

Конкретная характеристика универсальных планарных автоматов

В. А. МОЛЧАНОВ

Саратовский государственный университет
e-mail: v.molchanov@inbox.ru

УДК 519.713.8+512.53+514.146

Ключевые слова: проблема конкретной характеристики, автоматы, полугруппы, плоскости.

Аннотация

В работе рассматриваются полугрупповые автоматы, у которых множество состояний и множество выходных символов наделены алгебраическими структурами плоскостей, сохраняющимися функцией переходов и выходной функцией автомата. Универсальные притягивающие объекты в категории таких автоматов называются универсальными планарными автоматами. Ранее было показано, что эти автоматы определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов. В настоящей работе исследуется проблема конкретной характеристики этих автоматов.

Abstract

V. A. Molchanov, Concrete characterization of universal planar automata, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 139–148.

Universal planar automata are universally attracted objects in the category of automata, for which the sets of states and output symbols are endowed with structures of planes. It was proved that these automata are determined up to isomorphism by their semigroups of input symbols. We investigate the problem of concrete characterization of these automata.

1. Введение

В последнее время проявился заметный интерес к исследованию автоматов, для которых системы состояний и выходных символов являются объектами некоторой категории **K** (см. обзор в [4]). Например, Л. М. Глушкин, Е. С. Ляпин, Б. М. Шайн, Ю. М. Важенин и другие авторы (см. обзор в [10]) исследовали полугруппы эндоморфизмов графов, которые могут рассматриваться как графические полуавтоматы (т. е. автоматы без выходных символов, для которых системы состояний являются объектами категории графов **Gr**). Более того, хорошо известная проблема Л. М. Глушкина и Л. А. Скорнякова о полугруппах эндоморфизмов проективных плоскостей может быть рассмотрена как проблема

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 139–148.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

определимости планарных полуавтоматов их полугруппами входных символов (см. проблему 1.20 в [5] и её решение В. Б. Лендером в [2] и автором настоящей работы в [3]). Этот результат позже в [11] был обобщён автором настоящей работы на автоматы с выходными символами, для которых системы состояний и выходных символов являются объектами категории плоскостей $\mathbf{PI}$.

Как отмечено в [4], в категории планарных автоматов для любых плоскостей $\Pi, \Pi' \in \mathbf{PI}$ существует универсальный притягивающий объект $\text{Atm}(\Pi, \Pi')$, который называется универсальным планарным автоматом над плоскостями Π, Π' . Главный результат в [11] показывает, что такие универсальные планарные автоматы определяются с точностью до изоморфизма своими полугруппами входных символов. Ввиду проблемы С. Улама об определимости математических структур их эндоморфизмами [6] и результатов Б. Йонсона о конкретной характеристизации алгебр отношений [9] представляет интерес следующий вопрос конкретной характеристизации для универсальных планарных автоматов: при каких условиях автомат A будет универсальным планарным автоматом, т. е. можно так определить на множестве состояний X и на множестве выходных символов Y этого автомата структуры плоскостей $\Pi_X, \Pi_Y \in \mathbf{PI}$, что автомат A будет универсальным планарным автоматом $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$. Эта проблема исследуется в настоящей работе. В главной теореме работы для автомата A получены необходимые и достаточные условия, при которых на множестве его состояний и на множестве его выходных символов можно так определить структуры плоскостей, что автомат A будет универсальным планарным автоматом над этими плоскостями.

2. Основные понятия

Напомним некоторые понятия из теории автоматов, теории плоскостей и теории полугрупп, которые будут использоваться в дальнейшем. Читатели, интересующиеся деталями, могут обратиться, например, к работам [4, 7, 8].

Под отображением множества X в множество Y (обозначение $\varphi: X \rightarrow Y$) понимается однозначное бинарное отношение $\varphi \subset X \times Y$ с областью определения $\text{dom } \varphi = X$. Образ элемента $x \in X$ относительно отображения φ обозначается $\varphi(x)$. Для подмножества $A \subset X$ положим $\varphi(A) = \{\varphi(x) \mid x \in A\}$. Через Δ_X обозначается тождественное отображение множества X в себя.

Для отображений $\varphi: X \rightarrow Y, \psi: Y \rightarrow Z$ композиция $\varphi\psi: X \rightarrow Z$ определяется по формуле $\varphi\psi(x) = \psi(\varphi(x))$. Для отображения $\varphi: X \rightarrow Y$ декартова степень $\varphi^3: X^3 \rightarrow Y^3$ определяется по формуле $\varphi^3(x_1, x_2, x_3) = (\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3))$.

Пусть X, Y — непустые множества. Обозначим через $T(X)$ множество всех преобразований X , через $F(X, Y)$ — множество всех отображений X в Y и через $S(X, Y)$ — декартово произведение $T(X) \times F(X, Y)$ множеств $T(X), F(X, Y)$. Элементами множества $S(X, Y)$ являются упорядоченные пары (f_1, f_2) отображений $f_1: X \rightarrow X, f_2: X \rightarrow Y$, которые могут рассматриваться как вектор-функции $f: X \rightarrow X \times Y$, определяющиеся по формуле $f(x) = (f_1(x), f_2(x))$ для $x \in X$. Отображения f_1, f_2 называются соответственно первой и второй

компонентами вектор-функции f . Таким образом, вектор-функции могут отождествляться с упорядоченными парами их компонент.

Следуя [4], для вектор-функций $f, g \in S(X, Y)$ определим произведение $f \cdot g \in S(X, Y)$ по формуле $f \cdot g = (f_1, f_2) \cdot (g_1, g_2) = (f_1 g_1, f_1 g_2)$. Легко убедиться, что эта операция ассоциативна. Следовательно, множество $S(X, Y)$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, она называется симметрической полугруппой вектор-функций на X со значениями в $X \times Y$. Подполугруппы $S(X, Y)$ называются полугруппами вектор-функций на X с значениями в $X \times Y$.

Следуя [7], под плоскостью будем понимать алгебраическую систему вида $\Pi = (X, L)$, где X — непустое множество точек и L — семейство его подмножеств, именуемых прямыми, удовлетворяющее следующим аксиомам:

- (A₁) любые две точки плоскости Π содержатся в одной и только одной прямой;
- (A₂) любая прямая плоскости Π содержит по крайней мере три точки;
- (A₃) в плоскости Π существуют три точки, не принадлежащие одной прямой.

В частности, плоскость Π является проективной, если любые две её прямые имеют общую точку, и аффинной, если для любой прямой $l \in L$ и любой точки $x \in X \setminus l$ существует единственная прямая l' , такая что $x \in l'$ и $l \cap l' = \emptyset$.

Точки плоскости называются коллинеарными, если они лежат на одной прямой.

Пусть $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ — некоторые плоскости. Отображение $\varphi: X \rightarrow X'$ называется гомоморфизмом Π в Π' (обозначение $\varphi: \Pi \rightarrow \Pi'$), если оно отображает коллинеарные точки плоскости Π в коллинеарные точки плоскости Π' , т. е. выполняется следующее условие: для любой прямой $l \in L$ найдётся прямая $l' \in L'$, такая что $\varphi(l) \subset l'$.

Множество всех гомоморфизмов Π в Π' обозначим $\text{Hom}(\Pi, \Pi')$. Очевидно, что для любой прямой $l' \in L'$ любое отображение $\varphi: X \rightarrow l'$ является гомоморфизмом Π в Π' .

Гомоморфизм плоскости Π в себя называется эндоморфизмом Π . Множество всех эндоморфизмов плоскости Π с операцией композиции образует полугруппу $\text{End } \Pi$.

Для плоскостей $\Pi = (X, L)$, $\Pi' = (X', L')$ множество $\text{End } \Pi \times \text{Hom}(\Pi, \Pi')$ с операцией умножения вектор-функций образует полугруппу, которую мы обозначим $S(\Pi, \Pi')$.

Следуя [4], под автоматом будем понимать алгебраическую систему $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$, состоящую из множества состояний X , полугруппы входных символов S , множества выходных символов Y , функции переходов $\delta: X \times S \rightarrow X$ и выходной функции $\lambda: X \times S \rightarrow Y$, таких что для любых $x \in X$ и $s, t \in S$ выполняются условия $\delta(x, st) = \delta(\delta(x, s), t)$, $\lambda(x, st) = \lambda(\delta(x, s), t)$.

Для каждого $s \in S$ определим отображения $\delta_s: X \rightarrow X$, $\lambda_s: X \rightarrow Y$ и вектор-функцию $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$ по формулам $\delta_s(x) = \delta(x, s)$, $\lambda_s(x) = \lambda(x, s)$, где $x \in X$. По определению автомата последовательное действие входных сигналов $s, t \in S$ удовлетворяет следующим условиям:

$$(f_s f_t)(x) = f_t(f_s(x)) = (\delta(\delta(x, s), t), \lambda(\delta(x, s), t)) = (\delta(x, st), \lambda(x, st)) = f_{st}(x).$$

Это означает, что соответствие $s \mapsto f_s$ ($s \in S$) является гомоморфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу вектор-функций $S(X, Y)$. В частности, это соответствие является мономорфизмом полугруппы S в симметрическую полугруппу $S(X, Y)$, если $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ — автомат без равнодействующих сигналов, т. е. для любых $s, t \in S$, $s \neq t$, выполняется условие $f_s \neq f_t$. В этом случае действие входного символа $s \in S$ полностью определяется действием пары отображений δ_s, λ_s и можно отождествить входной символ s с вектор-функцией $f_s = (\delta_s, \lambda_s)$.

По определению из [4] планарные автоматы являются структуризованными автоматами $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ с множеством состояний X и множеством выходных символов Y , наделёнными структурами плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$ и $\Pi_Y = (Y, L_Y)$, полугруппой входных сигналов S , функцией переходов $\delta: X \times S \rightarrow X$ и выходной функцией $\lambda: X \times S \rightarrow Y$, для которых при каждом фиксированном $s \in S$ преобразование $\delta_s: X \rightarrow X$ — это эндоморфизм плоскости Π_X и отображение $\lambda_s: X \rightarrow Y$ — это гомоморфизм плоскости Π_X в плоскость Π_Y . Такие автоматы обозначаются $A = (\Pi_X, S, \Pi_Y, \delta, \lambda)$.

Так как с алгебраической точки зрения планарные автоматы представляют собой многосортные алгебраические системы, то гомоморфизмом планарного автомата $A = (\Pi_X, S, \Pi_Y, \delta, \lambda)$ в планарный автомат $A' = (\Pi_{X'}, S', \Pi_{Y'}, \delta', \lambda')$ называется упорядоченная тройка $\gamma = (f, \pi, g)$ отображений $f: X \rightarrow X'$, $\pi: S \rightarrow S'$ и $g: Y \rightarrow Y'$, сохраняющих алгебраическую структуру таких автоматов, т. е. f является гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость $\Pi_{X'}$, π — гомоморфизмом полугруппы S в полугруппу S' , g — гомоморфизмом плоскости Π_Y в плоскость $\Pi_{Y'}$ и для любых значений $x \in X$, $s \in S$ выполняются условия

$$f(\delta(x, s)) = \delta'(f(x), \pi(s)), \quad g(\lambda(x, s)) = \lambda'(f(x), \pi(s)).$$

Важный пример планарного автомата даёт алгебраическая система

$$\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y) = (\Pi_X, S(\Pi_X, \Pi_Y), \Pi_Y, \delta^\circ, \lambda^\circ),$$

где $\Pi_X = (X, L_X)$, $\Pi_Y = (Y, L_Y)$ — некоторые плоскости и для любых $x \in X$, $(\varphi, \psi) \in S(\Pi_X, \Pi_Y)$ определены значения $\delta^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \varphi(x)$, $\lambda^\circ(x, (\varphi, \psi)) = \psi(x)$.

Легко проверить, что $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ удовлетворяет следующему универсальному свойству: для любого планарного автомата $A = (\Pi_X, S, \Pi_Y, \delta, \lambda)$ существует такой гомоморфизм $\pi: S \rightarrow S(\Pi_X, \Pi_Y)$, что упорядоченная тройка $\gamma = (\Delta_X, \pi, \Delta_Y)$ является гомоморфизмом A в $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$. По этой причине автомат $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ называется в [4] универсальным планарным автоматом над плоскостями Π_X, Π_Y .

3. Главные результаты

В статье исследуется проблема конкретной характеристики универсальных планарных автоматов, которая формулируется следующим образом: при каких

условиях для автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на множествах X, Y можно так задать структуры плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$, $\Pi_Y = (Y, L_Y)$, что автомат A будет универсальным планарным автоматом $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$, т. е. полугруппа S входных символов автомата A будет равна полугруппе $S(\Pi_X, \Pi_Y)$.

Пусть $\Pi = (X, L)$ — произвольная плоскость. Рассмотрим на множестве X тернарное отношение $C(\Pi)$, которое называется отношением коллинеарности плоскости Π и определяется по формуле

$$C(\Pi) = \{(x_1, x_2, x_3) \in X^3 : x_1, x_2, x_3 \text{ — коллинеарные точки плоскости } \Pi\}.$$

Лемма 1. Для любой плоскости $\Pi = (X, L)$ отношение коллинеарности $C = C(\Pi)$ удовлетворяет следующим условиям:

- (T₁) $(x, x, y) \in C$ для любых $x, y \in X$;
- (T₂) из условия $(x_1, x_2, x_3) \in C$ следует, что $(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}) \in C$ для любых $1 \leq i_1, i_2, i_3 \leq 3$;
- (T₃) для любых различных элементов $x_1, x_2 \in X$ из условий $(x, x_1, x_2) \in C$, $(x_1, x_2, y) \in C$ следует, что $(x, x_1, y) \in C$;
- (T₄) для любых $x_1, x_2 \in X$ найдётся такой элемент $x \in X$, что $x \neq x_1, x \neq x_2$ и $(x_1, x_2, x) \in C$;
- (T₅) $C \neq X^3$.

Доказательство. Пусть $C = C(\Pi)$ — отношение коллинеарности плоскости $\Pi = (X, L)$. Из свойства (A₁) и определения отношения коллинеарности следует, что C удовлетворяет условиям (T₁), (T₂). Если для различных элементов $x_1, x_2 \in X$ выполняются условия $(x, x_1, x_2) \in C$, $(x_1, x_2, y) \in C$, то по свойству (A₂) существует такая единственная прямая $l \in L$, что $x_1, x_2 \in l$, и, следовательно, также выполняется условие $x, y \in l$. Значит, $(x, x_1, y) \in C$ и C удовлетворяет условию (T₃). Из свойства (A₁) следует, что для любых точек $x_1, x_2 \in X$ найдётся такая прямая $l \in L$, что $x_1, x_2 \in l$. Тогда по свойству (A₂) найдётся отличная от элементов x_1, x_2 точка $x \in l$. Следовательно, $(x_1, x_2, x) \in C$ и C удовлетворяет условию (T₄). По свойству (A₃) в плоскости Π существуют три точки $x_1, x_2, x_3 \in X$, которые не принадлежат ни одной прямой этой плоскости. Это означает, что $(x_1, x_2, x_3) \notin C$ и C удовлетворяет условию (T₅). $\square$

Тернарное отношение $C \subset X^3$, удовлетворяющее условиям (T₁)—(T₃), будем называть 3-эквивалентностью на множестве X . Более того, 3-эквивалентность называется квазиполной (нетривиальной), если она удовлетворяет условию (T₄) (соответственно условию (T₅)).

Пусть R — некоторое тернарное отношение на множестве X . Подмножество $Y \subset X$ будем называть R -ограниченным, если $Y^3 \subset R$. Легко убедиться, что множество M всех R -ограниченных множеств так упорядочено отношением теоретико-множественного включения, что выполняются следующие условия:

- 1) объединение любой цепи упорядоченного множества M является элементом M ,

- 2) любое R -ограниченное множество содержится в максимальном R -ограниченном множестве.

Лемма 2. Пусть X — непустое множество, R — нетривиальная квазиполная 3-эквивалентность на множестве X и L — множество всех максимальных R -ограниченных множеств. Тогда алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ является плоскостью с отношением коллинеарности $C(\Pi) = R$. При этом плоскость $\Pi = (X, L)$ в том и только том случае будет проективной, если отношение R удовлетворяет условию

- (Т_Р) для любых элементов $x_i \in X$ ($i = \overline{1,4}$) из условий $(x_1, x_1, x_2) \in R$, $(x_3, x_3, x_4) \in R$ следует существование такого $x \in X$, что $(x_1, x_2, x) \in R$, $(x_3, x_4, x) \in R$.

Плоскость $\Pi = (X, L)$ в том и только том случае будет аффинной, если отношение R удовлетворяет условию

- (Т_А) для любых элементов $x, x_1, x_2 \in X$, удовлетворяющих условию $(x, x_1, x_2) \notin R$, существует такой $y \in X$, что $(x, y, z) \notin R$ для всех $z \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, z) \in R$, и для любого $u \in X$, удовлетворяющего условию $(x, y, u) \notin R$, найдётся такой $v \in X$, что $(x_1, x_2, v), (x, u, v) \in R$.

Доказательство. Из свойства (Т₁) следует, что для любых различных элементов $x, y \in X$ выполняется условие $(x, x, y) \in R$. Тогда по свойству (Т₂) множество $\{x, y\}$ является R -ограниченным и, значит, включается в некоторое максимальное R -ограниченное множество $l \in L$. Предположим, что некоторое множество $l_1 \in L$ также содержит элементы x, y . Пусть для некоторых элементов $z, w \in X$ выполняются условия $z \in l, w \in l_1$. Тогда $(x, y, z) \in R, (w, x, y) \in R$ и по свойствам (Т₂), (Т₃) множества $\{x, y, z, w\}, l_1 \cup \{z\}, l \cup \{w\}$ являются R -ограниченными. Так как $l_1 \subset l_1 \cup \{z\}$, то из максимальной R -ограниченности множества l_1 следует, что $l_1 \cup \{z\} = l_1$, и значит, $z \in l_1$. Отсюда в силу произвольности выбора элемента $z \in l$ следует, что выполняется условие $l \subset l_1$. Аналогично из включения $l \subset l \cup \{w\}$ и максимальной R -ограниченности множества l следует, что $l \cup \{w\} = l, w \in l$, и в силу произвольности выбора элемента $w \in l_1$ выполняется условие $l_1 \subset l$. Таким образом, справедливо равенство $l = l_1$, и алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ удовлетворяет условию (А₁).

Пусть l — максимальное R -ограниченное множество из L . Так как из свойства (Т₁) следует, что любое максимальное R -ограниченное множество содержит по крайней мере два различных элемента, то для некоторых $x_1, x_2 \in X, x_1 \neq x_2$, выполняется условие $x_1, x_2 \in l$. Тогда по свойству (Т₄) найдётся такой элемент $x_3 \in X$, что $x_3 \neq x_1, x_3 \neq x_2$ и $(x_1, x_2, x_3) \in R$. По свойствам (Т₂), (Т₃) множество $\{x_1, x_2, x_3\}$ является R -ограниченным и, значит, включается в максимальное R -ограниченное множество $l_1 \in L$. Так как $x_1, x_2 \in l \cap l_1$, то из уже доказанного свойства (А₁) следует, что $l = l_1$. Следовательно, R -ограниченное множество l содержит по крайней мере три точки x_1, x_2, x_3 , и значит, алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ удовлетворяет условию (А₂).

Из свойств (T_1) , (T_5) следует, что существуют три таких элемента $x_1, x_2, x_3 \in X$, что $(x_1, x_2, x_3) \notin R$. Тогда множество $\{x_1, x_2, x_3\}$ не является R -ограниченным и, значит, не содержится ни в одном из максимальных R -ограниченных множеств. Значит, элементы x_1, x_2, x_3 не принадлежат ни одному из множеств $l \in L$, и алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ удовлетворяет условию (A_3) .

Таким образом, алгебраическая система $\Pi = (X, L)$ является плоскостью и по построению выполняется $C(\Pi) = R$. Легко убедиться, что такая плоскость $\Pi = (X, L)$ в том и только том случае будет проективной (аффинной), если отношение R удовлетворяет условию (T_P) (соответственно условию (T_A)). $\square$

Для автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ на множествах X, Y определим канонические тернарные отношения R_X, R_Y по следующим формулам: упорядоченная тройка $(a_1, a_2, a_3) \in X^3$ ($(a_1, a_2, a_3) \in Y^3$) в том и только том случае принадлежит отношению R_X (соответственно отношению R_Y), если для любых различных элементов $x_1, x_2, x_3 \in X$ найдётся такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняется равенство $\delta_s(x_i) = a_i$ (соответственно $\lambda_s(x_i) = a_i$).

Лемма 3. Для любого автомата $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ канонические отношения R_X, R_Y обладают следующим свойством:

$$\delta_s^3(R_X) \subset R_X, \quad \lambda_s^3(R_X) \subset R_Y \quad \text{для любого символа } s \in S.$$

Доказательство. Пусть $(a_1, a_2, a_3) \in R_X$ и для некоторого символа $s \in S$ выполняются равенства $\delta_s(a_i) = b_i$ ($\lambda_s(a_i) = c_i$) при всех $i = \overline{1, 3}$. Тогда для любых различных элементов $x_1, x_2, x_3 \in X$ найдётся такой символ $t \in S$, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняется равенство $\delta_t(x_i) = a_i$ (соответственно $\lambda_t(x_i) = a_i$). Так как для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняются равенства $\delta_{ts}(x_i) = \delta_s(\delta_t(x_i)) = \delta_s(a_i) = b_i$ (соответственно $\lambda_{ts}(x_i) = \lambda_s(\lambda_t(x_i)) = \lambda_s(a_i) = c_i$) то по определению получаем, что $(b_1, b_2, b_3) \in R_X$ (соответственно $(c_1, c_2, c_3) \in R_Y$). $\square$

Лемма 4. Для любых плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$, $\Pi_Y = (Y, L_Y)$ канонические тернарные отношения R_X, R_Y универсального планарного автомата $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ обладают следующими свойствами:

- 1) $R_X = C(\Pi_X)$, $R_Y = C(\Pi_Y)$;
- 2) отображение $\psi: X \rightarrow Y$ в том и только том случае будет гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость Π_Y , если выполняется $\psi^3(R_X) \subset (R_Y)$.

Доказательство. По определению отношения коллинеарности $C(\Pi_X)$ для любых точек $x_1, x_2, x_3 \in X$ условие $(x_1, x_2, x_3) \in C(\Pi_X)$ выполняется тогда и только тогда, когда точки x_1, x_2, x_3 коллинеарны, т. е. принадлежат некоторой прямой $l \in L$. В этом случае любое отображение $\varphi: X \rightarrow l$ является эндоморфизмом плоскости Π_X и по определению канонических отношений выполняется условие $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$. Следовательно, $C(\Pi_X) \subset R_X$. По аналогии выполняется $C(\Pi_Y) \subset R_Y$.

С другой стороны, по свойствам (A_1) , (A_2) в плоскости Π_X существуют различные точки $q_1, q_2, q_3 \in X$, принадлежащие одной прямой $l \in L$. Тогда для любых точек $x_1, x_2, x_3 \in X$ условие $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$ означает, что существует такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняется равенство $\delta_s(q_i) = x_i$. Следовательно, точки x_1, x_2, x_3 должны быть коллинеарны в плоскости Π_X , и по определению $(x_1, x_2, x_3) \in C(\Pi_X)$. Таким образом, $R_X \subset C(\Pi_X)$ и выполняется равенство $R_X = C(\Pi_X)$.

Условие $(y_1, y_2, y_3) \in R_Y$ означает, что существует такой символ $s \in S$, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняется равенство $\lambda_s(q_i) = y_i$. Следовательно, точки y_1, y_2, y_3 должны быть коллинеарны в плоскости Π_Y , и по определению $(y_1, y_2, y_3) \in C(\Pi_Y)$. Таким образом, $R_Y \subset C(\Pi_Y)$ и выполняется равенство $R_Y = C(\Pi_Y)$.

Пусть $\psi: X \rightarrow Y$ — гомоморфизм плоскости Π_X в плоскость Π_Y и $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$. Тогда в силу уже доказанного свойства 1) выполняется $(x_1, x_2, x_3) \in C(\Pi_X)$. Кроме того, по определению в плоскости Π_X найдётся такая прямая $l \in L$, что $x_1, x_2, x_3 \in l$, и в плоскости Π_Y найдётся такая прямая $l' \in L_Y$, что $\psi(l) \subset l'$. Следовательно, $\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3) \in l'$, и по определению $(\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3)) \in C(\Pi_Y)$. Тогда в силу 1) имеем, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x_3)) \in R_Y$.

С другой стороны, пусть отображение $\psi: X \rightarrow Y$ удовлетворяет условию $\psi^3(R_X) \subset R_Y$ и l — некоторая прямая плоскости Π_X . Если ψ — постоянное отображение множества l в одну точку $y \in Y$, то очевидно, что $\psi(l)$ включается в любую прямую l' плоскости Π_Y , проходящую через точку y . Если же найдутся такие точки $x_1, x_2 \in l$, что $\psi(x_1) \neq \psi(x_2)$, то по свойству (A_1) в плоскости Π_Y точки $\psi(x_1), \psi(x_2)$ принадлежат одной и только одной прямой $l' \in L_Y$. Тогда для любой точки $x \in X$ условие $x \in l$ равносильно тому, что $(x_1, x_2, x) \in C(\Pi_X)$, и для любой точки $y \in Y$ условие $y \in l'$ равносильно тому, что $(\psi(x_1), \psi(x_2), y) \in C(\Pi_Y)$. Так как в силу свойства 1) выполняется $\psi^3(C(\Pi_X)) \subset C(\Pi_Y)$, то из условия $x \in l$ следует, что $(x_1, x_2, x) \in C(\Pi_X)$, $(\psi(x_1), \psi(x_2), \psi(x)) \in C(\Pi_Y)$, $\psi(x) \in l'$. Следовательно, $\psi(l) \subset l'$, и отображение ψ является гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость Π_Y . $\square$

Теорема. Пусть $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ — автомат без равнодействующих входных символов. Тогда A в том и только том случае будет универсальным планарным автоматом $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ для некоторых плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$ и $\Pi_Y = (Y, L_Y)$, если канонические отношения R_X, R_Y этого автомата являются нетривиальными квазиполными 3-эквивалентностями соответственно на множествах X, Y и выполняется следующее условие: если для отображений $f_1: X \rightarrow X, f_2: X \rightarrow Y$ при любых значениях $x_1, x_2, x_3 \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta_s(x_i)$ и $f_2(x_i) = \lambda_t(x_i)$ для всех $i = \overline{1, 3}$, то найдётся такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta_a(x)$ и $f_2(x) = \lambda_a(x)$ для всех $x \in X$.

Доказательство. Допустим, что $A = \text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ для некоторых плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$ и $\Pi_Y = (Y, L_Y)$. Тогда $S = S(\Pi_X, \Pi_Y)$ и по леммам 1, 4

канонические отношения R_X, R_Y автомата A являются нетривиальными квазиполными 3-эквивалентностями на множествах X, Y соответственно. Более того, пусть для отображений $f_1: X \rightarrow X, f_2: X \rightarrow Y$ при любых значениях $x_1, x_2, x_3 \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$, существуют такие символы $s, t \in S$, что $f_1(x_i) = \delta_s(x_i)$ и $f_2(x_i) = \lambda_t(x_i)$ для всех $i = \overline{1, 3}$. Так как по лемме 3 $\delta_s^3(R_X) \subset R_X$ и $\lambda_t^3(R_X) \subset R_Y$, то $(f_1(x_1), f_1(x_2), f_1(x_3)) \in R_X$ и $(f_2(x_1), f_2(x_2), f_2(x_3)) \in R_Y$. Следовательно, $f_1^3(R_X) \subset R_X, f_2^3(R_X) \subset R_Y$, и по лемме 4 отображение f_1 является эндоморфизмом плоскости Π_X , а отображение f_2 — гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость Π_Y . По определению автомата $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ вектор-функция $a = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе входных символов S и удовлетворяет условиям $f_1(x) = \delta_a(x), f_2(x) = \lambda_a(x)$ при всех $x \in X$.

Обратно, предположим, что автомат без равнодействующих входных символов $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ имеет канонические отношения R_X, R_Y , удовлетворяющие условиям теоремы. Тогда отношения R_X, R_Y являются нетривиальными квазиполными 3-эквивалентностями соответственно на множествах X, Y и по лемме 2 существуют такие плоскости $\Pi_X = (X, L_X), \Pi_Y = (Y, L_Y)$, что $R_X = C(\Pi_X)$ и $R_Y = C(\Pi_Y)$. Более того, по лемме 3 для любого символа $s \in S$ выполняются условия $\delta_s^3(R_X) \subset R_X, \lambda_s^3(R_X) \subset R_Y$ и по лемме 4 отображение δ_s является эндоморфизмом плоскости Π_X , а отображение λ_s — гомоморфизмом плоскости Π_X в плоскость Π_Y . Следовательно, $(\delta_s, \lambda_s) \in S(\Pi_X, \Pi_Y)$. Так как для автомата без равнодействующих входных символов входной символ s отождествляется с вектор-функцией (δ_s, λ_s) , то выполняется включение $S \subset S(\Pi_X, \Pi_Y)$.

С другой стороны, если вектор-функция $f = (f_1, f_2)$ принадлежит полугруппе $S(\Pi_X, \Pi_Y)$, то по лемме 4 выполняются условия $f_1^3(R_X) \subset R_X$ и $f_2^3(R_X) \subset R_Y$. Тогда для любых трёх точек $x_1, x_2, x_3 \in X$, удовлетворяющих условию $(x_1, x_2, x_3) \in R_X$, выполняется $(f_1(x_1), f_1(x_2), f_1(x_3)) \in R_X$ и $(f_2(x_1), f_2(x_2), f_2(x_3)) \in R_Y$. По определению канонических отношений R_X, R_Y найдутся такие символы $s, t \in S$, что для каждого $i = \overline{1, 3}$ выполняются равенства $f_1(x_i) = \delta_s(x_i), f_2(x_i) = \lambda_t(x_i)$. Следовательно, по условию теоремы найдётся такой символ $a \in S$, что $f_1(x) = \delta_a(x)$ и $f_2(x) = \lambda_a(x)$ для всех $x \in X$. Это означает, что $f_1(x) = \delta_a$ и $f_2(x) = \lambda_a$. Так как для автомата без равнодействующих входных символов входной символ a отождествляется с вектор-функцией (δ_a, λ_a) , то $f = a$ и выполняется включение $S(\Pi_X, \Pi_Y) \subset S$.

Таким образом, $S = S(\Pi_X, \Pi_Y)$ и $A = \text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$. Теорема доказана. $\square$

Следствие. Пусть $A = (X, S, Y, \delta, \lambda)$ — автомат без равнодействующих входных символов. Тогда A в том и только том случае будет универсальным планарным автоматом $\text{Atm}(\Pi_X, \Pi_Y)$ для некоторых проективных (аффинных) плоскостей $\Pi_X = (X, L_X)$ и $\Pi_Y = (Y, L_Y)$, если канонические отношения R_X, R_Y этого автомата удовлетворяют условиям предыдущей теоремы и свойству (T_P) (соответственно свойству (T_A)).

Заключение

В работе главным инструментом решения проблемы конкретной характеристики универсальных планарных автоматов являются канонические отношения автоматов. Можно показать, что эти отношения определяются формулами логики первого порядка в полугруппах входных сигналов таких автоматов. На основе этого свойства можно доказать относительно элементарную определённость универсальных планарных автоматов в классе полугрупп [1], получить абстрактную характеристику таких автоматов [9] и исследовать взаимосвязь между элементарными свойствами универсальных планарных автоматов и их полугрупп входных символов.

Литература

- [1] Ершов Ю. Л. Проблемы разрешимости и конструктивные модели. — М.: Наука, 1980.
- [2] Лендер В. Б. Об эндоморфизмах проективных геометрий // Исследования алгебраических систем (Мат. записки Урал. ун-та). — Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1984. — С. 48—50.
- [3] Молчанов В. А. Как проективные плоскости определяются своими полугруппами // Теория полугрупп и её приложения. Полугруппы и связанные с ними алгебраические системы. — Саратов: Саратов. гос. ун-т, 1984. — С. 42—50.
- [4] Плоткин Б. И., Гринглаз Л. Я., Гварамия А. А. Элементы алгебраической теории автоматов. — М.: Высшая школа, 1994.
- [5] Свердловская тетрадь: Сборник нерешённых проблем теории полугрупп. — Свердловск: Урал. гос. ун-т, 1979.
- [6] Улам С. Нерешённые математические задачи. — М.: Наука, 1964.
- [7] Хартсхорн Р. Основы проективной геометрии. — М.: Мир, 1970.
- [8] Clifford A. H., Preston G. B. The Algebraic Theory of Semigroups. Vol. I. — Providence: Amer. Math. Soc., 1964.
- [9] Jónsson B. Topics in Universal Algebra: Lect. Notes, Vanderbilt Univ., 1969—1970.
- [10] Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155—199.
- [11] Molchanov V. A. A universal planar automaton is determined by its semigroup of input symbols // Semigroup Forum. — 2011. — Vol. 82. — P. 1—9.