Собственная метрика на группоидах и её приложение к анализу межклеточных взаимодействий в биологии

М. Н. НАЗАРОВ
Национальный исследовательский университет «МИЭТ»
e-mail: Nazarov-Maximilian@yandex.ru

УДК 512.548+519.710.22

Ключевые слова: математическое моделирование, межклеточные взаимодействия, конечные группоиды, метрика.

Аннотация

Рассматривается приложение конечных группоидов в биологии для моделирования взаимодействия живых клеток. Для данного приложения на основе общего вида таблицы Кэли группоидов были построены специальные числовые характеристики для элементов группоидов. В частности, была построена собственная метрика на группоидах, которая позволила проанализировать и описать малые вариации таблицы Кэли группоидов.

Abstract

M. N. Nazarov, A self-induced metric on groupoids and its application to the analysis of cellular interactions in biology, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 149—160.

The application of finite groupoids to the modeling of the interaction of living cells in biology is considered. For this application, special numerical characteristics for groupoid elements based on the general form of the Cayley table of groupoids were established. In particular, a self-induced metric on groupoids was constructed to analyze and describe small variations in the Cayley tables of groupoids.

1. Введение

Пусть для некоторого организма нам известно множество типов клеток D, которые могут существовать в рамках данного организма (примеры типов клеток: мышечные, нервные, кровяные и т. д.). Тогда это множество типов D можно считать группоидом, на котором определена операция вида

$a \cdot b = c$ тогда и только тогда, когда клетки типа a под действием сигналов от клеток типа b будут стремиться сменить свой тип на c.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 149—160.

Подобное описание межклеточной коммуникации будет неполным, так как не учитывает ни относительных приоритетов сигнальных воздействий, ни влияние сигналов на скорость деления клеток (подробнее см. [5]).

Для практического применения группоида в качестве параметра математической модели в первую очередь встаёт вопрос о поиске малых вариаций группоида, чтобы получить возможность итерационного изменения группоида в рамках задачи оптимизации. Ввести понятие малой вариации группоидов можно на основе метрики, определённой на элементах группоида. Однако для того чтобы подобная метрика была адекватно связана с операцией на группоиде, требуется в первую очередь рассмотреть вопрос о согласовании операции и метрических (топологических) структур на группоидах. Взаимосвязи операции на группоиде с метриками и топологическими структурами посвящено относительно небольшое количество работ (см. [3]). Однако в данной работе эта взаимосвязь понимается в несколько ином смысле, чем в упомянутой статье [3]. Мы будем называть собственными метрики, однозначно определяющиеся операцией умножения на группоиде.

Для построения собственных метрик в данной работе определяются вспомогательные числовые характеристики группоидов: индексы идемпотентности и псевдоотклонения. Значения этих характеристик вычисляются с помощью решения систем линейных уравнений, которые составляются на основе общего вида таблицы Кэли группоида.

2. Индексы идемпотентности

Определение 1. Назовём *индексом идемпотентности* группоида $(D,\cdot)$ функцию $K\colon D \to \mathbb{R}$, которая определяется из системы уравнений

$$2\,K(a) = 2 + \begin{cases} 0, & \text{если } a^2 = a, \\ K(a^2), & \text{если } a^2 \neq a \end{cases} \tag{2.1}$$

(как вариант, при определении индекса идемпотентности можно заменить число 2 на любое другое действительное число $\alpha > 1$).

Согласно данному определению если элемент группоида является идемпотентом ($a^2 = a$), то его индекс будет равен единице: $K(a) = 1$, в противном случае его нужно будет получать из системы уравнений (2.1). Проиллюстрируем поиск индексов идемпотентности на трёх примерах.

Пример 1. У группоида D_1 есть ровно один идемпотент a, и на главной диагонали таблицы Кэли a встречается более одного раза: $a \cdot a = b \cdot b = a$.

D_1	a	b	c
a	a	b	a
b	a	a	c
c	b	a	b

$$\begin{cases} 2\,K(a) = 2, \\ 2\,K(b) = 2 + K(a), \\ 2\,K(c) = 2 + K(b) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} K(a) = 1, \\ K(b) = 1{,}5, \\ K(c) = 1{,}75. \end{cases}$$

Пример 2. У группоида D_2 также имеется только один идемпотент e, но на главной диагонали он встречается ровно один раз, в отличие от D_1.

D_2	e	f	g
e	e	e	e
f	e	g	g
g	e	g	f

$$\begin{cases} 2\,K(e) = 2, \\ 2\,K(f) = 2 + K(g), \\ 2\,K(g) = 2 + K(f) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} K(e) = 1, \\ K(f) = 2, \\ K(g) = 2. \end{cases}$$

Пример 3. Группоид D_3 выберем так, чтобы у него не было ни одного идемпотента, в отличие от двух предыдущих примеров.

D_3	a	b	c
a	b	b	a
b	a	c	b
c	a	a	a

$$\begin{cases} 2\,K(a) = 2 + K(b), \\ 2\,K(b) = 2 + K(c), \\ 2\,K(c) = 2 + K(a) \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} K(a) = 2, \\ K(b) = 2, \\ K(c) = 2. \end{cases}$$

Теорема 1. *Для любого конечного группоида D у системы* (2.1)*, определяющей индекс идемпотентности K, решение существует и единственно. При этом значение индекса K таково, что $1 \leqslant K(a) \leqslant 2$ при всех $a \in D$.*

Доказательство. Отметим, что множество D — унар относительно операции $f(a) = a^2$. (Общая теория унаров описана в [4]. Более подробно о представлении конечных унаров можно прочесть в [1, 6].) Для унаров операцию f можно наглядно представить в виде ориентированного графа: a и b связаны ребром, если $f(a) = b$ (см. пример на рис. 1).

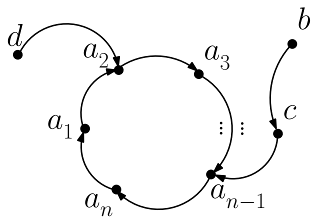

Рис. 1. Представление унарной операции в виде графа

Рассмотрим вначале случай, когда произвольные n элементов группоида D связаны цепочкой соотношений

$$f(a_1) = a_2, \ldots,\ f(a_{n-1}) = a_n,\ f(a_n) = a_1$$

С точки зрения теории унаров такие элементы будут образовывать конечный цикл (см. рис. 1). Данному циклу в однозначное соответствие будет поставлена система

$$\begin{cases} 2\,K(a_1) = 2 + K(a_2), \\ 2\,K(a_2) = 2 + K(a_3), \\ \quad\vdots \\ 2\,K(a_n) = 2 + K(a_1). \end{cases}$$

Очевидно, что решением данной системы будет

$$K(a_1) = \ldots = K(a_n) = 2.$$

Рассмотрим второй случай, когда у группоида есть такой элемент c, который не входит ни в один цикл, но при этом найдётся такое i, что $f(c) = a_i$, где a_i принадлежит циклу, описанному выше. Из уравнения $2K(c) = 2 + K(a_i)$ мы немедленно получим, что $K(c) = 2$. По аналогии если найдётся элемент b, такой что $f(b) = c$, то и для него будет выполняться $K(b) = 2$ (см. рис. 1).

Рассмотрим последний случай, когда элемент группоида D сам является идемпотентом ($f(a) = a$) или же даёт идемпотент при циклическом возведении в квадрат. Если некоторый элемент a является идемпотентом ($f(a) = a$), то по определению мы получаем $K(a) = 1$. Если найдётся элемент $e \neq a$, такой что $f(e) = a$, то из уравнения $2K(b_1) = 2 + K(a)$ мы получим, что $K(b_1) = 1{,}5$. Если продолжить цепочку, то для $(b_2) = b_1$ имеем $K(b_2) = 1{,}75$ и т. д. В общем случае ($f(a) = a$, $a = f(b_1)$, $b_1 = f(b_2), \ldots, b_{n-1} = f(b_n)$) итерационная формула для вычисления индексов идемпотентости будет иметь вид $k_0 = K(a) = 1$ и $k_i = 1 + k_{i-1}/2$, где $k_i = K(b_i)$ для всех $i = \overline{1,n}$. Последовательность $\{k_i\}$ монотонно возрастает и является ограниченной ($k_i < 2$), поэтому для данного случая также выполняется условие $1 \leqslant K(a) \leqslant 2$.

Рассмотренные варианты исчерпывают все возможные случаи, так как любой элемент конечного унара при циклическом применении операции должен будет либо дать на каком-то шаге идептотент, либо войти в цикл. □

3. Псевдоотклонения

Определение 2. Назовём *правым псевдоотклонением* конечного группоида $(D, \cdot)$ функцию $\delta_R\colon D \times D \to \mathbb{R}$, определяющуюся из системы линейных уравнений ($|D| = n$)

$$\begin{cases} \delta_R(a,a) = 0 \text{ для каждого } a \in D, \\ \pi n\, \delta_R(a,b) = \pi n + \sum\limits_c K(c)\, \delta_R(a\cdot c,\, b\cdot c) \begin{cases} \sqrt{2}, & \text{если } a\cdot c = b, \\ 1, & \text{если } a \cdot c \neq b \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

(вместо $\sqrt{2}$ можно взять любое число $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, а вместо π — любое число, трансцендентное над полем($\mathbb{Q}(a)$).

Определение 3. *Левое псевдоотклонение* $\delta_L\colon D \times D \to \mathbb{R}$ определяется аналогично правому с точностью до замены $a \cdot c$ на $c \cdot a$ и $b \cdot c$ на $c \cdot b$.

Проиллюстрируем определение псевдоотклонений на примерах.

Пример 1. Полугруппы с нулевым умножением: $a \cdot b = \theta$ при всех a, b, где $\theta \in D$ — нуль полугруппы. Для любой такой полугруппы решение системы (3.1) будет тривиальным и сведётся к набору прямых формул для псевдоотклоенний. В результате для каждого $a \neq b$ имеем $\delta_L(a,b) = \delta_R(a,b) = 1$.

Пример 2. Полугруппы левых нулей: $a \cdot b = a$ при всех $a, b \in D$. Как и прежде, $|D| = n$. Поскольку все элементы полугруппы являются идемпотентами, то $K(a) = 1$ при всех $a \in D$. Для данной полугруппы система для δ_L решается так же тривиально, как и в первом примере, и получается, что $\delta_L(a,b) = 1$ при всех $a \neq b$. Решая систему (3.1) для данной полугруппы, получим $\delta_R(a,b) = \pi/(\pi - 1)$ при всех $a \neq b$.

Пример 3. Выберем для примера двухэлементный группоид D общего вида:

$$\begin{array}{c|cc} D & a & b \\ \hline a & a & b \\ b & b & b \end{array} \qquad \begin{cases} K(a) = 1, \\ K(b) = 1 \end{cases} \to \begin{cases} 2\pi\delta_R(a,b) = 2\pi + \delta_R(a,b), \\ 2\pi\delta_R(b,a) = 2\pi + \delta_R(b,a) \end{cases} \to \begin{cases} \delta_R(a,b) = \frac{2\pi}{(2\pi-1)}, \\ \delta_R(b,a) = \frac{2\pi}{(2\pi-1)}. \end{cases}$$

Теорема 2. *Системы уравнений для псевдоотклонений δ_R и δ_L разрешимы для любого конечного группоида D.*

Доказательство. Искомые значения $\delta_R(a,b), \delta_R(a,c), \ldots$, являющиеся решениями системы (3.1), для сокращения записи будем обозначать как $x_1, x_2, \ldots, x_k$, где $k = n^2$. Используя также сокращённые обозначения $a_{i\,j}$ и l_j для коэффициентов системы, можно переписать (3.1) в виде

$$\begin{cases} \pi n \cdot x_1 = \pi n + l_1 \cdot x_1 + a_{1\,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1\,k} \cdot x_k, \\ \pi n \cdot x_2 = \pi n + a_{2\,1} \cdot x_1 + l_2 \cdot x_2 + \ldots + a_{2\,k} \cdot x_k, \\ \quad \vdots \\ \pi n \cdot x_k = \pi n + a_{k\,1} \cdot x_1 + a_{k\,2} \cdot x_2 + \ldots + l_k \cdot x_k. \end{cases}$$

Заметим, что индексы идемпотентности K могут быть только рациональными числами, так как у системы (2.1) коэффициенты и свободные члены являются натуральными. В результате числа $l_1, \ldots, l_n$ будут обязательно рациональными, а остальные коэффициенты $a_{i\,j}$ при $i \neq j$ будут либо рациональными числами, либо числами, представимыми в виде $a_{i\,j} = q_{ij}\sqrt{2}$, где $q_{ij} \in \mathbb{Q}$. Упростим систему (3.1) и приведём её к каноническому виду:

$$\begin{cases} (l_1 - \pi n) \cdot x_1 + a_{1\,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1\,k} \cdot x_k = -\pi n, \\ a_{2\,1} \cdot x_1 + (l_2 - \pi n) \cdot x_2 + \ldots + a_{2\,k} \cdot x_k = -\pi n, \\ \quad \vdots \\ a_{k\,1} \cdot x_1 + a_{k\,2} \cdot x_2 + \ldots + (l_k - \pi n) \cdot x_k = -\pi n. \end{cases}$$

В результате определитель системы (3.1) в общем случае будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} l_1 - \pi n & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,k} \\ a_{2\,1} & l_2 - \pi n & \ldots & a_{2\,k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ a_{k\,1} & a_{k\,2} & \ldots & l_k - \pi n \end{vmatrix} = (l_1 - \pi n)(l_2 - \pi n) \ldots (l_k - \pi n) + \ldots . \qquad (3.2)$$

Как уже было отмечено выше, согласно определению системы (3.1) для любых i, j имеем, что $l_j \in \mathbb{Q}$ и $a_{i\,j} \in \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}\sqrt{2}$, и, как следствие, ни один из коэффициентов не является кратным числу π. В результате в итоговой сумме для определителя (3.2) будет ровно одно слагаемое вида $(-1)^k n^k \pi^k$. Во всех остальных слагаемых из (3.2) степень π будет заведомо ниже k, и следовательно, они будут несократимы с этим слагаемым, а сам определитель (3.2) гарантированно отличен от нуля.

Аналогично доказывается и тот факт, что определитель системы для δ_L будет также всегда отличен от нуля. □

Теорема 3. *Для любых элементов a, b конечного группоида D выполняются условия, что $\delta_R(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$, и $\delta_L(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$.*

Доказательство. Искомые значения $\delta_R(a,b), \delta_R(a,c), \ldots,$ являющиеся решениями системы (3.1), для сокращения записи будем обозначать как $x_1, x_2, \ldots, x_k$, где $k = n^2$. Мы можем переписать систему (3.1) в виде

$$\begin{cases} (l_1 - \pi n) \cdot x_1 + a_{1\,2} \cdot x_2 + \ldots + a_{1\,k} \cdot x_k = -\pi n, \\ a_{2\,1} \cdot x_1 + (l_2 - \pi n) \cdot x_2 + \ldots + a_{2\,k} \cdot x_k = -\pi n, \\ \quad \vdots \\ a_{k\,1} \cdot x_1 + a_{k\,2} \cdot x_2 + \ldots + (l_k - \pi n) \cdot x_k = -\pi n. \end{cases}$$

Предположим, что мы хотим вычислить по правилу Крамера значения первой переменной x_1 в этой системе. В этом случае для системы уравнений (3.1) определитель с первым столбцом, замещённым столбцом свободных членов, будет иметь вид

$$\begin{vmatrix} -\pi n & a_{1\,2} & \ldots & a_{1\,k} \\ -\pi n & l_2 - \pi n & \ldots & a_{2\,k} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ -\pi n & a_{k\,2} & \ldots & l_k - \pi n \end{vmatrix} = -\pi n (l_2 - \pi n) \ldots (l_k - \pi n) + \ldots .$$

После раскрытия определителя в общей сумме будет опять же только одно слагаемое с π^k, в точности равное $(-1)^k n^k \pi^k$. Во всех остальных слагаемых степень π будет заведомо ниже k, и, как следствие, они будут несократимы с этим слагаемым ввиду специального вида системы (3.1), как и в доказательстве предыдущей теоремы. □

Теорема 4. *Для любых двух конечных группоидов D_1 и D_2 одного порядка псевдоотклонения δ_R (δ_L) совпадают в том и только том случае, если системы для их определения $A_1 \overline{\delta_R^{D_1}} = b_1$ и $A_2 \overline{\delta_R^{D_2}} = b_2$ полностью совпадают: $A_1 = A_2$ и $b_1 = b_2$.*

Доказательство. Допустим, у двух группоидов D_1 и D_2 одинаковые δ_R. Это возможно только в том случае, если системы для определения δ_R двух группоидов D_1 и D_2 имеют одинаковые решения. Такие системы называются эквивалентными, а в матричном виде мы можем записать это факт как $A_1 \cdot \overline{\delta_R^{D_1}} = b_1$ и $A_2 \cdot \overline{\delta_R^{D_2}} = b_2$, где $A_1 = \lambda A_2$ и $b_1 = \lambda b_2$. Поскольку группоиды конечные и $|D_1| = |D_2| = n$, то согласно определению 2 такое равенство может выполняться только для $\lambda = 1$, иначе в столбце свободных членов одной из систем будут стоять коэффициенты, отличные от $-\pi n$. В результате мы получаем, что $A_1 = A_2$ и $b_1 = b_2$. $\square$

В качестве непосредственного следствия заметим, что одинаковые значения для δ_R (δ_L) могут быть получены лишь для группоидов, таблицы Кэли которых будут подобны с точностью до переобозначения переменных в системе (3.1). Отметим, что данное свойство не требует, чтобы группоиды обязательно были изоморфны (контрпример для $D_1 \not\cong D_2$ приведён ниже).

$$\begin{array}{c|ccc} D_1 & a & b & c \\ \hline a & b & a & b \\ b & b & a & a \\ c & a & a & b \end{array} \not\cong \begin{array}{c|ccc} D_2 & a & b & c \\ \hline a & b & a & b \\ b & a & a & b \\ c & b & a & a \end{array}$$

В примере таблица Кэли группоида D_1 получается перестановкой двух строк у таблицы Кэли группоида D_2 (данное отношение в теории луп и квазигрупп принято называть изотопией, см. [2]).

4. Собственные метрики группоидов

Определение 4. Назовём *левой собственной метрикой* ρ_L группоида величину, определённую формулами $\rho_L(a,a) = 0$ и

$$\rho_L(a,b) = \sum_c |K(a)\delta_L(a,c) - K(b)\delta_L(b,c)| + |K(b)\delta_L(c,b) - K(a)\delta_L(c,a)| + \\ + \sum_c |K(a)\delta_L(a \cdot c, c \cdot a) - K(b)\delta_L(b \cdot c, c \cdot b)| \quad (a \neq b). \quad (4.1)$$

Определение 5. *Правая собственная метрика* определяется аналогично левой с точностью до замены δ_L на δ_R.

Проиллюстрируем определение собственных метрик на примерах, которые были приведены для псевдоотклонений.

Пример 1. Рассмотрим полугруппу D с нулевым умножением $a \cdot b = \theta$, где a и b любые, а θ — нуль полугруппы. Очевидно, что для такой полугруппы мы получим индексы $K(\theta) = 1$ и $K(a) = 1{,}5$ для всех $a \neq \theta$, так как $a^2 = \theta$. В первом примере предыдущего раздела мы установили, что $\delta_L(a,b) = \delta_R(a,b) = 1$ для всех $a, b \in D$. Тогда для всех $a \neq b \neq \theta$ для левой метрики имеем

$$\rho_L(a,b) = |K(a)\delta_L(a,b)| + |K(b)\delta_L(b,a)| + |K(b)\delta_L(a,b)| + |K(a)\delta_L(b,a)| = \\ = 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 + 1{,}5 = 6.$$

Аналогично $\rho_R(a,b) = 6$.

Точно так же для любого a имеем

$$\rho_L(a,\theta) = |K(a)\delta_L(a,\theta)| + |K(\theta)\delta_L(\theta,a)| + \\ + \sum_{c\neq a,\theta} |K(a)\delta_L(a,c) - K(\theta)\delta_L(\theta,c)| + |K(\theta)\delta_L(a,\theta)| + |K(a)\delta_L(\theta,a)| + \\ + \sum_{c\neq a,\theta} |K(\theta)\delta_L(c,\theta) - K(a)\delta_L(c,a)| = 2\{1{,}5 + 1 + (n-2)(1{,}5-1)\} = n+3.$$

Для наглядной иллюстрации данного результат на рис. 2 показаны метрики для $n = 3$ и $n = 4$ полугрупп с нулевым умножением.

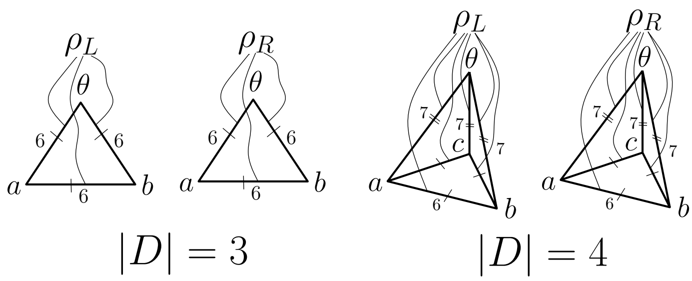

Рис. 2. Собственные метрики для полугрупп с нулевым умножением

Пример 2. Рассмотрим полугруппу левых нулей D порядка n. Поскольку все элементы этой полугруппы идемпотенты, то $K(a) = 1$ при всех $a \in D$. Используя результат из примера 2 предыдущего раздела о том, что $\delta_L(a,b) = 1$ и $\delta_R(a,b) = \pi/(\pi-1)$ при $a \neq b$, мы можем рассчитать метрики по формулам (4.1) следующим образом:

$$\rho_L(a,b) = |K(a)\delta_L(a,b)| + |K(b)\delta_L(b,a)| + \\ + |K(a)\delta_L(ab,ba)| + |K(b)\delta_L(ba,ab)| = 4.$$

Аналогично рассчитывается и метрика ρ_L (с учётом того, что $K(a) = 1$ при всех a):

$$\rho_R(a,b) = |\delta_R(a,b)| + |\delta_R(b,a)| + |\delta_R(ab,ba)| + |\delta_R(ba,ab)| = \frac{4\pi}{\pi-1}.$$

Теорема 5. *Собственные метрики ρ_L и ρ_R являются метриками на любом конечном группоиде D.*

Доказательство. Очевидно, что $\rho_L \geqslant 0$ и $\rho_R \geqslant 0$. Покажем, что для них $\rho_R(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$ ($\rho_L(a,b) = 0$ тогда и только тогда, когда $a = b$).

Предположим, что $\rho_R(a,b)=0$. В этом случае мы получаем три тождества:

$$\sum_c |K(a)\delta_R(a,c)-K(b)\delta_R(b,c)| = 0 = \sum_c |K(b)\delta_R(c,b)-K(a)\delta_R(c,a)|,$$

$$\sum_c |K(a)\delta_R(a\cdot c, c\cdot a)-K(b)\delta_R(b\cdot c, c\cdot b)| = 0.$$

Первое тождество можно упростить, выделив слагаемые для $c=a$ и $c=b$:

$$|K(a)\delta_R(a,b)|+|K(b)\delta_R(a,b)|+\sum_{c\neq a,b}|K(a)\delta_R(a,c)-K(b)\delta_R(b,c)|=0.$$

Три неотрицательных слагаемых дают ноль в сумме только тогда, когда все они равны нулю. Отсюда получаем $|K(a)\delta_R(a,b)|=0$, что с учётом теорем 2 и 4 даёт $a=b$. Аналогично можно доказать, что $\rho_L(a,b)=0$ тогда и только тогда, когда $a=b$. Таким образом, для ρ_L и ρ_R будет выполняться первая аксиома метрики.

Выполнение аксиомы симметричности очевидно следует из симметричности определения (4.1) относительно перестановки a и b.

Для проверки неравенства треугольника можно выписать следующие преобразования (используются свойства модуля):

$$\sum_x |K(a)\delta_L(ax,xa)-K(b)\delta_L(xb,bx)| + \sum_x |K(b)\delta_L(bx,xb)-K(c)\delta_L(xc,cx)| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_x |K(a)\delta_L(ax,xa)-K(b)\delta_L(xb,bx)+K(b)\delta_L(bx,xb)-K(c)\delta_L(xc,cx)| =$$
$$= \sum_x |K(a)\delta_L(ax,xa)-K(c)\delta_L(xc,cx)|,$$

$$\sum_x |K(a)\delta_L(a,x)-K(b)\delta_L(b,x)| + \sum_x |K(b)\delta_L(b,x)-K(c)\delta_L(c,x)| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_x |K(a)\delta_L(a,x)-K(b)\delta_L(b,x)+K(b)\delta_L(b,x)-K(c)\delta_L(c,x)| =$$
$$= \sum_x |K(a)\delta_L(a,x)-K(c)\delta_L(c,x)|,$$

$$\sum_x |K(a)\delta_L(x,a)-K(b)\delta_L(x,b)| + \sum_x |K(b)\delta_L(x,b)-K(c)\delta_L(x,c)| \geqslant$$
$$\geqslant \sum_x |K(a)\delta_L(x,a)-K(b)\delta_L(x,b)+K(b)\delta_L(x,b)-K(c)\delta_L(x,c)| =$$
$$= \sum_x |K(a)\delta_L(x,a)-K(c)\delta_L(x,c)|.$$

Объединяя эти три неравенства в одно, мы получаем требуемое неравенство треугольника: $\rho_L(a,b)+\rho_L(b,c)\geqslant\rho_L(a,c)$. Неравенство треугольника для метрики ρ_R доказывается аналогично. □

Заключение

Как уже было отмечено во введении, основным практическим приложением теории собственной метрики для группоидов является моделирование взаимодействий клеток в биологии. Выбрав в качестве D множество типов клеток и определив операцию по закону

$a \cdot b = c$ тогда и только тогда, когда клетки типа a под действием сигналов от клеток типа b будут стремиться сменить свой тип на c,

мы можем с помощью собственной метрики на группоиде D проанализировать, насколько близки одни типы клеток к другим. На основании этих данных можно осуществить визуализацию клеточной томограммы в виде цветного трёхмерного скопления клеток. (Мы можем присваивать клеточным типам цветовые коды на основе их близости относительно собственной метрики.) С точки зрения математического моделирования использование D в качестве параметра позволяет достаточно наглядно представить качественное поведение скоплений клеток. На рис. 3 приведены примеры для двух вариантов группоиов для типов клеток D_1 и D_2

$$\begin{array}{c|ccc} D_1 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \hline \tau_1 & \tau_2 & \tau_1 & - \\ \tau_2 & \tau_3 & - & \tau_2 \\ \tau_3 & \tau_3 & \tau_3 & - \end{array}, \qquad \begin{array}{c|ccc} D_2 & \tau_1 & \tau_2 & \tau_3 \\ \hline \tau_1 & \tau_2 & \tau_1 & - \\ \tau_2 & \tau_3 & \tau_2 & - \\ \tau_3 & \tau_3 & - & \tau_3 \end{array}$$

(прочерки в таблице означают, что воздействие запускает программируемую смерть клеток вместо их деления).

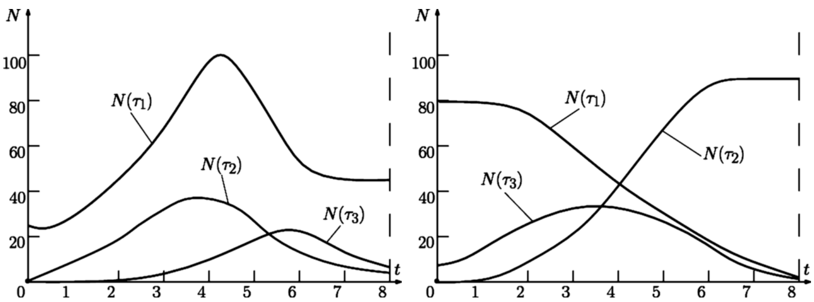

Рис. 3. Пример динамики численностей клеток $N(\tau)$ как функций от типов клеток τ для группоидов D_1 (слева) и D_2 (справа)

Отметим, что подобное описание не является полным, потому что при моделировании также требуется учесть относительную приоритетность сигнальных воздействий, а также влияние сигналов на скорость деления клеток (пример такой модели представлен в [5]).

В общем случае собственная метрика позволяет выбрать для отдельных элементов в таблице Кэли наиболее близкий элемент для замены и тем самым осуществить дискретный аналог отдельного шага градиентного спуска. Естественно, что работать подобная процедура будет лишь в том случае, если метрика однозначно отражает структуру операции на группоиде.

В рамках данной работы путём полного перебора всех различных с точностью до изоморфизма группоидов размеров 2, 3 и 4 было установлено, что набор ρ_L и ρ_R однозначным образом определяет перебранные группоиды. На основании данного результата была выдвинута обобщающая результат гипотеза.

Гипотеза 1. Для любых двух конечных группоидов $D_1 = (D, \cdot)$ и $D_2 = (D, \circ)$ из полного совпадения метрик $\rho_L^{D_1}(a,b) = \rho_L^{D_2}(a,b)$ и $\rho_R^{D_1}(a,b) = \rho_R^{D_2}(a,b)$ на всех элементах $a, b \in D$ следует, что D_1 изоморфен D_2.

Отметим, что перебор производился не по всем возможным таблицам Кэли, а только по тем, которые соответствуют всем неизоморфным группоидам (о числе неизоморфных группоидов см. [7]). Для трёхэлементных группоидов данная процедура сводится к перебору 3 330 заранее заготовленных таблиц, а для четырёхэлементных к перебору 178 981 952 таблиц.

Дополнительно для конечных группоидов до четвёртого порядка было установлено, что $\delta_R(a,b)$ и $\delta_L(a,b)$ лежат в диапазонах от 1 до πn для всех $a \neq b$, а системы для их расчёта будут всегда хорошо определёнными. Это является основанием для обобщающей гипотезы.

Гипотеза 2. Для любого конечного группоида D системы для расчёта $\delta_R(a,b)$ и $\delta_L(a,b)$ будут хорошо определёнными, а решения для всех $a \neq b$ таковы, что

$$1 \leqslant \delta_R(a,b) < \pi n, \quad 1 \leqslant \delta_L(a,b) < \pi n.$$

Для рассмотренных метрик можно дополнительно предложить эквивалентный вариант двусторонней метрики $\rho(a,b) = e \cdot \rho_L(a,b) + \rho_R(a,b)$, где в качестве e можно взять основание натурального логарифма или любое другое число, трансцендентное над полем $\mathbb{Q}(\pi)$. Подобная двусторонняя метрика будет полностью эквивалента набору из двух метрик ρ_R и ρ_L с точки зрения описания операции на группоиде.

Отметим, что в дополнение к использованным числовым характеристикам конечных группоидов при определении метрик можно было использовать и другие. Так, вместо индекса идемпотентности $K(a)$ можно было взять индекс распространённости $\sigma(a) = |\{(b,c)\colon b \cdot c = a\}|$, который равен общему количеству вхождений элемента a в таблицу Кэли группоида.

Автор выражает благодарность И. Б. Кожухову за критические замечания и помощь в корректировке статьи.

Литература

[1] Артамонов В. А. Универсальные алгебры // Итоги науки и техн. Сер. Алгебра. Топол. Геом. — 1989. — Т. 27. — С. 45—124.

[2] Белоусов В. Д. Основы теории квазигрупп и луп. — М.: Наука, 1967.

[3] Граев М. И., Коганов А. В. Геометрические и топологические структуры на группоидах. — М., 2002.

[4] Иванов А. А. Полные теории унаров // Алгебра и логика. — 1984. — Т. 23, № 1. — С. 48—73.

[5] Назаров М. Н. Сосредоточенная модель развития клеточного сообщества с эмуляцией сигнального обмена // Вестн. МГАДА, сер. философ., социал. и естеств. наук. — 2011. — Вып. 5. — С. 150—157.

[6] Расстригин А. Л. Формации конечных унаров // Чебышёвский сб. — 2011. — Т. 12, № 2. — С. 102—109.

[7] Harrison M. A. The number of isomorphism types of finite algebras // Proc. Am. Math. Soc. — 1966. — Vol. 17. — P. 731—737.