 4.8. *Пусть* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$. *Предположим, что* X *является 2-скованной группой. Если* $|C_X(\pi)| \leqslant 2$, *то справедливы следующие утверждения*:

1) $|C_X(\pi)| = 2$;
2) $O(X) = 1$ *и* $O_{3'}(X) = O_2(X)$;
3) $O_2(X) \cong E_8$;
4) $X/O_2(X) \cong \mathrm{GL}(3,2)$ *действует на* $O_2(X)$ *как* $\mathrm{GL}(3,2)$.

Доказательство. Пусть $K = O_{3'}(X)$ и $\bar{X} = X/O(X)$. Тогда $\bar{K} = O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X})$ по лемме 4.2. Поскольку X является 2-скованной группой, то $F^*(\bar{X}) = \bar{K}$. Очевидно, что $C_{\bar{K}}(\bar{\pi}) \cong 1$ или $C_{\bar{K}}(\bar{\pi}) \cong \mathbb{Z}_2$.

Если $C_{\bar{K}}(\bar{\pi}) = 1$, то найдём по лемме 2.10 в группе $\bar{X}$ подгруппу, изоморфную группе Фробениуса порядка $7 \cdot 3$. Применяя затем лемму 2.5 к действию этой группы на $\bar{K}/\Phi(\bar{K})$, мы получаем, что $\bar{K} = 1$. Это противоречит условию 2-скованности X и доказывает 1).

Таким образом, $C_{\bar{K}}(\bar{\pi}) \cong \mathbb{Z}_2$. Из леммы 2.7 следует, что $\bar{K} \cong \mathbb{Z}_2$ или $\bar{K} \cong E_8$. Первый случай невозможен, поскольку он противоречит условию 2-скованности группы X. Следовательно, $\bar{K} \cong E_8$ и $\bar{X}/\bar{K}$ действует на $\bar{K}$ как $\mathrm{GL}(3,2)$.

Итак, мы видим, что для завершения доказательства леммы нам осталось только показать, что $O(X) = 1$. Строение $\bar{X}$ позволяет нам найти в группе K такую π-инвариантную подгруппу $V \cong E_4$, что $V\langle\pi\rangle \cong A_4$. Если $V\langle\pi\rangle$ точно действует на $O(X)$, то $O(X) = 1$ по лемме 2.5. Поэтому мы можем предполагать, что это действие неточное. Если $V\langle\pi\rangle \leqslant C_X\big(O(X)\big)$, то $O(X) = 1$, в силу того что $C_{O(X)}(\pi) = 1$. Поэтому можно считать, что $V \leqslant C_X\big(O(X)\big)$, но $\pi \notin C_X\big(O(X)\big)$. Таким образом, $X \neq C_X\big(O(X)\big)O(X)$ и $C_X\big(O(X)\big) \lhd X$. Поскольку $V \leqslant C_X\big(O(X)\big)$, то нормальное строение X позволяет заключить, что $C_X\big(O(X)\big)O(X) = K$. Следовательно, $K = O_2(X) \times O(X)$ — нильпотентная группа. Теперь с помощью несложных рассуждений, использующих лемму 2.6, мы получаем, что $O(X) = 1$. □

Лемма 4.9. *Пусть* $X/O_{3'}(X) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$. *Предположим, что* X *является 2-скованной группой. Если* $C_X(\pi) \cong \mathbb{Z}_3 \times E_4$, *то справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $O(X) = 1$, $O_{3'}(X) = O_2(X)$ *— элементарная абелева 2-группа порядка* 2^8, *причём* $GF(2)$*-модуль* $O_2(X)$ *изоморфен* V_3 (*в обозначениях леммы* 2.8) *относительно действия группы* $X/O_2(X) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$;
2) $O(X) = 1$, $O_{3'}(X) = O_2(X)$ *— элементарная абелева 2-группа порядка* 2^6, *причём* X *имеет внутри* $O_2(X)$ *ровно два главных фактора порядка* 2^3, *на каждом из которых* $X/O_2(X)$ *действует как* $\mathrm{GL}(3,2)$;
3) $O(X) = 1$, $O_{3'}(X) = O_2(X)$ *— элементарная абелева 2-группа порядка* 2^4, *причём* X *имеет внутри* $O_2(X)$ *ровно два главных фактора, один из которых тривиален, а на другом* $X/O_2(X)$ *действует как* $\mathrm{GL}(3,2)$;
4) $F(X) = O_2(X) \times O_7(X)$, *где* $O_2(X)$ *— элементарная абелева группа порядка* 2^3, $X/F(X) \cong \mathrm{SL}(2,7)$, *причём* $O_7(X) \neq 1$ *и* $\bar{K} = X/F(X)$ *действует на*

$O_2(X)$ таким образом, что $Z(\bar{K})$ лежит в ядре этого действия, а $\bar{K}/Z(\bar{K})$ действует на $O_2(X)$ как $\mathrm{GL}(3,2)$.

Доказательство. Положим $\bar{X} = X/O(X)$. Тогда $O_{3'}(\bar{X}) = O_2(\bar{X})$ по лемме 4.2. Поскольку X является 2-скованной группой, то $F^*(\bar{X}) = O_2(\bar{X})$. Обозначим через $\bar{Y}$ подгруппу в $\bar{X}$, содержащую $\bar{\pi}$ и изоморфную группе Фробениуса порядка $7 \cdot 3$ (лемма 2.10). Для доказательства леммы нам необходимо будет разобрать несколько случаев. Пусть $\bar{Z} = Z\bigl(O_2(\bar{X})\bigr)$. Тогда $1 \neq \bar{Z} \trianglelefteq \bar{X}$.

Предположим сначала, что $C_{\bar{X}}(\bar{Z}) = \bar{X}$. Поскольку $\bar{Z} \leqslant Z(\bar{X})$ и, в частности, $\bar{Z} \leqslant C_{\bar{X}}(\bar{\pi})$, то $\bar{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ или $\bar{Z} \cong E_4$.

Допустим, что $\bar{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, и рассмотрим фактор-группу $\hat{X} = \bar{X}/\bar{Z}$. К этой группе применима лемма 2.7, так как $C_{\hat{X}}(\hat{\pi})$ является абелевой группой типа $(3,2)$. В частности, $O_2(\hat{X}) \cong \mathbb{Z}_2$ или $O_2(\hat{X}) \cong E_8$. Первый случай невозможен, поскольку тогда $O_2(\bar{X}) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$, а это противоречит 2-скованности группы $\bar{X}$. Следовательно, $O_2(\hat{X}) \cong E_8$ и $\hat{X}/O_2(\hat{X}) \cong \mathrm{GL}(3,2)$ действует на $O_2(\hat{X})$ как $\mathrm{GL}(3,2)$. Таким образом, $|O_2(\bar{X})| = 2^4$, а условие 2-скованности $\bar{X}$ даёт, что элемент порядка 7 из $\bar{X}$ действует точно на $O_2(\bar{X})$. Из леммы 2.11 следует, что $O_2(\bar{X})$ — элементарная абелева 2-группа. Это противоречит предположению $\bar{Z} = Z\bigl(O_2(\bar{X})\bigr) \cong \mathbb{Z}_2$. Поэтому $\bar{Z} \ncong \mathbb{Z}_2$.

Допустим, что $\bar{Z} \cong E_4$, и рассмотрим фактор-группу $\hat{X} = \bar{X}/\bar{Z}$. Мы приходим к группе $\hat{X}$, в которой $C_{\hat{X}}(\hat{\pi}) = \langle\hat{\pi}\rangle$. Применяя теперь лемму 2.7 к этой группе $\hat{X}$ (или лемму 2.5 к действию на $O_2(\hat{X})$ подгруппы $\hat{Y}$ в $\hat{X}$, изоморфной группе Фробениуса порядка $7 \cdot 3$), мы получаем, что $O_2(\hat{X}) = 1$. Следовательно, $E_4 \cong O_2(\bar{X}) = \bar{Z} \leqslant Z(\bar{X})$, противоречие с предположением о 2-скованности группы $\bar{X}$. Поэтому $\bar{Z} \ncong E_4$.

Таким образом, $C_{\bar{X}}(\bar{Z}) \neq \bar{X}$. Учитывая нормальное строение группы $\bar{X}$, мы видим, что $C_{\bar{X}}(\bar{Z}) = O_2(\bar{X})$. Здесь мы имеем точное действие фактор-группы $\hat{X} = \bar{X}/O_2(\bar{X}) \cong \mathrm{PSL}(2,7)$ на $\bar{Z}$. Применяя лемму 2.7 к этому действию (или лемму 2.5 к действию $\bar{Y}$ на $\bar{Z}$), мы заключаем, что $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) = 1$. Следовательно, $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \cong \mathbb{Z}_2$ или $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \cong E_4$.

Предположим сначала, что $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \cong \mathbb{Z}_2$. Тогда к действию $\hat{X}$ на $\bar{Z}$ применима лемма 2.7, из которой, в частности, следует, что $\bar{Z} \cong \mathbb{Z}_2$ или $\bar{Z} \cong E_8$. Первый случай невозможен, поскольку если $\bar{Z} \cong \mathbb{Z}_2$, то $\bar{Z} \leqslant Z(\bar{X})$, а это противоречит доказанному выше равенству $C_{\bar{X}}(\bar{Z}) = O_2(\bar{X})$. Следовательно,

(†) $\bar{Z} \cong E_8$ и $\hat{X} \cong \mathrm{GL}(3,2)$ действует на $\bar{Z}$ как $\mathrm{GL}(3,2)$.

К фактор-группе $\tilde{X} = \bar{X}/\bar{Z}$ снова применима лемма 2.7, поскольку $C_{\tilde{X}}(\tilde{\pi})$ является абелевой группой типа $(3,2)$. Из этой леммы, в частности, следует, что $O_2(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}_2$ или $O_2(\tilde{X}) \cong E_8$. Если $O_2(\tilde{X}) \cong \mathbb{Z}_2$, то $|O_2(\bar{X})| = 2^4$ и $O_2(\bar{X})$ — элементарная абелева 2-группа по лемме 2.11 (или просто абелева группа, так как фактор-группа по центру — циклическая группа). Это противоречит условию $\bar{Z} = Z\bigl(O_2(\bar{X})\bigr)$. Следовательно,

(‡) $O_2(\tilde{X}) \cong E_8$ и $\tilde{X}/O_2(\tilde{X}) \cong \bar{X}/O_2(\bar{X}) \cong \mathrm{GL}(3,2)$ действует на $O_2(\tilde{X})$ как $\mathrm{GL}(3,2)$.

Утверждения (†) и (‡) дают существенную информацию о строении $O_2(\bar{X})$, которой достаточно для получения противоречия. Заметим предварительно, что при нетривиальном действии $\mathrm{GL}(3,2)$ на E_8 элемент порядка 7 из $\mathrm{GL}(3,2)$ не имеет неподвижных точек и поэтому транзитивно переставляет инволюции из E_8. Таким образом, элемент $\bar{\theta}$ порядка 7 из $\bar{X}$ транзитивно переставляет инволюции как в $\bar{Z}$, так и в $O_2(\tilde{X})$. Мы видим, что строение $O_2(\bar{X})$ весьма похоже на строение силовской 2-подгруппы в простой группе $\mathrm{Sz}(8)$. Однако имеется одно важное отличие. А именно, в множестве $O_2(\bar{X}) - \bar{Z}$ лежит инволюция из $C_{\bar{X}}(\bar{\pi})$, скажем $\bar{a}$, согласно условию и сделанному выше предположению. Это обстоятельство в корне меняет дело. Действительно, каждый смежный класс $O_2(\bar{X})$ по $\bar{Z}$ содержит представитель вида $\bar{a}^{\bar{\theta}^k}$ для некоторого целого k, поскольку $\bar{\theta}$ транзитивно переставляет инволюции из $O_2(\tilde{X})$. Поэтому каждый элемент из множества $O_2(\bar{X}) - \bar{Z}$ имеет вид $\bar{a}^{\bar{\theta}^k} \cdot \bar{z}$ для некоторых k, $1 \leqslant k \leqslant 7$, и $\bar{z} \in \bar{Z}$. Однако $\bar{z}$ — инволюция из центра $O_2(\bar{X})$, поэтому каждый элемент из множества $O_2(\bar{X}) - \bar{Z}$ является инволюцией. Учитывая, что $\bar{Z}$ — элементарная абелева 2-группа, мы получаем, что $O_2(\bar{X})$ имеет экспоненту 2. Следовательно, $O_2(\bar{X})$ — абелева группа, что противоречит условию $\bar{Z} = Z\big(O_2(\bar{X})\big) < O_2(\bar{X})$.

Таким образом, мы показали, что $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \cong E_4$. Рассматривая группу $\hat{X} = \bar{X}/\bar{Z}$ и применяя к ней лемму 2.7, мы получаем, что $O_2(\hat{X}) = 1$. Другими словами, $\bar{Z} = O_2(\bar{X})$ — абелева группа.

Утверждается, что $\bar{Z} = O_2(\bar{X})$ — элементарная абелева 2-группа. Действительно, положим $\bar{T} = \Omega_1(\bar{Z})$ и заметим, что $E_4 \cong C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \leqslant \bar{T}$. Поэтому $C_{\bar{T}}(\bar{\pi}) \cong E_4$, и после применения леммы 2.7 к фактор-группе $\hat{X} = \bar{X}/\bar{T}$ мы получаем, что $O_2(\hat{X}) = 1$. Другими словами, $O_2(\bar{X}) = \Omega_1(\bar{Z})$, что и требовалось.

Группа $\bar{X}$ может иметь внутри $\bar{Z}$ не более двух главных факторов, поскольку в каждом из них обязана быть по меньшей мере одна неподвижная точка элемента порядка 3. Учитывая 2-скованность $\bar{X}$, мы получаем из лемм 2.8 и 2.12, что может иметь место лишь один из следующих трёх случаев (в обозначениях леммы 2.8):

а) $\bar{Z} \cong V_3$, т. е. такой главный фактор ровно один, совпадает с $\bar{Z}$ и изоморфен V_3 как $GF(2)$-модуль группы $\bar{X}/\bar{Z} \cong \mathrm{PSL}(2,7)$; $|\bar{Z}| = 2^8$;

б) внутри $\bar{Z}$ имеется ровно два главных фактора, причём каждый из них изоморфен либо V_1, либо V_2; $|\bar{Z}| = 2^6$;

в) внутри $\bar{Z}$ имеется ровно два главных фактора, причём один из них тривиален, а другой изоморфен V_1 или V_2; $|\bar{Z}| = 2^4$.

Все эти случаи приводят к содержательным ответам, и мы разберём их независимо.

Покажем, что в случае а) обязательно $O(X) = 1$. Тем самым мы покажем справедливость пункта 1) доказываемой леммы.

Поскольку $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi}) \cong E_4$ и $|\bar{Z}| = 2^8$, то $\bar{Z}$ разлагается в прямую сумму $C_{\bar{Z}}(\bar{\pi})$ и трёх двумерных неприводимых модулей группы $\langle\bar{\pi}\rangle$. Следовательно, в группе $O_{3'}(X)$ имеется такая $\langle\pi\rangle$-инвариантная подгруппа $V \cong E_4$, для которой $\bar{V} \leqslant \bar{Z}$ и $V\langle\pi\rangle \cong A_4$. Воспользуемся теперь заключительным рассуждением из доказательства леммы 4.8. Если $V\langle\pi\rangle$ точно действует на $O(X)$, то из леммы 2.5 следует, что $O(X)=1$. Поэтому мы можем предполагать, что указанное действие является неточным. Если $V\langle\pi\rangle\leqslant C_X\big(O(X)\big)$, то $O(X)=1$, в силу того что $C_{O(X)}(\pi)=1$. Поэтому можно считать, что $V\leqslant$ $\leqslant C_X\big(O(X)\big)$, но $\pi\notin C_X\big(O(X)\big)$. Таким образом, $C_X\big(O(X)\big)\cdot O(X)\neq X$ и $C_X\big(O(X)\big)\lhd X$. Поскольку $V\leqslant C_X\big(O(X)\big)$, то нормальное строение X влечёт, что $C_X\big(O(X)\big)O(X)=O_{3'}(X)$. Следовательно, $O_{3'}(X)=O_2(X)\times O(X)$ — нильпотентная группа. Теперь стандартные рассуждения, использующие лемму 2.6, дают $O(X)=1$, что и требовалось.

Покажем, что в случае б) обязательно $O(X)=1$. Тем самым мы покажем справедливость пункта 2). Пусть $\bar{T}\lhd\bar{X}$ является одним из главных факторов $\bar{X}$ внутри $\bar{Z}$. Тогда на $\bar{T}$ группа $\bar{X}/\bar{Z}\cong\mathrm{GL}(3,2)$ действует как $\mathrm{GL}(3,2)$. Отсюда мы без труда получаем, что в $O_{3'}(X)$ имеется π-инвариантная подгруппа $V\cong E_4$, для которой $\bar{V}\leqslant\bar{T}$ и $V\langle\pi\rangle\cong A_4$. Применяя лемму 2.5 и несложные рассуждения, аналогичные использованным выше, мы получаем, что без ограничения общности можно предполагать, что либо $C_X\big(O(X)\big)O(X)=O_{3'}(X)$, либо $\overline{C_X\big(O(X)\big)}=\bar{T}$. В первом случае $O_{3'}(X)=O_2(X)\times O(X)$ — нильпотентная группа и стандартное использование леммы 2.6 позволяет получить нужное заключение $O(X)=1$. Во втором случае положим $\hat{X}=X/O_2(X)$, причём понятно, что $O_2(\hat{X})\cong E_4$. Применяя теперь к группе $\hat{X}$ аналогичное рассуждение, мы получаем либо $O(\hat{X})=1$, либо $O_2(\hat{X})\neq 1$. Оба эти заключения противоречат равенству $O_2(\hat{X})=1$. Таким образом, случай б) разобран.

Переходим, наконец, к случаю в). Рассматривая действие $\bar{\pi}$ на $\bar{Z}$, мы видим, что в $O_{3'}(X)$ имеется π-инвариантная подгруппа $V\cong\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$, для которой $\bar{V}\leqslant\bar{Z}$ и $V\langle\pi\rangle\cong A_4$. Повторяя рассуждение, уже использованное несколько раз выше, мы заключаем, что либо $O(X)=1$, либо $|O_2(X)|\geqslant 2^3$. Первый случай сразу приводит нас к пункту 3) нашей леммы. Поэтому мы можем предполагать, что $|O_2(X)|\geqslant 2^3$. Если $|O_2(X)|=2^4$, то $O(X)=1$ в силу леммы 2.7, и мы снова приходим к пункту 3). Следовательно, можно предполагать, что $|O_2(X)|=2^3$. Учитывая, что $O(X)$ — нильпотентная группа, мы получаем, что $X/F(X)\cong\mathbb{Z}_2\times\mathrm{PSL}(2,7)$ или $X/F(X)\cong\mathrm{SL}(2,7)$. Применение в первом случае леммы 2.7 снова даёт $O(X)=1$. Поэтому считаем, что $X/F(X)\cong\mathrm{SL}(2,7)$. Из леммы 4.6 следует, что $O(X)=O_7(X)$. Таким образом, мы приходим к пункту 4). Доказательство закончено. $\square$

5. Компонентный случай

В этом разделе G является неабелевой простой $5'$-группой, $|G|=3n_0$, $(3,n_0)=1$, $\langle\pi\rangle\in\mathrm{Syl}_3(G)$ и $C_G(\pi)=\langle\pi\rangle\times H$, где $H=\langle a\rangle\times\langle b\rangle\cong E_4$. В частности, для группы G справедлива теорема 3.8. Хотя и не предполагается, что группа G является минимальным контрпримером к основной теореме, из следующей леммы видно, что это никак не отражается на строении централизаторов её инволюций.

Лемма 5.1. *Если t — инволюция группы G, то каждое неабелево простое сечение $C_G(t)$ является группой известного типа.*

Доказательство. Если $3 \notin \pi\big(C_G(t)\big)$, то лемма следует из классификации простых $3'$-групп в [15]. Предположим поэтому, что $3 \in \pi\big(C_G(t)\big)$. Можно считать, что $C_G(t)$ — неразрешимая группа, $t \in H$ и $\pi \in C_G(t)$. Следовательно, в группе $\bar{C} = C_G(t)/\langle t\rangle$ централизатор $\bar{\pi}$ является абелевой группой типа $(3, 2)$. Теперь осталось воспользоваться леммами 2.1 и 3.1. □

Лемма 5.2. *Если t — инволюция группы G, то $C_G(t)$ — разрешимая группа.*

Доказательство. Положим $C = C_G(t)$. Не ограничивая общности изложения, мы можем предполагать, что $\pi \in C$ и $t \in H$. В частности, $N_G(\langle\pi\rangle) \leqslant C$ согласно теореме 3.8. Поэтому в C обязательно имеется инволюция, инвертирующая элемент π. Учитывая эти факты и обращаясь к результатам предыдущего раздела, мы видим, что имеются лишь следующие возможности строения C:

а) $C \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2, 13)$;
б) $C \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PGL}(2, 7)$;
в) $C \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2, 7)$;
г) $O_2(C) \cong E_{2^4}$, $|Z(C)| = 2$ и фактор-группа $C/O_2(C) \cong \mathrm{GL}(3, 2)$ действует на $O_2(C)/Z(C)$ как $\mathrm{GL}(3, 2)$;
д) C — разрешимая группа.

Таким образом, нам надо показать, что случаи а)—г) не могут иметь места. Имеется много результатов, классифицирующих группу G с централизаторами инволюций или другими подгруппами типа а)—г). Мы воспользуемся некоторыми из этих результатов и покажем, что если имеет место хотя бы один из случаев а)—г), то G должна быть известной простой группой. Мы получим противоречие, поскольку ни одна из известных простых групп не удовлетворяет предположениям, наложенным на группу G.

Из леммы 2.13 следует, что невозможен случай а). Лемма 2.14 устраняет случай б). Следовательно, нам осталось лишь отбросить случаи в) и г).

Предположим, что имеет место случай г). Положим $E = O_2(C) \cong E_{2^4}$. Заметим, что $C_G(E) \leqslant C$, откуда следует, что $C_G(E) = E$, причём $N_G(E)/C_G(E)$ — неразрешимая группа. Теперь лемма 2.15 классифицирует группу G и тем самым устраняет случай г).

Итак, мы доказали, что если i — произвольная инволюция группы G и $C_G(i)/O_{3'}\big(C_G(i)\big) \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$, то $C_G(i)$ обязательно имеет строение, описываемое в в), т. е. $C_G(i) \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathrm{PSL}(2, 7)$. Предполагая теперь, что имеет место случай в) строения C, мы получаем, что $C = H \times K$, где $H = \langle a, b\rangle$ — группа из условия и $K \cong \mathrm{PSL}(2, 7)$. Нетрудно убедиться, что $C_G(i)/O_{3'}\big(C_G(i)\big) \cong$ $\cong \mathrm{PSL}(2, 7)$ для любой инволюции $i \in H^{\#}$. Следовательно, для возможен только случай в) строения $C_G(i)$, а поскольку $C \leqslant C_G(i)$, то по соображениям порядков $C_G(i) = C$ для любой инволюции $i \in H^{\#}$. Теперь применима лемма 2.16, которая устраняет случай в). Доказательство закончено. □

Лемма 5.3. *Справедливы следующие утверждения*:

1) $\mathrm{SCN}_3(2)$ *непусто в группе* G;
2) $F^*(N) = O_2(N)$ *для любой* 2*-локальной подгруппы* N *группы* G.

Доказательство. Пункт 1) следует из основного результата [20]. Поэтому [5, 16, 22] дают нам, что централизаторы инволюций в группе G имеют тривиальные ядра. Теперь [18] завершает доказательство. $\square$

Следствие 5.4. *Если* G — *минимальный контрпример к основной теореме, то* G *является простой группой типа характеристики* 2.

Доказательство. Утверждение следует из лемм 3.3 и 5.3. $\square$

6. Доказательство основной теоремы

В этом разделе G является конечной простой $5'$-группой типа характеристики 2, $|G| = 3n_0$, $(3, n_0) = 1$, $\langle\pi\rangle \in \mathrm{Syl}_3(G)$ и $C_G(\pi) = \langle\pi\rangle \times H$, где $H = \langle a, b\rangle \cong E_4$. Кроме того, предполагается, что каждое собственное простое сечение группы G является группой известного типа. Таким образом, можно рассматривать G как минимальный контрпример к основной теореме. Напомним, что если X — произвольная конечная группа, то $J(X)$ обозначает подгруппу в X, порождённую элементарными абелевыми 2-подгруппами наибольшего порядка.

Лемма 6.1. *Пусть* M — *некоторая* 2*-локальная подгруппа в* G. *Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

1) $3 \notin \pi(M)$ *и* M — *разрешимая группа*;
2) $M/O_{3'}(M) \cong \mathbb{Z}_3$ *или* $M/O_{3'}(M) \cong D_6$, *причём* $O_{3'}(M) = O_{2,2'}\big(O_{3'}(M)\big)$;
3) $M/O_2(M) \cong L_3(2)$ *и* $O_2(M) \cong E_{2^6}$, *причём* M *имеет внутри* $O_2(M)$ *ровно два главных фактора порядков* 2^3, *на каждом из которых* $M/O_2(M)$ *действует как* $L_3(2)$;
4) $M/O_2(M) \cong L_3(2)$ *и* $O_2(M) \cong V_3$ *как* $GF(2)$*-модули группы* $M/O_2(M)$ (*в обозначениях леммы* 2.8).

Доказательство. Если $3 \notin \pi(M)$, то M разрешима согласно [15], поскольку порядок любой группы Судзуки делится на 5. Пусть $3 \in \pi(M)$. В случае когда M — разрешимая группа, из леммы 3.2 мы получаем, что $M/O_{3'}(M) \cong \mathbb{Z}_3$ или $M/O_{3'}(M) \cong D_6$, причём $O_{3'}(M)$ имеет 2-длину 1. Теперь справедливость утверждения 2) следует из того, что $O(M) = 1$. Поэтому мы можем считать, что M — неразрешимая группа. Из лемм 4.1—4.5 следует, что $O_{3'}(M) = O_2(M)$ и $M/O_2(M) \cong L_3(2)$. Теперь леммы 4.8 и 4.9 указывают все возможности для строения группы M. Две из них совпадают с 3) и 4), а остальные отбрасываются с помощью леммы 2.15. $\square$

Лемма 6.2. *В группе* G *существует неразрешимая* 2*-локальная подгруппа.*

Доказательство. См., например, [21]. $\square$

Лемма 6.3. *Пусть M — неразрешимая 2-локальная подгруппа в G. Тогда $M/O_2(M) \cong L_3(2)$ и $O_2(M) \cong E_{2^6}$. Кроме того, M является максимальной 2-локальной подгруппой в G.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда из леммы 6.1 следует, что $O_2(M) \cong E_{2^8}$ и $O_2(M) \cong V_3$, если рассматривать их как $GF(2)$-модули группы $M/O_2(M) \cong L_3(2)$. Можно предполагать, что $\pi \in M$, откуда следует, что $N_G(\langle\pi\rangle) \leqslant M$ и $H \leqslant O_2(M)$. Пусть $t \in N_M(\langle\pi\rangle) - C_M(\pi)$. Теорема 3.8 даёт нам, что t является инволюцией, централизующей H. Однако непосредственное вычисление в модуле V_3 показывает, что t не централизует множество неподвижных точек π в $O_2(M)$. Полученное противоречие доказывает, что $O_2(M) \cong E_{2^6}$. Последнее замечание теперь следует из леммы 6.1. □

Лемма 6.4. *Порядок G делится на 2^{10}.*

Доказательство. См., например, [7]. □

Учитывая леммы 6.2 и 6.3, мы можем зафиксировать максимальную 2-локальную подгруппу M группы G, для которой $Q = O_2(M) \cong E_{2^6}$ и $M/Q \cong \cong L_3(2)$. Пусть $T \in \mathrm{Syl}_2(M)$ и $Z = \Omega_1\big(Z(T)\big)$. Тогда $|T| = 2^9$ и $|Z| \leqslant 2^2$.

Лемма 6.5. *$Q = U_1 \oplus U_2$, причём $m(U_1) = 3$ и $U_1 \cong U_2$ как $GF(2)$-модули группы $M/Q \cong L_3(2)$. Кроме того, $J(T)Q/Q$ — однозначно определённая четверная группа в M/Q, отличная от $O_2\big(C_M(Z)\big)/Q$.*

Доказательство. Из леммы 6.1 следует, что $Z \nleqslant Z(M)$. В случае когда $J(T) \leqslant Q$, мы имеем $J(T) = J(Q) \lhd M$ и $M = N_G\big(J(T)\big)$. Следовательно, $N_G(T) \leqslant M$ и $T \in \mathrm{Syl}_2(G)$, что противоречит лемме 6.4. Поэтому $J(T) \nleqslant Q = = \langle Z^M \rangle = C_M(Q)$. Теперь применим результат [6, (6.1)], который и завершает доказательство. □

Лемма 6.6. *$O_2(Y) \in И^*_G(Y, 2)$ для $Y = C_M(Z)$.*

Доказательство. Из леммы 6.5 следует, что $J(T)Q/Q$ является четверной подгруппой в T/Q, отличной от $O_2(Y)/Q$. Поэтому $J\big(O_2(Y)\big) = J(Q)$.

Рассуждая от противного, предположим теперь, что $O_2(Y) < R \in И_G(Y, 2)$. Так как R — 2-группа, то

$$O_2(Y) < N_R\big(O_2(Y)\big) \in И_G(Y, 2).$$

Заменяя в случае необходимости R на $N_R\big(O_2(Y)\big)$, мы можем предполагать, что $O_2(Y) \lhd R$. Следовательно,

$$R \leqslant N_G\big(O_2(Y)\big) \leqslant N_G\Big(J\big(O_2(Y)\big)\Big) = N_G\big(J(Q)\big) = M,$$

а так как непосредственно видно, что $O_2(Y) \in И^*_M(Y, 2)$, то мы получаем противоречие. □

Лемма 6.7. *$T \in \mathrm{Syl}_2(G)$, так что порядок G не делится на 2^{10}.*

Доказательство. Предположим противное. Тогда $T < S \in \mathrm{Syl}_2(G)$ и $T < N_S(T)$. Так как Z характеристическая в T, то $N_S(T) \leqslant N = N_G(Z)$. Из леммы 6.1 следует, что N — разрешимая группа. Пусть $Y = C_M(Z)$. Так как $Y \leqslant N$, то Y содержится в некоторой холловской $\{2,3\}$-подгруппе H из N. Поскольку $T \notin \mathrm{Syl}_2(G)$, то $T < R \in \mathrm{Syl}_2(H)$, и поэтому $Y < H = YR = RY$. С другой стороны, так как силовские 3-подгруппы циклические, $YR = YO_2(H)$. Следовательно, $O_2(Y)O_2(H) \in \text{И}_G(Y,2)$, откуда следует, что $O_2(H) \leqslant O_2(Y)$ по лемме 6.6. Таким образом, $H = Y$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Заметим, что леммы 6.4 и 6.7 завершают доказательство основной теоремы.

Литература

[1] Кабанов В. В., Старостин А. И. Конечные группы, в которых силовская 2-подгруппа централизатора некоторой инволюции порядка 16 // Мат. заметки. — 1975. — Т. 18, № 6. — С. 869—876.

[2] Ситников В. М. Конечные группы с силовской 2-подгруппой, содержащей самоцентрализующуюся элементарную абелеву подгруппу порядка 8 // Мат. заметки. — 1974. — Т. 16, № 6. — С. 899—906.

[3] Ситников В. М. О группе Матье M_{12} // Мат. заметки. — 1974. — Т. 15, № 4. — С. 651—660.

[4] Alperin J. L., Brauer R., Gorenstein D. Finite groups with quasi-dihedral and wreathed Sylow 2-subgroups // Trans. Am. Math. Soc. — 1970. — Vol. 151, no. 1. — P. 1—261.

[5] Aschbacher M. Finite groups with a proper 2-generated core // Trans. Am. Math. Soc. — 1974. — Vol. 197. — P. 87—112.

[6] Aschbacher M. Thin finite simple groups // J. Algebra. — 1978. — Vol. 54, no. 1. — P. 50—152.

[7] Beisiegel B. Über einfache endliche Gruppen mit Sylow-2-Gruppen der Ordnung höchstens 2^{10} // Commun. Algebra. — 1977. — Vol. 5, no. 2. — P. 113—170.

[8] Bender H. Transitive Gruppen gerader Ordnung, in denen jede Involution genau einen Punkt festläßt // J. Algebra. — 1971. — Vol. 17, no. 4. — P. 527—554.

[9] Brauer R. Some applications of the theory of blocks of characters of finite groups. III // J. Algebra. — 1966. — Vol. 3, no. 2. — P. 225—255.

[10] Dickson N. K. Groups with dihedral 3-normalizers of order $4k$. I // J. Algebra. — 1978. — Vol. 54, no. 2. — P. 390—409.

[11] Dickson N. K. Groups with dihedral 3-normalizers of order $4k$. II // J. Algebra. — 1978. — Vol. 54, no. 2. — P. 410—443.

[12] Dickson N. K. Structure theorems for groups with dihedral 3-normalisers // Proc. Edinburgh Math. Soc. — 1978. — Vol. 21, no. 2. — P. 175—186.

[13] Dickson N. K., Page D. R. Groups with dihedral 3-normalizers of order $4k$. III // J. Algebra. — 1979. — Vol. 58, no. 2. — P. 462—480.

[14] Feit W., Thompson J. G. Finite groups which contain a self-centralizing subgroup of order 3 // Nagoya Math. J. — 1962. — Vol. 21, Dec. — P. 185—197.

[15] Glauberman G. Factorizations in Local Subgroups of Finite Groups. — Providence: Amer. Math. Soc., 1977. — (Reg. Conf. Ser. Math. No. 33).

[16] Goldschmidt D. M. 2-signalizer functors on finite groups // J. Algebra. — 1972. — Vol. 21, no. 2. — P. 321—340.

[17] Gorenstein D. Finite Groups. — New York: Harper and Row, 1968.

[18] Gorenstein D. On finite simple groups of characteristic 2 type // Inst. Hautes Études Sci. — 1969. — Vol. 36. — P. 5—13.

[19] Gorenstein D. The classification of finite simple groups. I. Simple groups and local analysis // Bull. Am. Math. Soc. (New Ser.). — 1979. — Vol. 1, no. 1. — P. 43—199.

[20] Gorenstein D., Harada K. Finite groups whose 2-subgroups are generated by at most 4 elements // Mem. Am. Math. Soc. — 1974. — No. 147.

[21] Gorenstein D., Lyons R. Nonsolvable finite groups with solvable 2-local subgroups // J. Algebra. — 1976. — Vol. 38, no. 2. — P. 453—522.

[22] Gorenstein D., Walter J. H. Centralizers of involutions in balanced groups // J. Algebra. — 1972. — Vol. 20, no. 2. — P. 284—319.

[23] Harada K. On finite groups having self-centralizing 2-subgroups of small order // J. Algebra. — 1975. — Vol. 33, no. 1. — P. 144—160.

[24] Morini C. Alcune osservazioni su una classe di gruppi finiti contenenti un sottogruppo di ordine 3 con prescritto centralizzante. I // Ann. Univ. Ferrara. — 1977. — Sez. 7, Vol. 23. — P. 189—194.

[25] Rickman B. Groups which admit a fixed-point-free automorphism of order p^2 // J. Algebra. — 1979. — Vol. 59, no. 1. — P. 77—171.

[26] Stroth G. Endliche einfache Gruppen mit einer zentralisatorgleichen elementar abelschen Untergruppe von der Ordnung 16 // J. Algebra. — 1977. — Vol. 47, no. 2. — P. 480—523.

[27] Stroth G. Gruppen mit kleinen 2-lokalen Untergruppen // J. Algebra. — 1977. — Vol. 47, no. 2. — P. 441—454.

[28] Wielandt H. Sylowgruppen und Kompositions-Struktur // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1958. — B. 22, No. 3-4. — S. 215—228.