Представления типа Гельфанда—Граева для унитреугольной группы*

А. Н. ПАНОВ
Самарский государственный университет
e-mail: apanov@list.ru

УДК 512.547

Ключевые слова: представления унитреугольной группы, метод орбит, алгебра Гекке.

Аннотация

В работе рассматривается аналог представлений Гельфанда—Граева для унитреугольной группы. Получено разложение в сумму неприводимых компонент, доказана однократность вхождения неприводимых компонент, вычислена алгебра Гекке.

Abstract

A. N. Panov, Representations of Gelfand–Graev type for the unitriangular group, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 161—178.

We consider the analog of Gelfand—Graev representations for the unitriangular group. We obtain the decomposition into a sum of irreducible representations, prove that these representations are multiplicity free, and calculate the Hecke algebra.

1. Введение и основные определения

Представления Гельфанда—Граева — это представления группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ (более общо, конечной группы Шевалле), индуцированные с невырожденных характеров максимальной унипотентной подгруппы. Они впервые были рассмотрены в [1, 2]. Было показано, что каждая неприводимая компонента входит в разложение этого представления однократно. Поэтому алгебра G-эндоморфизмов (далее алгебра Гекке) представлений Гельфанда—Граева коммутативна. Базис в алгебре Гекке был построен для случая группы $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ в [2] и позднее для случая конечных групп Шевалле в [7, 17]. Представления Гельфанда—Граева играют важную роль в теории представлений, и их изучение продолжается до сих пор.

В этой работе строится аналог представлений Гельфанда—Граева $V(\lambda)$ для унитреугольной группы. Мы дадим описание неприводимых компонент $V_{S,a}(\lambda)$ представления $V(\lambda)$. Следуя методу орбит (см. [5, 6]), мы ставим в соответствие

*Статья поддержана грантами РФФИ 12-01-00070-а, 12-01-00137-а, 13-01-97000-р-поволжье-а.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 161—178.

каждой неприводимой компоненте $V_{S,a}(\lambda)$ коприсоединённую орбиту $\Omega_{S,a}(\lambda)$. В работе найдены образующие элементы в определяющем идеале орбиты $\Omega_{S,a}(\lambda)$ и каноническая форма $\lambda_{S,a}$. Мы покажем, что кратность вхождения $V_{S,a}(\lambda)$ в $V(\lambda)$ равна единице (т. е. алгебра Гекке $\mathcal{H}(\lambda)$ коммутативна). В заключительной части работы находится базис в алгебре Гекке $\mathcal{H}(\lambda)$. Основные результаты сформулированы в теоремах 3.2, 3.4, 3.5, 4.1, 5.2.

Разложение представления $V(\lambda)$ в сумму неприводимых компонент допускает интерпретацию в терминах теории базисных характеров (базисных представлений), разработанной К. Андре (см., например, [8, 9, 11, 12]). Представление $V(\lambda)$ можно рассматривать как представление, индуцированное с базисного (точнее, регулярного неприводимого представления) унитреугольной подгруппы порядка $n-1$ [10]. Представление $V(\lambda)$ разлагается на представления $V_S(\lambda)$, которые в свою очередь разлагаются на неприводимые компоненты $V_{S,a}(\lambda)$ (см. (9)). Заметим, что представления $V_S(\lambda)$ являются базисными или разлагаются в сумму базисных представлений.

Метод орбит впервые был изложен в 1962 г. в [5]. Было доказано, что существует взаимно-однозначное соответствие между неприводимыми представлениями связной нильпотентной группы Ли и её коприсоединёнными орбитами. Позже в [14] было доказано, что метод орбит также верен для унипотентных групп над конечным полем (см. также [8, 15]). Отметим, что, поскольку метод орбит над конечным полем использует матричную экспоненту, характеристика поля должна быть достаточно большой. Для группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{F}_q)$ достаточно потребовать выполнения условия $\operatorname{char}\mathbb{F}_q \geqslant n-1$.

В настоящей работе характеристика поля произвольная. Неприводимое представление $V_{S,a}(\lambda)$ индуцировано с характера ассоциативной поляризации (см. определение 2.1). Это даёт нам возможность не использовать экспоненту в конструкции представлений [9, 16].

Пусть $\mathbb{F}_q$ — конечное поле из q элементов. Унитреугольная группа

$$G = \mathrm{UT}(n,\mathbb{F}_q)$$

состоит из всех верхнетреугольных матриц размера $n\times n$ с единицами по диагонали и с элементами из поля $\mathbb{F}_q$. Далее считаем, что $n>2$. Обозначим через $\mathfrak{g}$ подпространство верхнетреугольных матриц с нулями по диагонали. Очевидно, что $G = E + \mathfrak{g}$, где E — единичная матрица. Подпространство $\mathfrak{g}$ является ассоциативной алгеброй и, следовательно, алгеброй Ли.

Корнем будем называть любую пару (i,j) натуральных чисел, где $1\leqslant i < j \leqslant n$. На множестве корней

$$R = \{(i,j)\colon 1\leqslant i<j\leqslant n\}$$

определена частичная операция сложения $(i,j)+(j,s)=(i,s)$.

Множество корней R распадается на подмножества:

$$R = R_+ \sqcup R_0 \sqcup R_-,$$

где

$$R_+ = \{(i,j)\colon i+j<n+1\}, \quad R_0 = \{(i,j)\colon i+j=n+1\},$$
$$R_- = \{(i,j)\colon i+j>n+1\}.$$

Матричные единицы $\{E_\alpha\colon \alpha\in R\}$ образуют базис в алгебре $\mathfrak{g}$. Алгебра $\mathfrak{g}$ является прямой суммой подпространств:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_-,$$

где

$$\mathfrak{g}_\pm = \operatorname{span}\{E_\alpha\colon \alpha\in R_\pm\}, \quad \mathfrak{g}_0 = \operatorname{span}\{E_\alpha\colon \alpha\in R_0\}.$$

Подпространства $\mathfrak{g}_+$, $\mathfrak{g}_0$, $\mathfrak{g}_-$ являются подалгебрами в ассоциативной алгебре $\mathfrak{g}$. Тогда $G_\pm = E+\mathfrak{g}_\pm$, $G_0 = E+\mathfrak{g}_0$ — подгруппы в группе G. Легко показать, что всякий элемент $g\in G$ однозначно разлагается в произведение $g = g_+g_0g_-$, где $g_\pm\in G_\pm$, $g_0\in G_0$. Отметим, что всякому корню $\alpha\in R$ соответствует однопараметрическая подгруппа

$$\{x_\alpha(t) = E + tE_\alpha,\ t\in\mathbb{F}_q\}.$$

Введём обозначение $k = [(n-1)/2]$. Тогда $n = 2k+1$, если n нечётно, $n = 2(k+1)$, если n чётно. Обозначим

$$\varepsilon = \begin{cases} 0, & \text{если } n \text{ нечётно},\\ 1, & \text{если } n \text{ чётно}.\end{cases}$$

Корень из R_+ будем называть простым, если его нельзя представить в виде суммы других корней из R_+. Множество простых корней является объединением двух подмножеств $\Pi_0\cup\Pi$, где

$$\Pi_0 = \{(i,i+1)\colon 1\leqslant i\leqslant k\}, \quad \Pi = \{(i,n-i)\colon 1\leqslant i\leqslant k\}.$$

Заметим, что

$$\Pi_0\cap\Pi = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } n = 2(k+1),\\ (k,k+1), & \text{если } n = 2k+1.\end{cases}$$

Определение 1.1. Характером ассоциативной алгебры $\mathfrak{a}$ будем называть произвольную линейную форму на ней, равную нулю на $\mathfrak{a}^2$.

Отметим, что характер ассоциативной алгебры является её характером как алгебры Ли. Всякий характер ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}_+$ однозначно определяется своими значениями на $\{E_\alpha\colon \alpha\in\Pi_0\cup\Pi\}$.

Определение 1.2. Характер $\lambda\colon \mathfrak{g}_+\to\mathbb{F}_q$ назовём невырожденным, если $\lambda(E_\gamma)\neq 0$ для любого $\gamma\in\Pi\setminus\Pi_0$.

Зафиксируем нетривиальный комплексный характер аддитивной группы поля $\mathbb{F}_q$ (т. е. гомоморфизм $\mathbb{F}_q\to\mathbb{C}^*$). Будем обозначать этот характер через e^x, где $x\in\mathbb{F}_q$.

Всякий характер ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}_+$ определяет комплексный характер (одномерное комплексное представление) группы G_+ по формуле

$$\xi_\lambda(1+x) = e^{\lambda(x)}, \quad x\in\mathfrak{g}_+. \tag{1}$$

Определение 1.3. Представление $V(\lambda) = \mathrm{ind}(\xi_\lambda, G_+, G)$, где λ — невырожденный характер $\mathfrak{g}_+$, назовём представлением типа Гельфанда—Граева.

Предложение 1.4. *Если λ, λ' — невырожденные характеры $\mathfrak{g}_+$, совпадающие на $\{E_\alpha\colon \alpha \in \Pi\}$, то $V(\lambda) \cong V(\lambda')$.*

Доказательство. Пусть $v_0 \in V(\lambda)$ — образующий элемент индуцированного представления, $g_+v_0 = \xi_\lambda(g_+)v_0$. Для любого корня $\alpha \in \Pi_0 \setminus \Pi$ существует единственный корень $\beta(\alpha) \in R_0$, такой что $\gamma(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha)$ определено и лежит в $\Pi \setminus \Pi_0$. Действительно, если $\alpha = (i, i+1)$, то $\beta(\alpha) = (i+1, n-i)$ и $\gamma(\alpha) = (i, n-i)$. Подпространство, натянутое на $E_{\beta(\alpha)}$, $\alpha \in \Pi_0 \setminus \Pi$, является ассоциативной подалгеброй с нулевым умножением. Поэтому для любых $\alpha, \alpha' \in \Pi_0 \setminus \Pi$ элементы однопараметрических подгрупп $x_{\beta(\alpha)}(t)$ и $x_{\beta(\alpha')}(t')$ коммутируют.

Рассмотрим элемент
$$g_0 = \prod x_{\beta(\alpha)}(t_\alpha) \in G, \tag{2}$$
где α пробегает $\Pi_0 \setminus \Pi$, а $t_\alpha \in \mathbb{F}_q$ находится из решения уравнения
$$\lambda(E_\alpha) + \lambda\big(E_{\gamma(\alpha)}\big)t_\alpha = \lambda'(E_\alpha).$$
Используя равенства
$$x_\alpha(s)x_{\beta(\alpha)}(t) = x_{\beta(\alpha)}(t)x_\alpha(s)x_{\gamma(\alpha)}(st),$$
получаем $g_+g_0v_0 = \xi_{\lambda'}(g_+)g_0v_0$. □

2. Ассоциативные поляризации

Пусть $\mathfrak{a}$ — произвольная нильпотентная ассоциативная алгебра над произвольным полем K. Присоединим единицу E к алгебре $\mathfrak{a}$. Тогда $G = E + \mathfrak{a}$ — унипотентная группа. Алгебра $\mathfrak{a}$ является алгеброй Ли относительно коммутатора $[x, y] = xy - yx$. Пусть $\lambda \in \mathfrak{a}^*$. Напомним, что поляризацией λ называют подалгебру Ли $\mathfrak{p}$ в $\mathfrak{a}$, которая является максимальным изотропным подпространством для билинейной кососимметрической формы $B_\lambda(x, y) = \lambda([x, y])$.

Определение 2.1. Ассоциативной поляризацией $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ назовём поляризацию $\mathfrak{p}$, которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $\mathfrak{p}$ — ассоциативная подалгебра в $\mathfrak{a}$,
2) $\lambda(\mathfrak{p}^2) = 0$.

Верно ли, что для любого $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ ассоциативной нильпотентной алгебры $\mathfrak{a}$ существует ассоциативная поляризация? Ответ в общем случае отрицательный.

Пример 2.2. Ассоциативная алгебра
$$\mathfrak{a} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

коммутативна как ассоциативная алгебра и как алгебра Ли. Любая линейная форма λ на $\mathfrak{a}$ имеет единственную поляризацию, которая совпадает с $\mathfrak{a}$. Если $\lambda(E_{12}) \neq 0$, то $\mathfrak{a}$ не является ассоциативной поляризацией.

Предположим, что $\mathfrak{a}$ — ассоциативная нильпотентная алгебра над полем $\mathbb{F}_q$. Если $\mathfrak{p}$ — ассоциативная поляризация для $\lambda \in \mathfrak{a}^*$, то формула (1) определяет одномерное комплексное представление ξ_λ группы $P = E + \mathfrak{p}$. Обозначим через $M(\lambda)$ индуцированное представление $\operatorname{ind}(\xi_\lambda, P, G)$.

Предложение 2.3. *Пусть $\mathfrak{a}$, λ, $\mathfrak{p}$ как выше. Тогда*

1) *характер χ_λ представления $M(\lambda)$ вычисляется по формуле*

$$\chi_\lambda(1+x) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}} \sum_{\mu \in \Omega(\lambda)} e^{\mu(x)}, \quad x \in \mathfrak{a}; \tag{3}$$

2) $\dim M(\lambda) = q^{\operatorname{codim} \mathfrak{p}} = \sqrt{|\Omega|}$;
3) *представление $M(\lambda)$ не зависит от выбора ассоциативной поляризации*;
4) *представление $M(\lambda)$ неприводимо*;
5) *пусть линейные формы λ и λ' допускают ассоциативные поляризации*; *представления $M(\lambda)$ и $M(\lambda')$ эквивалентны тогда и только тогда, когда λ и λ' принадлежат одной коприсоединённой орбите.*

Доказательство. Для любого $\lambda \in \mathfrak{a}^*$ обозначим через

$$\mathfrak{a}^\lambda = \{a \in \mathfrak{a} \colon \lambda([a, \mathfrak{a}]) = 0\}$$

стабилизатор λ в алгебре Ли $\mathfrak{a}$. Очевидно, что равенство $\lambda\big((E + a)x\big) = \lambda\big(x(E + a)\big)$ равносильно равенству $\lambda(ax) = \lambda(xa)$. Поэтому $E + \mathfrak{a}^\lambda$ совпадает со стабилизатором G^λ линейной формы λ в группе G. Отсюда следует, что

$$|\Omega| = \frac{|G|}{|G^\lambda|} = \frac{|\mathfrak{g}|}{|\mathfrak{g}^\lambda|} = q^{\dim \mathfrak{g} - \dim \mathfrak{g}^\lambda} = q^{\dim \Omega}. \tag{4}$$

Теперь доказательство может быть завершено аналогично тому, как это сделано в [9, 14—16]. □

Замечание 2.4. Из основного результата работы [13] вытекает, что формула (3), вообще говоря, неверна для $\mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$. Поэтому неверно, что любая линейная форма на $\mathfrak{ut}(n, \mathbb{F}_q)$ имеет ассоциативную поляризацию. Применяя классификацию коприсоединённых орбит для унитреугольных групп малого порядка [4], можно показать существование ассоциативной поляризации для $n \leqslant 7$.

3. Орбиты и представления для $\lambda_{S,a}$

Пусть λ — невырожденный характер $\mathfrak{g}_+$ как ассоциативной алгебры. В этом разделе мы построим семейство линейных форм $\lambda_{S,a}$, которые нумеруются подмножествами $S \in \Pi$ и параметрами $a \in \Lambda_S$. Мы построим ассоциативную поляризацию $\mathfrak{p}_S$ для $\lambda_{S,a}$ и соответственно неприводимое представление $V_{S,a}(\lambda)$.

Далее мы получим описание коприсоединённой орбиты $\Omega_{S,a}(\lambda)$ и покажем, что представления $\{V_{S,a}(\lambda)\}$ попарно не эквивалентны.

Будем интерпретировать всякий корень $\gamma = (i, j)$ как ячейку на $(n \times n)$-матрице. Будем называть i номером строки корня γ, а j — номером столбца корня γ. Будем говорить, что корень $\gamma' = (i', j')$ лежит левее (строго левее) корня γ, если $j' \leqslant j$ (соответственно $j' < j$). Аналогично определяются отношения «правее», «выше» и «ниже».

Пусть S — произвольное подмножество в Π.

Обозначения.

1. Обозначим через L^0_S множество, состоящее из корней $\gamma = (i, j)$, удовлетворяющих следующим условиям:
   1) $1 \leqslant i \leqslant k$ и $i + j \geqslant n + 1$,
   2) нет корней из S в i-й строке и j-м столбце,
   3) все корни из Π, которые лежат строго выше и строго левее γ, принадлежат S.
2. Подмножество L^{00}_S пусто для нечётного n. Для $n = 2(k+1)$ подмножество L^{00}_S состоит из единственного корня $\gamma = (k + 1, j)$, удовлетворяющего условиям 2) и 3).
3. L^+_S: корень γ из $R_0 \sqcup R_-$ лежит в L^+_S, если он лежит в том же столбце и строго выше некоторого корня из L^0_S.
4. L^-_S: корень $\gamma' = (n-i, j)$ лежит в L^-_S тогда и только тогда, когда $\gamma = (i, j)$ лежит в L^+_S.
5. $L_S = L^+_S \sqcup L^0_S \sqcup L^{00}_S \sqcup L^-_S$.
6. $R_S = R_+ \sqcup L_S$.
7. $|S| = s$, $|R_+| = r_+$, $|R_0| = r_0$.

Заметим, что $|L^+_S| = |L^-_S| = |S| = s$, $|L^0_S = k - s$, $|L^{00}_S| = \varepsilon$, $k + \varepsilon = r_0$

Введём на множестве корней R отношение порядка: $\beta \geqslant \alpha$, если β лежит ниже α или в одной строке и левее α. Упорядочим корни из $R_+ \backslash S$ в соответствии с введённым отношением порядка: $R_+ \setminus S = \{\alpha_1 < \alpha_2 < \ldots < \alpha_{r_+ - s}\}$.

Лемма 3.1.

1. *Для каждого корня α_i существует единственный корень $\beta_i \in R \setminus R_S$, для которого $\alpha_i + \beta_i \in S \sqcup L^0_S$.*
2. *Для любых $1 \leqslant i < j \leqslant r_+ - s$ сумма $\alpha_i + \beta_j$ или не определена, или содержится в $(R_+ \setminus S) \sqcup L^+_S$.*

Доказательство непосредственно вытекает из определений. □

Обозначим через $\mathfrak{l}_S$ ($\mathfrak{l}^\pm_S$, $\mathfrak{l}^0_S$, $\mathfrak{l}^{00}_S$) подпространство, натянутое на систему E_γ, $\gamma \in L_S$ (соответственно $\gamma \in L^\pm_S$, $\alpha \in L^0_S$). Очевидно, что

$$\mathfrak{l}_S = \mathfrak{l}^+_S \oplus \mathfrak{l}^0_S \oplus \mathfrak{l}^{00}_S \oplus \mathfrak{l}^-_S.$$

Подпространство $\mathfrak{l}_S$ является ассоциативной подалгеброй с нулевым умножением.

Подпространство

$$\mathfrak{p}_S = \mathrm{span}\{E_\gamma \colon \gamma \in R_S\} = \mathfrak{g}_+ \oplus \mathfrak{l}_S$$

также является ассоциативной подалгеброй в $\mathfrak{g}$, а $P_S = E + \mathfrak{p}_S$ — подгруппой в G.

Рассмотрим множество Λ_S, состоящее из отображений

$$a \colon L_S^0 \sqcup L_S^{00} \sqcup L_S^- \to \mathbb{F}_q,$$

для которых $a(\gamma) \neq 0$ для любого $\gamma \in L_S^0$. Можно отождествить Λ_S и $\mathbb{F}_q^{s+\varepsilon} \times (\mathbb{F}_q^*)^{k-s}$. Число элементов в Λ_S равно $q^{s+\varepsilon}(q-1)^{k-s}$.

Для каждого $a \in \Lambda_S$ определим линейную форму $\lambda_{S,a}$ на $\mathfrak{g}$ следующим образом:

1) $\lambda_{S,a}(E_\gamma) = \lambda(E_\gamma)$ для всех $\gamma \in \Pi_0 \setminus \Pi$ и $\gamma \in S$,
2) $\lambda_{S,a}(E_\gamma) = a(\gamma)$ для всех $\gamma \in L_S^0 \sqcup L_S^{00} \sqcup L_S^-$,
3) $\lambda_{S,a}(E_\gamma) = 0$ для всех остальных $E_\gamma \in \mathfrak{g}$.

Заметим, что из определения Λ_S вытекает, что

1) $\lambda_{S,a}(E_\gamma) \neq 0$ для всех $\gamma \in L_S^0$;
2) $\lambda_{S,a}(E_\gamma)$ может принимать произвольное значение, когда $\gamma \in L_S^{00} \sqcup L_S^-$;
3) $\lambda_{S,a}(E_\gamma) = 0$ для всех $\gamma \in R_+ \setminus \{S \sqcup \Pi_0\}$ и всех $\gamma \in L_S^+$.

Линейная форма $\lambda_{S,a}$ является характером ассоциативной алгебры $\mathfrak{p}_S$ в смысле определения 1.1. Следуя формуле (1), определим комплексный характер $\xi_{\lambda,S,a}$ подгруппы $P_S = E + \mathfrak{p}_S$. Обозначим

$$V_{S,a}(\lambda) = \mathrm{ind}(\xi_{\lambda,S,a}, P_S, G).$$

Теорема 3.2. *Пусть λ — невырожденный характер подалгебры $\mathfrak{g}_+$* (*см. определение* 1.2). *Тогда*

1) *подалгебра $\mathfrak{p}_S$ является ассоциативной поляризацией для линейной формы $\lambda_{S,a}$*;
2) *всякое представление $V_{S,a}(\lambda)$ неприводимо.*

Доказательство. По предложению 2.3 утверждение 2) вытекает из 1). Докажем 1).

Подпространство $\mathfrak{p}_S$ — ассоциативная подалгебра, причём $\lambda_{S,a}(\mathfrak{p}_S^2) = 0$. Осталось показать, что $\mathfrak{p}_S$ — максимальное изотропное подпространство для кососимметрической билинейной формы $\lambda_{S,a}([x,y])$. Предположим противное. Пусть существует $x \in \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{p}_S$, для которого $\lambda_{S,a}([\mathfrak{p}_S, x]) = 0$. Тогда

$$x = \sum_{j=1}^{r_+ - s} b_j E_{\beta_j}.$$

Пусть i — наименьший номер, для которого $b_i \neq 0$. Из леммы 3.1 и определения $\lambda_{S,a}$ вытекает, что

$$\lambda_{S,a}([E_{\alpha_i}, E_{\beta_i}]) = c_i \neq 0, \quad \lambda_{S,a}([E_{\alpha_i}, E_{\beta_j}]) = 0$$

для любого $j > i$. Отсюда следует, что $\lambda_{S,a}([\mathfrak{p}_S, x]) = c_i b_i \neq 0$. Противоречие. Поэтому $\mathfrak{p}_S$ — максимальное изотропное подпространство. $\square$

Обозначим через $\Omega_{S,a}(\lambda)$ орбиту $\lambda_{S,a} \in \mathfrak{g}^*$ относительно коприсоединённого представления группы G. Введём обозначения: $\bar{\mathbb{F}}_q$ — алгебраическое замыкание поля $\mathbb{F}_q$, $\bar{\mathfrak{g}} = \mathfrak{g} \otimes \bar{\mathbb{F}}_q$, $\bar{\Omega}_{S,a}(\lambda)$ — коприсоединённая орбита для $\lambda_{S,a}$ относительно группы $\bar{G} = \mathrm{UT}(n, \bar{\mathbb{F}}_q)$. Орбита $\bar{\Omega}_{S,a}(\lambda)$ замкнута, поскольку орбиты любого регулярного действия нильпотентной группы на произвольном аффинном алгебраическом многообразии замкнуты [3, 11.2.4]. Найдём систему образующих элементов в определяющем идеале $\mathcal{I}_{S,a}$ орбиты $\bar{\Omega}_{S,a}(\lambda)$. Заметим, что $\dim \bar{\Omega}_{S,a}(\lambda) = 2 \operatorname{codim} \mathfrak{p}_S = 2(r_+ - s)$. Соответственно

$$\operatorname{codim} \bar{\Omega}_{S,a}(\lambda) = \dim \mathfrak{g} - \dim \bar{\Omega}_{S,a}(\lambda) = 2r_+ + r_0 - 2(r_+ - s) = r_0 + 2s.$$

Заметим, что число корней в $S \sqcup L_S$ также равно $r_0 + 2s$, поскольку $|S| = |L_S^+| = |L_S^-| = s$ и $|L_S^0| = r_0 - s$. Далее мы поставим в соответствие всякому $\gamma \in S \sqcup L_S$ элемент симметрической алгебры $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}}) = \bar{\mathbb{F}}_q[\bar{\mathfrak{g}}^*]$ и покажем, что построенная система элементов будет порождать определяющий идеал $\mathcal{I}_{S,a}$.

Обозначим через $\mathbb{X}$ матрицу, в которой выше диагонали стоят матричные единицы E_{ij}, $i < j$, а на и ниже диагонали — нули. Каждый минор матрицы $\mathbb{X}$ — элемент симметрической алгебры $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}})$, т. е. многочлен на $\bar{\mathfrak{g}}^*$. Для всякого корня $\gamma \in R$ рассмотрим подмножество системы корней $\mathbb{S}_\gamma$, состоящее из корня γ, а также из тех корней из $\{S \sqcup L_S^0\}$, которые лежат строго выше и строго правее, чем γ. Обозначим через $\mathcal{M}_\gamma$ минор матрицы $\mathbb{X}$ с такой системой строк и столбцов, как $\mathbb{S}_\gamma$.

Пусть $\gamma = (n - i, j) \in L_S^-$. Обозначим через $|\mathbb{X} - \tau E|_i$ минор характеристической матрицы $\mathbb{X} - \tau E$, получающийся из неё удалением первых i столбцов и последних i строк. Тогда

$$|\mathbb{X} - \tau E|_i = \mathcal{P}_{\gamma,0} \tau^{n-2i} + \mathcal{P}_{\gamma,1} \tau^{n-2i-1} + \ldots + \mathcal{P}_{\gamma,n-2i}.$$

Обозначим

$$\mathcal{F}_\gamma = \begin{cases} \mathcal{M}_\gamma, & \text{если } \gamma \in S \sqcup L_S^+ \sqcup L_S^0 \sqcup L_S^{00}, \\ \mathcal{P}_{\gamma,1}, & \text{если } \gamma \in L_S^-. \end{cases}$$

Обозначим через $\mathcal{F}_\gamma^0$ значение многочлена $\mathcal{F}_\gamma$ в точке $\lambda_{S,a}$.

Замечание 3.3. Отметим, что $\mathcal{F}_\gamma^0 = c\lambda_{S,a}(E_\gamma)$. Здесь c равно произведению значений $\lambda_{S,a}$ и некоторых E_μ, где $\mu < \lambda$ и μ содержится в $S \sqcup L_S^0$, поэтому $c \neq 0$.

Теорема 3.4. *Определяющий идеал $\mathcal{I}_{S,a}$ орбиты $\bar{\Omega}_{S,a}(\lambda)$ порождается алгебраически независимой системой многочленов*

$$\{\mathcal{F}_\gamma - \mathcal{F}_\gamma^0 \colon \gamma \in S \sqcup L_S\}. \tag{5}$$

Доказательство. Упорядочим R относительно введённого выше, перед леммой 3.1, отношения порядка. Тогда каждый корень получает порядковый номер в списке корней: $R = \{\gamma_1 < \ldots < \gamma_N\}$, где $N = n(n-1)/2$. Порядок на R индуцирует порядок на множестве матричных единиц. В ассоциативной алгебре $\mathfrak{g}$ выделяется цепочка идеалов

$$\bar{\mathfrak{g}}_1 = \langle E_{1,n}\rangle \subset \bar{\mathfrak{g}}_2 \subset \ldots \subset \bar{\mathfrak{g}}_N = \mathfrak{g},$$

в которой $\mathfrak{g}_i$ — линейная оболочка элементов стандартного базиса с номерами не больше i. Обозначим через $\mathcal{I}_i$ идеал в $\mathcal{S}(\bar{\mathfrak{g}})$, порождённый подмножеством тех элементов из (5), которые имеют номер не больше i. Последний идеал $\mathcal{I}_N$ совпадает с идеалом $\mathcal{I}$, порождённым всей системой образующих (5).

Нетрудно показать, что

$$\mathcal{F}_{\gamma_i} = cE_{\gamma_i} + \Phi_{i-1} \bmod \mathcal{I}_{i-1}, \tag{6}$$

где c — ненулевая константа (см. замечание выше), Φ_{i-1} — некоторый многочлен из $S(\bar{\mathfrak{g}}_{i-1})$. Так как каждый E_{γ_i} лежит в $\bar{\mathfrak{g}}_i$ и не лежит в $\bar{\mathfrak{g}}_{i-1}$, то из 6 выводим, что система образующих (5) алгебраически независима и идеал $\mathcal{I}$ простой. Число образующих элементов в (5) равно $r_0 + 2s$, что совпадает с коразмерностью орбиты $\Omega_{S,a}(\lambda)$. Следовательно, $\dim \operatorname{Ann} \mathcal{I} = \dim \Omega_{S,a}(\lambda)$.

Легко убедиться, что образующие (5) равны нулю в точке $\lambda_{S,a}$. Для завершения доказательства теоремы достаточно показать, что идеал $\mathcal{I}$ инвариантен относительно присоединённого представления группы G. Непосредственно проверяется, что для любого $1 \leqslant m \leqslant n-1$ элемент $(\operatorname{ad} E_{m,m+1})\mathcal{F}_{\gamma_i}$ содержится в идеале $\mathcal{I}_{i-1}$. □

Теорема 3.5. *Линейные формы $\lambda_{S,a}$ и $\lambda_{S',a'}$ лежат на одной Ad^*_G-орбите тогда и только тогда, когда они совпадают.*

Доказательство. Очевидно, что если $\lambda_{S,a} = \lambda_{S',a'}$, то они лежат на одной орбите. Докажем обратное утверждение.

Пусть $\lambda_{S,a}$ и $\lambda_{S',a'}$ лежат на одной Ad^*_G-орбите. Тогда они лежат на одной Ad^*-орбите относительно группы $\bar{G}$. Определяющий идеал общей орбиты порождается системой многочленов (5). Значения каждого из многочленов $\{\mathcal{F}_\gamma\}$ в точках $\lambda_{S,a}$ и $\lambda_{S',a'}$ совпадают.

Предположим, что $S \neq S'$. Упорядочим корни из Π в соответствии с номером строки. Выберем номер i, такой что

1) подмножество корней из S с номером строки меньше i совпадает с аналогичным подмножеством из S';
2) корень $\gamma = (i, n-i)$ лежит в S и не лежит в S'.

Так как $\gamma \in S$, то справа от него лежит некоторый $\gamma_* = (i, j_*) \in L^+_S$. По замечанию 3.3 значение $\mathcal{F}^0_{\gamma_*}$ многочлена $\mathcal{F}_{\gamma_*}$ в точке $\lambda_{S,a}$ равно $c\lambda_{S,a}(E_{\gamma_*})$, где $c \neq 0$. Так как $\gamma_* \in L^+_S$, то $\lambda_{S,a}(E_{\gamma_*}) = 0$, и следовательно, $\mathcal{F}^0_{\gamma_*} = 0$.

С другой стороны, так как $\gamma \notin S'$, то $\gamma_* \in L^0_{S'}$. Рассуждая аналогично, приходим к $\mathcal{F}^0_{\gamma_*} \neq 0$. Противоречие. Поэтому $S = S'$.

Так как $S = S'$, то $L^\pm_S = L^\pm_{S'}$ и $L^0_S = L^0_{S'}$. Вычисляя значения $\mathcal{F}^0_\gamma$ для $\gamma \in L^0_S$, заключаем, что $a = a'$. □

4. Разложение на неприводимые компоненты

Теорема 4.1.

1. *Каждое представление $V_{S,a}(\lambda)$ реализуется как подпредставление в $V(\lambda)$.*
2. *Представление типа Гельфанда—Граева раскладывается в сумму неприводимых компонент*

$$V(\lambda) = \bigoplus V_{S,a}(\lambda) \tag{7}$$

по всем $S \subset \Pi$ и $a \in \Lambda_S$. Каждая неприводимая компонента входит в $V(\lambda)$ однократно.

Доказательство. Если v — общий собственный вектор в $V_{S,a}(\lambda)$ для $G_+ = \{1 + x\colon x \in \mathfrak{g}_+\}$, то его собственное значение имеет вид $e^{\nu(x)}$, где $\nu(x)$ — характер ассоциативной алгебры $\mathfrak{g}_+$. Характер $\nu(x)$ будем называть $\mathfrak{g}_+$-весом, а соответствующий вектор v будем называть $\mathfrak{g}_+$-весовым вектором.

Для доказательства первого пункта достаточно показать, что существует нетривиальный гомоморфизм $V(\lambda) \to V_{S,a}(\lambda)$. Это равносильно утверждению, что $V_{S,a}(\lambda)$ имеет $\mathfrak{g}_+$-весовой вектор веса λ. Доказательство этого утверждения аналогично доказательству предложения 1.4. Пусть f_0 — образующий вектор представления $V_{S,a}(\lambda)$. Для любого корня $\alpha \in \Pi \setminus S$ существует единственный корень $\gamma(\alpha) = (i, j_*) \in L_S^0$, лежащий строго правее α. Тогда $\gamma(\alpha) = \alpha + \beta(\alpha)$, где $\beta = (n - i, j_*) \in R_-$. Подпространство, натянутое на множество $E_{\beta(\alpha)}$, $\alpha \in \Pi \setminus S$, является подалгеброй с нулевым умножением. Поэтому для любых $\alpha, \alpha' \in \Pi_0 \setminus \Pi$ элементы однопараметрических подгрупп $x_{\beta(\alpha)}(t)$ и $x_{\beta(\alpha')}(t')$ коммутируют. Напомним, что $\lambda_{S,a}(E_\alpha) = 0$ и $\lambda_{S,a}\bigl(E_{\gamma(\alpha)}\bigr) = a\bigl(\gamma(\alpha)\bigr) \neq 0$. Образуем элемент

$$g_0 = \prod x_{\beta(\alpha)}(t_\alpha) \in G, \tag{8}$$

в котором произведение берётся в произвольном порядке по всем $\alpha \in \Pi \setminus S$, а $t_\alpha \in \mathbb{F}_q$ находится из уравнения

$$\lambda_{S,a}\bigl(E_{\gamma(\alpha)}\bigr) t_\alpha = \lambda(E_\alpha).$$

Вектор $g_0 f_0$ является $\mathfrak{g}_+$-весовым вектором с весом λ, что доказывает утверждение 1.

В силу теорем 3.2, 3.4 для доказательства второго утверждения теоремы осталось доказать совпадение размерностей представлений в левой и правой части формулы (7). Обозначим

$$V_S(\lambda) = \bigoplus_{a \in \Lambda_S} V_{S,a}(\lambda). \tag{9}$$

Так как $|\Lambda_S| = q^{s+\varepsilon}(q-1)^{k-s}$ и $\dim V_{S,a}(\lambda) = q^{r_+ - s}$, то

$$\dim V_S(\lambda) = q^{r_+ + \varepsilon}(q-1)^{k-s}.$$

Тогда

$$\dim\Bigl(\bigoplus_{S\subset\Pi} V_S(\lambda)\Bigr) = q^{r_++\varepsilon}\sum_{s=0}^{k} C_k^s (q-1)^{k-s} = q^{r_++k+\varepsilon} = q^{r_++r_0} = \dim V(\lambda). \quad \square$$

Следствие 4.2. *Число неприводимых подпредставлений в представлениях типа Гельфанда—Граева $V(\lambda)$ для группы $\mathrm{UT}(n,\mathbb{F}_q)$ не зависит от выбора невырожденного характера λ и равно $q^{\varepsilon}(2q-1)^k$.*

Доказательство. Число неприводимых подпредставлений в $V(\lambda)$ равно

$$\sum_{s=0}^{k} C_s^k|\Lambda_S| = \sum_{s=0}^{k} C_k^s q^{s+\varepsilon}(q-1)^{k-s} = q^{\varepsilon}\sum_{s=0}^{k} C_k^s q^s (q-1)^{k-s} = q^{\varepsilon}(2q-1)^k. \quad \square$$

5. Алгебра Гекке

Пусть G — произвольная конечная группа, $\mathcal{A}_G$ — её групповая алгебра над $\mathbb{C}$, H — подгруппа группы G, ξ — одномерное представление (характер) подгруппы H. Обозначим через P_ξ элемент

$$\sum_{h\in H} \xi(h^{-1})h$$

групповой алгебры $\mathcal{A}_G$.

Индуцированное представление $V = \mathrm{ind}(\xi, H, G)$ реализуется на левом идеале $\mathcal{A}_G P_\xi$ умножением слева. Алгебра Гекке $\mathcal{H}(V)$ (т. е. алгебра G-эндоморфизмов представления V) изоморфна подалгебре $P_\xi\mathcal{A}_G P_\xi$ с обращённым умножением. Алгебра $P_\xi\mathcal{A}_G P_\xi$ линейно порождается системой $\{P_\xi x P_\xi\colon x\in G\}$. Хорошо известно следующее (см. [7, лемма 84]).

1. Элемент $P_\xi x P_\xi$ определяется однозначно с точностью до домножения на ненулевую константу двойным классом HxH. Таким образом, алгебра $\mathcal{H}(V)$ линейно порождается элементами $P_\xi x P_\xi$, где x пробегает систему представителей двойных классов смежности HxH.
2. Система элементов $P_\xi x P_\xi$, где x пробегает систему тех представителей двойных (H,H) классов, для которых $P_\xi x P_\xi \neq 0$, является базисом в $\mathcal{H}(V)$.
3. Определим характер $x\xi$ на xHx^{-1} по формуле $x\xi(y) = \xi(x^{-1}yx)$. Элемент $P_\xi x P_\xi$ отличен от нуля тогда и только тогда, когда $\xi = x\xi$ на $xHx^{-1}\cap H$.

Суммируя утверждения 1—3, получаем следующее предложение.

Предложение 5.1. *Пусть $V = \mathrm{ind}(\xi, H, G)$. Тогда система элементов $P_\xi x P_\xi$, где x пробегает систему тех представителей двойных (H,H) классов, для которых $\xi = x\xi$ на $xHx^{-1}\cap H$, является базисом в $\mathcal{H}(V)$.*

Вернёмся к представлениям типа Гельфанда—Граева. Алгебру Гекке представления $V(\lambda)$ будем обозначать через $\mathcal{H}(\lambda)$. Поскольку каждое неприводимое представление входит в $V(\lambda)$ однократно, то алгебра Гекке коммутативна. Размерность этой алгебры равна числу неприводимых компонент в $V(\lambda)$, т. е. равна $q^{\varepsilon}(2q-1)^k$. Положим $H = G_+$ и $\xi = \xi_\lambda$ (см. формулу (1.1)). Наша цель — построить в G систему элементов $\{x\}$, для которой $P_\xi x P_\xi$ — базис в $\mathcal{H}(\lambda)$.

Каждому подмножеству $S \subset \Pi$ поставим в соответствие множество Λ'_S, состоящее из наборов $(b_1, \ldots, b_{k+\varepsilon})$, где все b_i принадлежат $\mathbb{F}_q$, причём $b_i \neq 0$, если $(i, n-i) \in S$.

Построим матрицу $X_{S,b} = (x_{ij})$ следующим образом.

1. Матрица $X_{S,b}$ лежит в $E + \mathfrak{g}_0 + \mathfrak{g}_-$, т. е. $x_{ii} = 1$ и $x_{ij} = 0$ для всех пар $i > j$ и тех пар $i < j$, которые удовлетворяют $i + j < n + 1$.
2. Заполним последний столбец матрицы $X_{S,b}$. Для любого $1 \leqslant i \leqslant k + \varepsilon$ положим $x_{in} = b_i$. В каждой строке $1 \leqslant i \leqslant k$ есть ровно один корень $(i, n-i)$, лежащий в Π. Если $(i, n-i) \notin S$, то положим $x_{n-i,n} = 0$. Если $(i, n-i) \in S$, то положим $x_{n-i,n} = b_i$. Таким образом, $x_{i,n} = x_{n-i,n}$, если $1 \leqslant i \leqslant k$ и $(i, n-i) \in S$.
3. Если $(i, n-i) \in S$, то положим
$$x_{i+1,n-i} = \ldots = x_{n-i-1,n-i} = 0.$$
Если $(i, n-s) \notin S$, то положим
$$\begin{pmatrix} x_{i+1,n-i} \\ \vdots \\ x_{n-i-1,n-i} \end{pmatrix} = x_{i,n} \begin{pmatrix} x_{i+1,n-i} \\ \vdots \\ x_{n-i-1,n-i} \end{pmatrix}.$$

Теорема 5.2. *Система элементов*
$$\{P_\xi X_{S,b} P_\xi \colon S \subset \Pi,\ b \in \Lambda'_S\} \tag{10}$$
является базисом в $\mathcal{H}(\lambda)$.

Доказательство. Непосредственным вычислением показывается, что любой элемент $x \in \{X_{S,b}\}$ удовлетворяет соотношению $\xi = x\xi$ на $xHx^{-1} \cap H$, где $H = G_+$ и $\xi = \xi_\lambda$. Показываем, что элементы из $\{X_{S,b}\}$ лежат в разных двойных классах. Число элементов из (10) равно
$$\sum_{s=0}^{k} C_k^s (q-1)^s q^{k+\varepsilon} = q^{\varepsilon}(2q-1)^k,$$
т. е. равно $\dim \mathcal{H}(\lambda)$. Применение предложения 5.1 завершает доказательство. □

6. Вычисления для малого n

В приведённых ниже примерах мы отождествляем с помощью формы Киллинга $\mathfrak{g}^*$ с пространством нижнетреугольных матриц с нулями по диагонали.

Пример 6.1. Случай $n=3$. В этом случае

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}\\0&0&x_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad R_+=\{(1,2)\},\quad R_0=\{(1,3)\},\quad R_-=\{(2,3)\},$$

$$\mathfrak{g}_+=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_0=\left\{\begin{pmatrix}0&0&x_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_-=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&x_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Множество Π совпадает с $R_+=\{(1,2)\}$. Невырожденный характер λ на $\mathfrak{g}_+$ определятся одним числом $\lambda(E_{12})=c\neq 0$. Существует ровно два подмножества в Π: пустое множество и само Π. Напомним, что в нечётном случае $L_S^{00}=\varnothing$.

1. $S=\varnothing$. Тогда

$$L_S^+=L_S^-=\varnothing,\quad L_S^0=\{(1,3)\},\quad \Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^*=\{a\in\mathbb{F}_q\colon a\neq 0\},$$
$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\a&0&0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на

$$\mathfrak{g}^*=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0\\y_{21}&0&0\\y_{31}&y_{32}&0\end{pmatrix}\right\}$$

уравнением $y_{31}=a$.

2. $S=\{(1,2)\}$. Тогда

$$L_S^+=\{(1,3)\},\quad L_S^-=\{(2,3)\},\quad L_S^0=\varnothing,\quad \Lambda_S\cong\mathbb{F}_q=\{a\in\mathbb{F}_q\},$$
$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}\\0&0&x_{23}\\0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0&0&0\\c&0&0\\0&a&0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на $\mathfrak{g}^*$ уравнениями $y_{31}=0$, $y_{21}=c$, $y_{32}=a$. Представление типа Гельфанда—Граева $V(\lambda)$ разлагается в сумму неприводимых представлений, соответствующих указанным выше орбитам. Число неприводимых компонент равно $2q-1$. Матрицы $X_{S,b}$ из теоремы 5.2 имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&0&b\\0&1&b\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad b\in\mathbb{F}_q^*,\qquad \begin{pmatrix}1&0&a\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad a\in\mathbb{F}_q.$$

Пример 6.2. Случай $n=4$. В этом случае

$$R_+=\{(1,2),\,(1,3)\},\quad R_0=\{(2,3),\,(1,4)\},\quad R_-=\{(2,4),\,(3,4),$$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24}\\ 0 & 0 & 0 & x_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_+=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathfrak{g}_0=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & x_{14}\\ 0 & 0 & x_{23} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_-=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_{24}\\ 0 & 0 & 0 & x_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\}.$$

Множество Π совпадает с $\{(1,3)\}$. Невырожденный характер λ на $\mathfrak{g}_+$ определятся одним числом $\lambda(E_{13})=c\neq 0$. Существует ровно два подмножества в Π: пустое множество и само Π.

1. $S=\varnothing$. Тогда

$$L_S^+=L_S^-=\varnothing,\quad L_S^0=\{(1,4)\},\quad L_S^{00}=\{(2,3)\},$$

$$\Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^*\times\mathbb{F}_q=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{F}_q^2\colon a_1\neq 0\},$$

$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ 0 & 0 & x_{23} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_2 & 0 & 0\\ a_1 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на

$$\mathfrak{g}^*=\left\{\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ y_{21} & 0 & 0 & 0\\ y_{31} & y_{32} & 0 & 0\\ y_{41} & y_{42} & y_{43} & 0\end{pmatrix}\right\}$$

уравнениями

$$y_{41}=a_1,\quad \begin{vmatrix}y_{31} & y_{32}\\ y_{41} & y_{42}\end{vmatrix}=-a_1a_2.$$

2. $S=\{(1,3)\}$. Тогда

$$L_S^+=\{(1,4)\},\quad L_S^-=\{(3,4)\},\quad L_S^0=\varnothing,\quad L_S^{00}=\{(2,4)\},$$

$$\Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^2=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{F}_q^2\},$$

$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14}\\ 0 & 0 & 0 & x_{24}\\ 0 & 0 & 0 & x_{34}\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ c & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & a_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на $\mathfrak{g}^*$ уравнениями

$$y_{41}=0,\quad y_{42}=a_1,\quad y_{31}=c,\quad y_{42}y_{21}+y_{43}y_{31}=a_2c.$$

Представление типа Гельфанда—Граева $V(\lambda)$ разлагается в сумму неприводимых представлений, соответствующих указанным выше орбитам. Число неприводимых компонент равно $q(2q-1)$. Матрицы $X_{S,b}$ из теоремы 5.2 имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0&b\\0&1&0&a\\0&0&1&b\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad b\in\mathbb{F}_q^*,\ a\in\mathbb{F}_q,\qquad \begin{pmatrix}1&0&0&b\\0&1&ba&a\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \text{где}\quad a,b\in\mathbb{F}_q.$$

Пример 6.3. Случай $n=5$. В этом случае

$$R_+=\{(1,2),\,(1,3),\,(1,4),\,(2,3)\},\quad R_0=\{(2,4),\,(1,5)\},$$
$$R_-=\{(2,4),\,(3,4),\,(3,5),\,(4,5)\},$$

$$\mathfrak{g}=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}\\0&0&x_{23}&x_{24}&x_{25}\\0&0&0&x_{34}&x_{35}\\0&0&0&0&x_{45}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_+=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}&x_{14}&0\\0&0&x_{13}&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\},$$

$$\mathfrak{g}_0=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0&x_{15}\\0&0&0&x_{24}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \mathfrak{g}_-=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&x_{25}\\0&0&0&x_{35}&x_{35}\\0&0&0&0&x_{45}\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\}.$$

Множество Π совпадает с $\{(2,3),\,(1,4)\}$. Невырожденный характер λ на $\mathfrak{g}_+$ определятся парой чисел $\lambda(E_{14})=c_1\neq 0$ и $\lambda(E_{23})=c_2$ (второе может быль произвольным). Существует ровно четыре подмножества в Π.

1. $S=\varnothing$. Тогда

$$L_S^+=L_S^-=\varnothing,\quad L_S^0=\{(1,5),\,(2,4)\},\quad \Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^{*2}=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{F}_q^2\colon a_1,a_2\neq 0\},$$

$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0&x_{12}&x_{13}&x_{14}&x_{15}\\0&0&x_{23}&x_{24}&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&0&0&0&0\\0&a_2&0&0&0\\a_1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на

$$\mathfrak{g}^*=\left\{\begin{pmatrix}0&0&0&0&0\\y_{21}&0&0&0&0\\y_{31}&y_{32}&0&0&0\\y_{41}&y_{42}&y_{43}&0&0\\y_{51}&y_{52}&y_{53}&y_{54}&0\end{pmatrix}\right\}$$

уравнениями

$$y_{51}=a_1,\qquad \begin{vmatrix}y_{41}&y_{42}\\y_{51}&y_{52}\end{vmatrix}=-a_1a_2.$$

2. $S=\{(1,4)\}$. Тогда

$$L_S^+=\{(1,5)\},\quad L_S^-=\{(4,5)\},\quad L_S^0=\{(2,5)\},$$
$$\Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^*\times\mathbb{F}_q=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{F}_q^2\colon a_1\neq 0\},$$
$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ 0 & 0 & x_{23} & 0 & x_{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & a_1 & 0 & a_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на $\mathfrak{g}^*$ уравнениями

$$y_{51}=0,\quad y_{52}=a_1,\quad y_{41}=c,\quad y_{52}y_{21}+y_{53}y_{31}+y_{54}y_{41}=a_2c_1.$$

3. $S=\{(2,3)\}$. Тогда

$$L_S^+=\{(2,4)\},\quad L_S^-=\{(3,4)\},\quad L_S^0=\{1,5)\},$$
$$\Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^*\times\mathbb{F}_q=\{(a_1,a_2)\in\mathbb{F}_q^2\colon a_1\neq 0\},$$
$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ 0 & 0 & x_{23} & x_{24} & 0\\ 0 & 0 & 0 & x_{34} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_2 & 0 & 0\\ a_1 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на $\mathfrak{g}^*$ уравнениями

$$y_{51}=a_1,\quad \begin{vmatrix}y_{41} & y_{42}\\ y_{51} & y_{52}\end{vmatrix}=0,\quad \begin{vmatrix}y_{31} & y_{32}\\ y_{51} & y_{52}\end{vmatrix}=-a_1c_2,\quad \begin{vmatrix}y_{41} & y_{43}\\ y_{51} & y_{53}\end{vmatrix}=-a_1a_2.$$

4. $S=\{(1,4),\,(2,3)\}$. Тогда

$$L_S^+=\{(1,5),\,(2,5)\},\quad L_S^-=\{(3,5),\,(4,5)\},\quad L_S^0=\varnothing,$$
$$\Lambda_S\cong\mathbb{F}_q^2=\{(a_1,a_2)\colon a_1,a_2\in\mathbb{F}_q\},$$
$$\mathfrak{p}_S=\left\{\begin{pmatrix}0 & x_{12} & x_{13} & x_{14} & x_{15}\\ 0 & 0 & x_{23} & 0 & x_{25}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{35}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & x_{45}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\right\},\quad \lambda_{S,a}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & c_2 & 0 & 0 & 0\\ c_1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & a_1 & a_2 & 0\end{pmatrix}.$$

Коприсоединённая орбита $\Omega_{S,a}(\lambda)$ определяется на $\mathfrak{g}^*$ уравнениями

$$y_{51}=y_{52}=0,\quad y_{53}=a_1,\quad y_{41}=c_1,\quad y_{53}y_{31}+y_{54}y_{41}=a_2c_1,$$
$$\begin{vmatrix}y_{31} & y_{32}\\ y_{41} & y_{42}\end{vmatrix}=-c_1c_2.$$

Представление типа Гельфанда—Граева $V(\lambda)$ разлагается в сумму неприводимых представлений, соответствующих указанным выше орбитам. Число неприводимых компонент равно $(2q-1)^2$. Матрицы $X_{S,b}$ из теоремы 5.2 имеют вид

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&b_1\\0&1&0&0&b_2\\0&0&1&0&b_2\\0&0&0&1&b_1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0&b_1\\0&1&0&0&a_1\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&b_1\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&a_1\\0&1&0&a_1b_1&b_1\\0&0&1&0&b_1\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1&0&0&0&a_1\\0&1&0&a_1a_2&a_2\\0&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\\0&0&0&0&1\end{pmatrix},$$

где $b_1, b_2 \in \mathbb{F}_q^*$, $a_1, a_2 \in \mathbb{F}_q$.

Литература

[1] Гельфанд И. М., Граев М. И. Категории представлений групп и задача о классификации неприводимых представлений // ДАН СССР. — 1962. — Т. 146. — С. 757—760.

[2] Гельфанд И. М., Граев М. И. Конструкции неприводимых представлений простых алгебраических групп над конечным полем // ДАН СССР. — 1962. — Т. 147. — С. 529—532.

[3] Диксмье Ж. Универсальные обёртывающие алгебры. — М.: Мир, 1978.

[4] Игнатьев М. В., Панов А. Н. Коприсоединённые орбиты группы $\mathrm{UT}(7, K)$ // Фундам. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 5. — С. 127—159.

[5] Кириллов А. А. Унитарные представления нильпотентных групп Ли // Успехи мат. наук. — 1962. — Т. 17. — С. 57—110.

[6] Кириллов А. А. Лекции по методу орбит. — Новосибирск: Научная книга, 2002.

[7] Стейнберг Р. Лекции о группах Шевалле. — М.: Мир, 1975.

[8] André C. A. M. Basic characters of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — Vol. 175. — P. 287—319.

[9] André C. A. M. On the coadjoint orbits of the unitriangular group // J. Algebra. — 1995. — Vol. 180. — P. 587—630.

[10] André C. A. M. The regular character of the unitriangular group // J. Algebra. — 1998. — Vol. 201. — P. 1—52.

[11] André C. A. M. Basic characters of the unitriangular group (for arbitrary primes) // Proc. Am. Math. Soc. — 2002. — Vol. 130. — P. 1943—1954.

[12] André C. A. M. Hecke algebra for the basic representations of the unitriangular group // Proc. Am. Math. Soc. — 2003. — Vol. 132. — P. 987—996.

[13] Isaacs I. M., Karagueuzian D. Conjuracy in groups of upper triangular matrices // J. Algebra. — 1998. — Vol. 202. — P. 704—711.

[14] Kazhdan D. Proof of Springer's hypothesis // Israel J. Math. — 1977. — Vol. 28. — P. 272—286.

[15] Panov A. N. The orbit method for unipotent groups over finite field. — arXiv:1212.1980.

[16] Sangroniz J. Characters of algebra groups and unitriangular groups // Finite Groups. — Berlin: Walter de Gruyter, 2004. — P. 335—349.

[17] Yokonuma T. Sur la structure des anneaux de Hecke d'un groupe de Chevalley fini // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1967. — Vol. 264. — P. 344—347.