О значениях элементов частично упорядоченных групп

Е. Е. ШИРШОВА
Московский педагогический государственный университет
e-mail: shirshova.elena@gmail.com

УДК 512.545

Ключевые слова: частично упорядоченная группа, интерполяционная группа, выпуклая направленная подгруппа, почти ортогональные элементы.

Аннотация

Рассматриваются свойства выпуклых направленных подгрупп тех интерполяционных групп, в которых каждый элемент является частным двух почти ортогональных элементов. Получен ряд результатов о значениях почти ортогональных элементов таких групп. Исследуются свойства лексикографических расширений частично упорядоченных групп, в которых каждый элемент является частным двух почти ортогональных элементов.

Abstract

E. E. Shirshova, On values of elements in partially ordered groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 3, pp. 199—212.

We consider properties of convex directed subgroups for the interpolation groups in which each element is a quotient of two almost orthogonal elements. A series of results on values for almost orthogonal elements in those groups is obtained. We investigate characteristics of lexicographic extensions for partially ordered groups in which each element is a quotient of two almost orthogonal elements.

1. Введение

Пусть G — частично упорядоченная группа, e — единица группы G, множество $G^+ = \{x \in G \mid e \leqslant x\}$ — положительный конус группы G. Подгруппа M частично упорядоченной группы G называется *выпуклой*, если для всех элементов $a, b \in M$ и $g \in G$ из неравенств $a \leqslant g \leqslant b$ следует, что $g \in M$. Выпуклая направленная подгруппа M группы G называется *значением элемента* $g \in G$, если M является максимальной среди выпуклых направленных подгрупп, не содержащих элемента g.

В частично упорядоченной группе G для каждого элемента $a \in G^+$ $(a \neq e)$ существует выпуклая направленная подгруппа $[a]$, положительный конус которой состоит из элементов $x \in G^+$, удовлетворяющих неравенству $x \leqslant a^k$ для

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 3, с. 199—212.

некоторого целого числа $k > 0$ (подробнее см. [7, 10]). Из [9, теорема 3.5] следует, что если $e \neq g \in G^+$ в решёточно упорядоченной группе G, то существует взаимно-однозначное соответствие между множеством значений элемента g в группе G и множеством максимальных выпуклых l-подгрупп группы $[g]$.

Если G — частично упорядоченная группа и M — выпуклая подгруппа группы G, то, положив $M \leqslant Ma$ ($M \leqslant aM$), если $e \leqslant a'$ для некоторого элемента $a' \in Ma$ ($a' \in aM$), определим отношение частичного порядка на множестве всех правых (левых) смежных классов группы G по подгруппе M. Если M является выпуклой нормальной подгруппой группы G, то фактор-группа G/M — частично упорядоченная группа [1, гл. II, § 3, предложение 4]. В этом случае группа G называется *расширением частично упорядоченной группы M с помощью частично упорядоченной группы G/M*. Группа G называется *лексикографическим расширением частично упорядоченной группы M с помощью частично упорядоченной группы G/M*, если каждый строго положительный смежный класс в G/M состоит только из положительных элементов группы G. Из [9, теорема 3.6] следует, что если $e \neq g \in G^+$ в решёточно упорядоченной группе G и M — единственное значение элемента g в группе $[g]$, то $[g]$ является лексикографическим расширением группы M и $[g]/M$ — архимедова линейно упорядоченная группа.

Цель данной работы — характеризация значений элементов в более широких классах частично упорядоченных групп.

В работе используется обычная для частично упорядоченных групп терминология (см., например, [3]).

Напомним, что выпуклая направленная нормальная подгруппа частично упорядоченной группы называется *o-идеалом*. Элементы $a, b \in G^+$ частично упорядоченной группы G называются *почти ортогональными*, если для всех элементов $c \in G$ и всех целых чисел $n > 0$ из $c \leqslant a, b$ следует $c^n \leqslant a, b$. Частично упорядоченная группа G называется *$\mathcal{AO}$-группой*, если любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов a и b из G^+ (см. [8, 13]). Для o-идеалов всякой $\mathcal{AO}$-группы верны следующие утверждения.

Теорема 1. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, N — o-идеал группы G, M — o-идеал группы N и N является лексикографическим расширением M. Тогда множество*

$$S = \bigcup_{x \in G} x^{-1} M x$$

является o-идеалом группы G и N является лексикографическим расширением группы S.

Теорема 2. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа, N — o-идеал группы G, M — o-идеал группы N и N является лексикографическим расширением M. Тогда теоретико-множественное пересечение T выпуклых направленных подгрупп K группы N, удовлетворяющих условию $K \nsubseteq S$* (см. теорему 1)*, является o-идеалом группы G.*

Частично упорядоченная группа G называется *интерполяционной группой* (см., например, [12]), если для любых элементов $a_1, a_2, b_1, b_2 \in G$ из неравенств $a_1, a_2 \leqslant b_1, b_2$ следует существование элемента $c \in G$, для которого верны неравенства $a_1, a_2 \leqslant c \leqslant b_1, b_2$. Класс интерполяционных групп включает в себя классы решёточно упорядоченных групп (см. [1, 3]) и групп Рисса (см. [3, 11]). Если G — направленная интерполяционная группа, то для почти ортогональных элементов a и b в группе G существует выпуклая и направленная подгруппа $[a][b] = [b][a]$ (см. [8]).

Определение 1. Интерполяционная $\mathcal{AO}$-группа называется pl-группой.

В третьем разделе работы исследуются свойства выпуклых направленных подгрупп pl-групп. Для почти ортогональных элементов pl-группы справедлива следующая теорема.

Теорема 3. *Пусть G — pl-группа и элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G. Если M — значение элемента a в группе $[a][b]$, то справедливы следующие утверждения.*

1. *M — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a][b]$.*
2. *$M \cap [a]$ — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$.*

Выпуклая подгруппа частично упорядоченной группы называется *спрямляющей*, если множество левых (правых) смежных классов по этой подгруппе является линейно упорядоченным.

Следствие 1. *Пусть G — pl-группа и элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G. Если M — значение элемента a в группе $[a][b]$, то справедливы следующие утверждения.*

1. *M — спрямляющая направленная подгруппа в группе $[a][b]$.*
2. *$M \cap [a]$ — спрямляющая направленная подгруппа в группе $[a]$.*

Положительные элементы a и b частично упорядоченной группы называются *архимедово эквивалентными*, если существуют целые числа $m > 0$ и $n > 0$, для которых верны неравенства $a \leqslant b^m$ и $b \leqslant a^n$.

Учитывая определение 1, в pl-группе можно рассматривать идеалы S и T, о которых шла речь в теоремах 1 и 2.

Теорема 4. *Пусть G — pl-группа, N — o-идеал группы G, M — o-идеал группы N и N является лексикографическим расширением M. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $N \neq T$, то N является лексикографическим расширением группы T.*
2. *Множество $T \setminus S$ является линейно упорядоченным.*
3. *Если $a, b \in T^+ \setminus S$, то элементы a и b архимедово эквивалентны.*

Теорема 5. *Пусть G — pl-группа, элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G и $[a]$ — лексикографическое расширение o-идеала M. Если K — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$, то $M \subseteq K$.*

Доказательство следующих утверждений содержится в четвёртом разделе.

Теорема 6. *Пусть G — pl-группа и элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G. Тогда существует взаимно-однозначное отображение φ множества всех значений элемента a в группе $[a][b]$ на множество всех максимальных выпуклых направленных подгрупп группы $[a]$.*

Теорема 7. *Пусть G — pl-группа, элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G и M — единственная максимальная выпуклая направленная подгруппа группы $[a]$. Тогда справедливы следующие утверждения.*

1. *Группа $[a]$ является лексикографическим расширением группы M с помощью группы $[a]/M$.*
2. *Если $u, v \in [a]^+ \setminus M$, то элементы u и v сравнимы и архимедово эквивалентны.*

Если элементы a и b несравнимые, то будем писать $a \parallel b$.

2. О лексикографических расширениях $\mathcal{AO}$-групп

Начнём с некоторых свойств произвольных частично упорядоченных групп.

Предложение 1 [13, лемма 2]. *Если M — выпуклая направленная подгруппа частично упорядоченной группы G, $m \in M$ и $m = ab^{-1}$, где элементы a и b почти ортогональны в группе G, то $a, b \in M$.*

Предложение 2. *Пусть G — частично упорядоченная группа.*

1. *Если M — выпуклая направленная подгруппа группы G, то подгруппа $x^{-1}Mx$ также выпуклая и направленная в группе G для любого элемента $x \in G$* (см. [5, лемма 2.3]).
2. *Элементы a и b почти ортогональны в группе G в том и только в том случае, когда элементы $x^{-1}ax$ и $x^{-1}bx$ почти ортогональны в группе G для любого элемента $x \in G$* [8, лемма 2.1].

Из определения выпуклых направленных подгрупп несложно вывести справедливость следующего утверждения.

Предложение 3. *Пусть G — частично упорядоченная группа.*

1. *Если M и N — выпуклые направленные подгруппы группы G и $M \subset N$, то M — выпуклая направленная подгруппа группы N.*
2. *Если N — выпуклая направленная подгруппа группы G, а M — выпуклая направленная подгруппа группы N, то M — выпуклая направленная подгруппа в G.*

Предложение 4 [3, с. 23, предложение 1]. *Если G — частично упорядоченная группа, то следующие условия равносильны*:

1) *G — направленная группа*;
2) *для элемента e и каждого элемента $a \in G$ существует верхняя грань*;
3) *любой элемент $g \in G$ представи́м в виде $g = ab^{-1}$*, где $a, b \in G^+$.

Лемма 1. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если M и N — выпуклые подгруппы группы G и имеет место равенство $mn^{-1} = ab^{-1}$, где $m \in M^+$ и $n \in N^+$, а элементы a и b почти ортогональны в группе G, то $a \in M$ и $b \in N$.*

Доказательство. Из условия следует, что $m^{-1}a = n^{-1}b \leqslant a, b$. Значит, $(m^{-1}a)^2 \leqslant a$ и $(n^{-1}b)^2 \leqslant b$. Отсюда следует верность неравенств $a \leqslant m^2$ и $b \leqslant n^2$. □

Лемма 2. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа. Если M и N — выпуклые направленные подгруппы группы G и $M \parallel N$, то существуют элементы $a \in M \setminus N$ и $b \in N \setminus M$, которые почти ортогональны в группе G.*

Доказательство. По условию найдутся элементы $m \in M \setminus N$ и $n \in N \setminus M$. Не теряя общности, можно считать, что $m, n \in G^+$. Действительно, $m = xy^{-1}$, где элементы x и y почти ортогональны в группе G. По предложению 1 $x, y \in M$. Если $x \in N$, то $y \notin N$, иначе $m \in N$.

Рассмотрев элемент mn^{-1} как в лемме 1, найдём почти ортогональные элементы $a \in M$ и $b \in N$.

Если $a \in N$, то $m = ab^{-1}n \in N$, что приводит к противоречию. Таким образом, $a \notin N$.

Аналогично доказывается, что $b \notin M$. □

Из леммы 2 вытекает справедливость следующего утверждения.

Следствие 2. *Пусть G — $\mathcal{AO}$-группа. Если $M \neq N$ — значения элемента $g \in G$, то существуют элементы $a \in M \setminus N$ и $b \in N \setminus M$, которые почти ортогональны в группе G.*

Предложение 5 [6, лемма 1.4]. *Частично упорядоченная группа G является лексикографическим расширением выпуклой нормальной подгруппы M в том и только в том случае, когда для любых элементов $a \in G^+ \setminus M$ и $m \in M$ справедливо неравенство $m < a$.*

Предложение 6 [8, лемма 4]. *Пусть G — частично упорядоченная группа. Если элементы a и b почти ортогональны в группе G, то из неравенства $a \leqslant b$ всегда следует равенство $a = e$.*

Пусть далее до конца раздела G — $\mathcal{AO}$-группа, N — o-идеал группы G, M — o-идеал группы N и N является лексикографическим расширением подгруппы M.

Лемма 3. *Если $x, y \in G \setminus N$, то выпуклые направленные подгруппы $x^{-1}Mx$ и $y^{-1}My$ сравнимы в группе N относительно включения.*

Доказательство. Рассмотрим подгруппы $A = x^{-1}Mx$ и $B = y^{-1}My$ группы G.

Так как M — выпуклая направленная подгруппа в N, то по предложению 3 M — выпуклая направленная подгруппа в группе G. В этом случае по предложению 2 подгруппы A и B являются выпуклыми и направленными подгруппами в группе G и являются подгруппами группы N, так как N — o-идеал группы G. Значит, по предложению 3 подгруппы A и B выпуклые и направленные в группе N.

Если $A \parallel B$, то по лемме 2 существуют элементы $u = x^{-1}mx$ и $v = y^{-1}ny$ для некоторых $m, n \in M$, которые почти ортогональны в $\mathcal{AO}$-группе G, при этом $u \in A \setminus B$ и $v \in B \setminus A$. Тогда по предложению 2 элементы $m = xux^{-1}$ и $z = xvx^{-1}$ также являются почти ортогональными в группе G.

Так как $v \in N$ и N — o-идеал группы G, то $z \in N$.

Если элемент $z \in M$, то $v = x^{-1}zx \in A$, что противоречит выбору элемента v. Таким образом, $z \notin M$, тогда по предложению 5 $m < z$, т. е. по предложению 6 $m = e$, следовательно, $u = e$, что противоречит выбору элемента u. □

Лемма 4. *Пусть $A \subset B$, где $A = x^{-1}Mx$ и $B = y^{-1}My$ для некоторых элементов $x, y \in G \setminus N$. Тогда для любых элементов $u \in A$ и $v \in B^+ \setminus A$ имеет место неравенство $u < v$.*

Доказательство. Пусть $u = x^{-1}mx$ для некоторого элемента $m \in M$. Рассмотрим элемент $z = xvx^{-1}$ в группе G.

Из доказательства леммы 3 следует, что $B \subseteq N$, поэтому $v \in N^+$, и, так как N — o-идеал группы G, получаем, что $z \in N$.

Если $z \in M$, то $v = x^{-1}zx \in A$, что противоречит выбору элемента v. Таким образом, $z \notin M$. Тогда по предложению 5 справедливо неравенство $m < z$. Следовательно, $u = x^{-1}mx < x^{-1}zx = v$. □

Лемма 5. *Для любого элемента $x \in G$ подгруппы $A = x^{-1}Mx$ и M сравнимы в группе N относительно включения.*

Доказательство. Если $x \in N$, то $A \subseteq M$, так как M — o-идеал группы N.

Если $A \parallel M$, то по лемме 2 существуют элементы $u = x^{-1}mx$ и n для некоторых $m, n \in M$, которые почти ортогональны в $\mathcal{AO}$-группе G, при этом $u \in A \setminus M$ и $n \notin A$. Тогда по предложению 2 элементы $m = xux^{-1}$ и $z = xnx^{-1}$ также являются почти ортогональными в группе G.

Так как $n \in N$ и N — o-идеал группы G, то $z \in N$.

Если $z \in M$, то $n = x^{-1}zx \in A$, что противоречит выбору элемента n. Таким образом, $z \notin M$. Тогда по предложению 5 $m < z$, т. е. по предложению 6 $m = e$, следовательно, $u = e$, что противоречит выбору элемента u. □

Лемма 6. *Множество*

$$S = \bigcup_{x \in G} x^{-1}Mx$$

является выпуклой направленной подгруппой группы N.

Доказательство. Рассмотрим в группе N множество подгрупп $x^{-1}Mx$ для всех элементов $x \in G \setminus N$. По лемме 3 эти подгруппы образуют цепь. Нетрудно показать, что объединение цепи выпуклых направленных подгрупп частично упорядоченной группы является выпуклой направленной подгруппой этой группы. Поэтому множество

$$S = \bigcup_{x\in G\setminus N} x^{-1}Mx$$

является выпуклой направленной подгруппой в группе N. По лемме 5 $M \subseteq S$.

Так как M является o-идеалом группы N, то $x^{-1}Mx \subseteq M$ для любого элемента $x \in N$, поэтому $x^{-1}Mx \subseteq S$. Таким образом, можно считать, что

$$S = \bigcup_{x\in G} x^{-1}Mx. \qquad \square$$

Лемма 7. *Если M — o-идеал группы G, то $S = M$. Если M не является идеалом группы G, то $M \subset S$.*

Доказательство. Если M не является o-идеалом группы G, то существует элемент $x \in G\setminus N$, для которого подгруппа $x^{-1}Mx$ не включена в подгруппу M. В этом случае по лемме 5 имеет место включение $M \subset x^{-1}Mx$. $\square$

Доказательство теоремы 1. По лемме 6 подгруппа S выпуклая и направленная в группе N, и по предложению 3 она является выпуклой и направленной подгруппой группы G.

Пусть далее $g \in G$ и $k \in S$. Тогда $k = x^{-1}mx$ для некоторых элементов $x \in G$ и $m \in M$. Значит,

$$g^{-1}kg = g^{-1}(x^{-1}mx)g = (xg)^{-1}m(xg) = y^{-1}my$$

для $y = xg \in G$, т. е. $g^{-1}kg \in y^{-1}My$. Следовательно, $g^{-1}kg \in S$, и S — нормальная подгруппа группы G.

Пусть далее $a \in N^+ \setminus S$ и $b \in S$. Тогда $b = x^{-1}mx$ для некоторых элементов $x \in G$ и $m \in M$.

Рассмотрим элемент $y = xax^{-1}$ в группе G. Так как $a \in N$ и N — o-идеал группы G, то $y \in N$.

Если $y \in S$, то по доказанному выше $a = x^{-1}yx \in S$, что противоречит выбору элемента a. Значит, $y \notin S$. Так как $y \in N^+$ и $y \notin M$, то по предложению 5 $m < y$.

Таким образом, $m < xax^{-1}$, т. е. $b = x^{-1}mx < a$.

Применение к группам N и S предложения 5 завершает доказательство. $\square$

Предложение 7 [13, теорема 1]. *Пересечение выпуклых направленных подгрупп $\mathcal{AO}$-группы является выпуклой направленной подгруппой этой группы.*

Рассмотрим теперь пересечение T всех выпуклых направленных подгрупп K группы N, для которых $K \nsubseteq S$.

Лемма 8. *T — выпуклая направленная подгруппа группы N. Кроме того, $S \subseteq T$.*

Доказательство. Пусть K — выпуклая направленная подгруппа в N, удовлетворяющая условию $K \nsubseteq S$.

Так как по предложению 3 подгруппа K является выпуклой направленной подгруппой группы G, то по предложению 7 T — выпуклая направленная подгруппа в G. Значит, по предложению 3 T — выпуклая направленная подгруппа в группе N.

Из выбора подгруппы K следует существование элемента $k \in K^+ \setminus S$. Тогда по предложению 5 для любого элемента $s \in S^+$ справедливо неравенство $s < k$, так как по теореме 1 N — лексикографическое расширение подгруппы S.

Так как подгруппа K является выпуклой в группе N, то $S^+ \subseteq K$. Из направленности подгруппы S по предложению 4 следует верность включения $S \subseteq K$. □

Замечание. Если K — выпуклая направленная подгруппа группы N, то имеет место одно из включений: $K \subseteq S$ или $S \subset K$.

Предложение 8 [8, лемма 2.2]. *Пусть $e < a$ в частично упорядоченной группе G. Тогда имеет место равенство подгрупп $[x^{-1}ax] = x^{-1}[a]x$ для любого элемента $x \in G$.*

Доказательство теоремы 2. Если $T = S$, то воспользуемся теоремой 1. Пусть $T \neq S$. Рассмотрим элементы $x \in G$ и $t \in T^+$.

Если $t \in S$, то $x^{-1}tx \in S$, так как по теореме 1 S — o-идеал группы G.

Пусть $t \notin S$. Рассмотрим элемент $v = xtx^{-1}$. Тогда $v \in N$, так как N — o-идеал группы G.

Если $v \in S$, то $t = x^{-1}vx \in S$, так как по теореме 1 S — o-идеал группы G. Но это противоречит выбору элемента t. Значит, $v \notin S$, поэтому выпуклая направленная подгруппа $[v]$ не содержится в S. Таким образом, с учётом предложения 8

$$T \subseteq [v] = [xtx^{-1}] = x[t]x^{-1}.$$

Следовательно, $t = xkx^{-1}$ для некоторого элемента $k \in [t]$. Тогда $k \leqslant t^n$ для некоторого целого числа $n > 0$. Отсюда следует неравенство $t \leqslant xt^nx^{-1}$. Из последнего неравенства следует, что $x^{-1}tx \leqslant t^n$, откуда заключаем, что $x^{-1}tx \in [t]$, т. е. $x^{-1}tx \in T$. Таким образом, $x^{-1}T^+x \subset T$ для любого $x \in G$.

Рассмотрим элемент $z \in x^{-1}Tx$. Из предложения 4 следует, что $z = uv^{-1}$ для положительных элементов $u, v \in x^{-1}Tx$. В этом случае существуют элементы t и r из T^+, для которых $u = x^{-1}tx$ и $v = x^{-1}rx$.

Из доказанного выше следует, что $u, v \in T$, поэтому $z \in T$ и $x^{-1}Tx \subset T$, что доказывает нормальность подгруппы T в группе G.

Применение леммы 8 завершает доказательство теоремы. □

3. Свойства o-идеалов pl-групп

Нам понадобятся следующие утверждения.

Предложение 9 [7, теорема 2.6]. *Пусть G — частично упорядоченная группа, $a, b \in G^+$. Тогда следующие условия равносильны:*

1) *подгруппы* $[a]$ *и* $[b]$ *равны*;
2) *элементы* a *и* b *архимедово эквивалентны*;
3) *множества значений элементов* a *и* b *совпадают.*

Предложение 10 [6, теорема 1.1]. *Пусть* G — pl*-группа,* $a, b \in G^+$*. Тогда следующие условия равносильны*:

1) *элементы* a *и* b *почти ортогональны в группе* G;
2) *каждый из элементов* a *и* b *принадлежит всем значениям другого.*

Из определения 1 следует, что каждая pl-группа является группой Рисса, поэтому справедливо следующее утверждение.

Предложение 11 [8, теорема 4]. *Если элементы* a *и* b *почти ортогональны в* pl*-группе* G*, то элементы* a^m *и* b^n *почти ортогональны в группе* G *для любых целых чисел* $m > 0$ *и* $n > 0$.

В силу определения 1 для pl-группы G справедливы все утверждения второго раздела статьи.

Доказательство теоремы 4.

1. Пусть $a \in N^+ \setminus T$ и $t \in T^+$. Если $t \in S$, то по теореме 1 $t < a$.

Рассмотрим элемент $t \notin S$. В этом случае $at^{-1} = xy^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов x и y группы G. Тогда по лемме 1 $y \in T$ и $x \in N$.

Если $x \in T$, то $a \in T$, что противоречит выбору элемента a. Значит, $x \in N \backslash T$. Тогда выпуклая направленная подгруппа $[x]$ не включена в S, поэтому $T \subseteq [x]$. Это означает, что $y \in [x]$, т. е. существует целое число $k > 0$, для которого $y \leqslant x^k$.

По предложению 11 элементы x^k и y почти ортогональны в группе G, отсюда по предложению 6 следует, что $y = e$. Тогда $at^{-1} = x > e$. Следовательно, $t < a$.

Если $t \parallel e$, то $t = uv^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов u и v группы G. Тогда по доказанному $t \leqslant u < a$. Если $t < e$, то $t < a$.

Остаётся применить к N и T предложение 5.

3. По условию $a, b \notin S$, поэтому подгруппы $[a]$ и $[b]$ не включены в S. Имеют место включения $T \subseteq [a]$ и $T \subseteq [b]$, откуда следует, что $[a] = T = [b]$. Из предложения 9 следует справедливость утверждения 3.

2. Если $g \in T \backslash S$, то $g = uv^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов u и v группы G.

Если $u, v \notin S$, то по доказанному выше $[u] = [v]$ и по предложению 9 множества значений этих элементов совпадают, что по предложению 10 противоречит почти ортогональности данных элементов.

Таким образом, либо $u \in S$ и $v \notin S$, либо $v \in S$ и $u \notin S$. В первом случае по теореме 1 и предложению 5 $u < v$, т. е. $g < e$. Во втором случае $v < u$, т. е. $e < g$.

Теорема полностью доказана. □

Предложение 12. *Пусть G — pl-группа. Если элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G, то имеют место следующие утверждения* [8, теорема 3]:

1) *множество $[a][b] = [b][a]$ — выпуклая направленная подгруппа группы G;*
2) *подгруппа $[a] \cap [b]$ — o-идеал групп $[a]$ и $[b]$;*
3) *подгруппы $[a]$ и $[b]$ являются o-идеалами группы $[a][b]$.*

Кроме того, в группе G существует выпуклая направленная подгруппа $H(a,b) = [a] \cap [b]$ и для любого элемента $x \in H(a,b)$ имеют место неравенства $x < a, b$ [8, теорема 5].

Предложение 13. *Пусть G — интерполяционная группа. Если для элементов $x, a, b \in G^+$ справедливо неравенство $x \leqslant ab$, то $x = cd$ для некоторых элементов $c, d \in G^+$, где $c \leqslant a$ и $d \leqslant b$.*

Предложение 14 [2, гл. I, § 4]. *Если в произвольной группе G подгруппа A включена в нормализатор подгруппы B, то $AB = BA$ — подгруппа группы G.*

Лемма 9. *Пусть в произвольной группе G подгруппа A включена в нормализатор подгруппы B. Если M и N — подгруппы группы AB, $M \parallel N$ и $B \subset M \cap N$, то $M \cap A \parallel N \cap A$.*

Доказательство. По условию найдутся элементы $m \in M \setminus N$ и $n \in N \setminus M$. В этом случае $m = a_1 b_1$ и $n = a_2 b_2$ для некоторых элементов $a_1, a_2 \in A \setminus \{e\}$ и $b_1, b_2 \in B$. Значит, $a_1 \in M$ и $a_1 \notin N$, иначе $m \in N$. Следовательно, $a_1 \in M \cap A$ и $a_1 \notin N \cap A$.

С другой стороны, $a_2 \in N$, но $a_2 \notin M$, иначе $n \in M$. Поэтому $a_2 \in N \cap A$ и $a_2 \notin M \cap A$. □

Предложение 15 [4, теорема 1.1]. *Если $g \neq e$ в частично упорядоченной группе G и $g \notin M$ для некоторой выпуклой направленной подгруппы M группы G, то существует значение N элемента g в группе G, для которого $M \subseteq N$.*

Пусть далее до конца статьи G — pl-группа и элементы a и b из G^+ почти ортогональны в группе G.

Доказательство теоремы 3.

1. Пусть $M \subset C \subseteq [a][b]$ для некоторой выпуклой направленной подгруппы C в группе $[a][b]$. Из предложения 10 следует, что $b \in M$, т. е. $b \in C$. С другой стороны, $a \in C$, так как M — значение a, поэтому $[a][b] \subseteq C$. Значит, $C = [a][b]$, и подгруппа M максимальна в группе $[a][b]$.

2. Из определения 1 и предложения 7 следует, что $M \cap [a]$ — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a][b]$. Поэтому по предложению 3 $M \cap [a]$ — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$.

Пусть $M \cap [a] \subset D \subset [a]$ для некоторой выпуклой направленной подгруппы D в группе $[a]$. Тогда по предложению 3 D — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a][b]$. При этом $a \notin D$. Значит, по предложению 15 существует значение N элемента a в группе $[a]]b]$, для которого $D \subseteq N$. В этом случае $M \neq N$, т. е. $M \parallel N$, и в силу предложения 10 $[b] \subseteq M \cap N$. Отсюда по лемме 9 получаем $M \cap [a] \parallel N \cap [a]$.

С другой стороны, имеют место включения $M \cap [a] \subset D \subseteq N \cap [a]$.

Полученное противоречие доказывает максимальность подгруппы $M \cap [a]$ в группе $[a]$. Теорема доказана полностью. $\square$

Предложение 16 [5, предложение 1.5]. *Пусть G — pl-группа. Для любой выпуклой направленной подгруппы M группы G следующие условия равносильны:*

1) *M — спрямляющая направленная подгруппа G;*
2) *M содержит хотя бы один элемент из каждой пары почти ортогональных элементов группы G.*

Доказательство следствия 1.

1. Покажем, что если элементы u и v почти ортогональны в группе $[a][b]$, то $u \in M$ или $v \in M$.

Если $u \notin M$, то по предложению 15 существует значение N элемента u в группе $[a][b]$, для которого верно включение $M \subseteq N$. Так как по теореме 3 подгруппа M является максимальной выпуклой направленной подгруппой группы $[a][b]$, то $M = N$. Но по предложению 10 это означает, что $v \in M$. Иначе $u \in M$. Таким образом, подгруппа M удовлетворяет условию 2) предложения 16.

2. Пусть элементы u и v почти ортогональны в группе $[a]$.

Если $u \notin M \cap [a]$, то по предложению 15 существует значение N элемента u в группе $[a]$, для которого верно включение $M \cap [a] \subseteq N$. Отсюда по теореме 3 ввиду максимальности подгруппы $M \cap [a]$ в группе $[a]$ получаем, что $M = N$. Но это означает, что $v \in M \cap [a]$. Иначе $u \in M \cap [a]$. Таким образом, подгруппа $M \cap [a]$ удовлетворяет условию 2) предложения 16. Следствие доказано. $\square$

Нам понадобится следующее предложение.

Предложение 17 [13, следствие 3.3]. *Если M — выпуклая направленная подгруппа $\mathcal{AO}$-группы G и $b \notin M$, то существует выпуклая направленная подгруппа (M, b) в группе G, для которой*

$$(M, b)^+ = \{x \mid x \leqslant m_1 b m_2 b \ldots m_k b m_{k+1}, \text{ где } m_i \in M^+\}.$$

Лемма 10. *Пусть M — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. Тогда $H(a, b) \subseteq M$ (см. предложение 12).*

Доказательство. Пусть, от противного, существует элемент $h \in H(a, b) \setminus M$. Не теряя общности, можно считать, что $e \leqslant h$.

По определению 1 и предложению 17 существует выпуклая направленная подгруппа (M, h) в группе $[a]$, для которой верны включения $M \subset (M, h) \subseteq [a]$. Тогда в силу максимальности подгруппы M в группе $[a]$ справедливо $(M, h) = [a]$. Значит, $a \leqslant m_1 h m_2 h \ldots m_k h m_{k+1}$ для некоторых элементов $m_i \in M^+$.

Так как по определению 1 G — интерполяционная группа, то по предложению 13 $a = c_1 d_1 c_2 d_2 \ldots c_k d_k c_{k+1}$ для некоторых элементов $c_i \in M^+$ и $d_j \in H(a, b)^+$, так как подгруппы M и $H(a, b)$ являются выпуклыми в группе $[a]$.

Так как по предложению 12 $H(a,b)$ — o-идеал в группе $[a]$, то $x = uv$, где $u = c_1c_2\dots c_{k+1}$ и

$$v = d_1^{c_2c_3\dots c_{k+1}} d_2^{c_3c_4\dots c_{k+1}} \dots d_k^{c_{k+1}}$$

(здесь $d_j^g = g^{-1}d_jg$). Отсюда следует, что $u^{-1}a = v \leqslant a, b$. Таким образом, $(u^{-1}a)^2 \leqslant a$, т. е. $a \leqslant u^2$, и $a \in M$, чего быть не может. Следовательно, $H(a,b)^+ \subseteq M$. Остаётся применить предложение 4. □

Доказательство теоремы 5. Пусть, от противного, существует элемент $m \in M \setminus K$. Не теряя общности, можно считать, что $e \leqslant m$.

По предложению 17 существует выпуклая направленная подгруппа (K,m) в группе $[a]$, для которой верны включения $K \subset (K,m) \subseteq [a]$. Тогда ввиду максимальности подгруппы K в группе $[a]$ имеем $(K,m) = [a]$. Значит, $a \leqslant k_1mk_2h\dots k_smk_{s+1}$ для некоторых элементов $k_i \in K^+$.

Так как по определению 1 G — интерполяционная группа, то по предложению 13 $a = c_1d_1c_2d_2\dots c_kd_kc_{k+1}$ для некоторых элементов $c_i \in K^+$ и $d_j \in M^+$, так как подгруппы M и K являются выпуклыми в группе $[a]$.

Так как M — o-идеал в группе $[a]$, то $a = uv$, где $u = c_1c_2\dots c_{k+1}$ и

$$v = d_1^{c_2c_3\dots c_{k+1}} d_2^{c_3c_4\dots c_{k+1}} \dots d_k^{c_{k+1}}$$

(здесь $d_j^g = g^{-1}d_jg$). Таким образом, $u \in K$ и $v \in M$. Если $u \in K \setminus M$, то по предложению 5 $v < u$, т. е. $a < u^2$, и $a \in M$, чего быть не может.

При условии $u \in M$ также приходим к противоречию. Значит, $M \subseteq K$. □

4. О значениях элементов в группе $[a][b]$

Лемма 11. *Пусть M — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. Тогда существует выпуклая направленная подгруппа (M,b) в группе $[a][b]$, для которой*

$$(M,b)^+ = \{uv \mid u \in M^+,\ v \in [b]^+\}.$$

Доказательство. Так как $b \notin M$ (иначе $b \in [a]$), то по предложению 17 в группе $[a][b]$ существует выпуклая направленная подгруппа (M,b).

Пусть $x \in (M,b)$ и $e < x$. Тогда по предложению 17 $x \leqslant m_1bm_2b\dots m_kbm_{k+1}$ для некоторых элементов $m_i \in M^+$.

Так как по определению 1 G — интерполяционная группа, то по предложению 13 $x = c_1d_1c_2d_2\dots c_kd_kc_{k+1}$ для некоторых элементов $c_i \in M^+$ и $d_j \in [b]^+$, так как подгруппы M и $[b]$ являются выпуклыми в группе $[a][b]$.

Так как по предложению 12 $[b]$ — o-идеал в группе $[a][b]$, то $x = uv$, где $u = c_1c_2\dots c_{k+1}$ и $v = d_1{}^{c_2c_3\dots c_{k+1}} d_2^{c_3c_4\dots c_{k+1}} \dots d_k^{c_{k+1}}$ (здесь $d_j^g = g^{-1}d_jg$). □

Лемма 12. *Пусть M — максимальная выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$. Тогда подгруппа (M,b) является значением элемента a в группе $[a][b]$.*

Доказательство. По лемме 11 существует выпуклая направленная подгруппа (M, b) в группе $[a][b]$, для которой $(M,b)^+ = \{uv \mid u \in M^+,\ v \in [b]^+\}$.

Если $a \in (M, b)$, то $a = uv$ для некоторых элементов $u \in M^+$ и $v \in [b]^+$. Так как $v \leqslant a$, то $v \in [a]$, т. е. $v \in H(a, b)$, откуда по лемме 10 следует, что $v \in M$. Значит, $a \in M$, что противоречит максимальности подгруппы M в группе $[a]$. Таким образом, $a \notin (M, b)$. В этом случае по предложению 15 в группе $[a][b]$ существует значение N элемента a, для которого $(M, b) \subseteq N$.

Пусть $(M, b) \subset N$. Тогда найдётся элемент $n \in N \setminus (M, b)$. Так как $n \in [a][b]$, то $n = xy$ для некоторых элементов $x \in [a]$ и $y \in [b]$. В этом случае $x \in N \setminus M$. Не теряя общности, можно считать, что $x \in [a]^+$. Тогда по предложению 17 существует выпуклая направленная подгруппа (M, x) в группе $[a]$, удовлетворяющая включениям $M \subset (M, x) \subseteq [a]$. Отсюда ввиду максимальности подгруппы M в группе $[a]$ получаем, что $[a] = (M, x)$. Но это означает, что $a \in N$, что противоречит выбору подгруппы N. Следовательно, $(M, b) = N$. □

Доказательство теоремы 6. Пусть M — некоторое значение элемента a в группе $[a][b]$. Положим $\varphi(M) = M \cap [a]$. По теореме 3 пересечение $M \cap [a]$ является максимальной выпуклой направленной подгруппой в группе $[a]$.

Если $N \neq M$ и N — значение элемента a в группе $[a][b]$, то $M \parallel N$ и $[b] \subseteq M \cap N$. Тогда по лемме 9 $\varphi(M) \neq \varphi(N)$.

Пусть K — максимальная выпуклая направленная подгруппа группы $[a]$. По лемме 12 существует значение (K, b) элемента a в группе $[a][b]$. В этом случае $\varphi\big((K, b)\big) = (K, b) \cap [a]$ и, очевидно, $K \subseteq (K, b) \cap [a]$.

Рассмотрим элемент $x \in (K, b) \cap [a]$, где $e \leqslant x$. Тогда по лемме 11 $x = uv$ для некоторых элементов $u \in K^+$ и $v \in [b]^+$. Значит, $v \in H(a, b)$, и по лемме 10 $v \in K$, т. е. $x \in K$. Таким образом, $(K, b) \cap [a] \subseteq K$. Следовательно, функция φ является сюръективной. Теорема доказана. □

Доказательство теоремы 7.

1. Так как по предложению 2 для любого элемента $g \in [a]$ подгруппа $g^{-1}Mg$ выпуклая и направленная в группе $[a]$, то $g^{-1}Mg \subseteq M$ по условию леммы. Значит, M — o-идеал группы $[a]$.

Пусть $e \leqslant x \in [a] \setminus M$ и $m \in M$. Рассмотрим элемент $g = xm^{-1}$. Заметим, что неравенство $g \leqslant e$ приводит к противоречию из-за выпуклости подгруппы M в группе $[a]$.

Если $g \parallel e$, то $g = uv^{-1}$ для некоторых почти ортогональных элементов u и v в группе G. Тогда по предложению 1 $u, v \in [a]$. Как было установлено при доказательстве следствия 1, $u \in M$ или $v \in M$.

Если $u \in M$, то $g \in M$, так как подгруппа M выпукла в группе $[a]$, т. е. $x \in M$, что противоречит выбору элемента x.

Пусть $v \in M$. Если $u \notin M$, то по предложению 15 существует значение N элемента u в группе $[a]$, для которого верно включение $M \subseteq N$. Отсюда ввиду максимальности подгруппы M в группе $[a]$ получаем, что $M = N$. Но это означает, что $v \in M$. Пришли к противоречию с выбором элемента v. Следовательно, $e < g$ и $m < x$. Остаётся применить к группам $[a]$ и M предложение 5.

2. Так как M — выпуклая направленная подгруппа в группе $[a]$, то по предложению 3 подгруппа M является выпуклой и направленной в группе $[a][b]$. Тогда по предложению 2 подгруппа $g^{-1}Mg$ выпуклая и направленная в группе $[a][b]$ для любого элемента $g \in [a][b]$. Так как, по предложению 12 $[a]$ — o-идеал группы $[a][b]$, то $g^{-1}Mg$ — подгруппа в группе $[a]$. Тогда по предложению 3 подгруппа $g^{-1}Mg$ выпуклая и направленная в группе $[a]$ для любого элемента $g \in [a][b]$. Следовательно, по условию леммы $g^{-1}Mg \subseteq M$ для любого элемента $g \in [a][b]$. Значит, M — o-идеал группы $[a][b]$.

Так как по [4, теорема 2.5] $[a][b]$ — pl-группа, то по доказанному для групп $[a][b]$, $[a]$ и M справедливы условия теоремы 4. Кроме того, по лемме 7 в группе $[a][b]$ справедливо равенство $S = M$. Тогда по условию теоремы $T = [a]$.

Применение теоремы 4 завершает доказательство. □

Литература

[1] Копытов В. М. Решёточно упорядоченные группы. — М.: Наука, 1984.

[2] Ленг С. Алгебра. — М.: Мир, 1968.

[3] Фукс Л. Частично упорядоченные алгебраические системы. — М.: Мир, 1965.

[4] Ширшова Е. Е. О псевдо структурно упорядоченных группах // Группы и модули. Теория игр.: Сб. тр. МОПИ им. Н. К. Крупской. — М., 1973. — С. 10—18.

[5] Ширшова Е. Е. Ассоциированные подгруппы псевдо решёточно упорядоченных групп // Алгебраические системы.: Сб. тр. Ивановск. гос. ун-та. — Иваново, 1991. — С. 78—85.

[6] Ширшова Е. Е. Лексикографические расширения и pl-группы // Фундамент. и прикл. мат. — 1995. — Т. 1, вып. 4. — С. 1133—1138.

[7] Ширшова Е. Е. О гомоморфизмах pl-групп // Фундамент. и прикл. мат. — 1997. — Т. 3, вып. 1. — С. 303—314.

[8] Ширшова Е. Е. Об обобщении понятия ортогональности и группах Рисса // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, вып. 1. — С. 122—132.

[9] Conrad P. The lattice of all convex l-subgroups of lattice-ordered group // Czech. Math. J. — 1965. — Vol. 15. — P. 101—123.

[10] Conrad P. Representation of partially ordered Abelian groups as groups of real valued functions // Acta Math. — 1966. — Vol. 116. — P. 199—221.

[11] Fuchs L. Riesz groups // Ann. Scu. Norm. Sup. Pisa. — 1965. — Vol. 19, no. 3. — P. 1—34.

[12] Glass A. M. W. Polars and their application in directed interpolation groups // Trans. Am. Math. Soc. — 1972. — Vol. 166. — P. 1—25.

[13] Shirshova E. E. On groups with the almost orthogonality condition // Commun. Algebra. — 2000. — Vol. 28, no. 10. — P. 4803—4818.