Стабильные группы над ассоциативными кольцами с $1/2$. Описание изоморфизмов стабильных унитарных групп

А. С. АТКАРСКАЯ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: atkarskaya.agatha@gmail.com

УДК 512.643

Ключевые слова: стабильная унитарная группа, ассоциативное кольцо с инволюцией, изоморфизм.

Аннотация

В работе рассматриваются стабильные унитарные группы над ассоциативными кольцами с $1/2$ и изоморфизмы между ними. Описывается действие изоморфизмов на стабильной унитарной элементарной подгруппе.

Abstract

A. S. Atkarskaya, Stable groups over associative rings with $1/2$. *Description of isomorphisms of the stable unitary groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 3—21.

In this paper, we consider the stable unitary groups over associative rings with $1/2$ and isomorphisms between them. We describe the action of the isomorphisms on the stable elementary unitary subgroup.

Описание автоморфизмов линейных групп было начато в работе О. Шрайера и Б. Л. ван дер Вардена [12], где были описаны автоморфизмы группы PSL_n, $n \geqslant 3$, над произвольным полем. Затем примененный в этой работе метод был обобщён в [7], и с его помощью Л. К. Хуа [7] описал автоморфизмы симплектических групп над полем характеристики, не равной 2. Далее Ж. Дьёдонне [5] и Ч. Риккарт [11] с помощью введённого ими метода инволюций описали автоморфизмы симплектических и унитарных групп над телами характеристики, не равной 2. В 1968—1969 годах О. Т. О'Мира [10] с помощью метода вычетных пространств описал автоморфизмы симплектических групп над полями специального вида (так называемые *поля, богатые трансвекциями*). Описание автоморфизмов унитарных групп размерности не меньше 6 над бесконечными полями было завершено в 1974 году А. А. Джонсоном [8].

Л. Маккуин и Б. Р. Макдональд [9] получили описание автоморфизмов групп Sp_n размерности не меньше 6 над коммутативным локальным кольцом,

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 3—21.

содержащим $1/2$. Продолжая работу в этом направлении, в 1980 году В. М. Петечук [3] описал автоморфизмы симплектических групп над произвольным коммутативным локальным кольцом. В 1983 году, применив метод локализации, В. М. Петечук [4] обобщил результаты работ [9] и [3] на случай $\mathrm{Sp}_n(R)$, $n \geqslant 6$, над произвольным коммутативным кольцом R.

В 1983 году И. З. Голубчиком и А. В. Михалёвым [1] было получено описание изоморфизмов между унитарными группами над произвольными ассоциативными кольцами, содержащими $1/2$, с некоторыми специальными ограничениями на размерность группы. В данной работе рассматриваются изоморфизмы между подгруппами матриц счётного размера, так называемыми *стабильными унитарными группами*.

1. Основные определения

Пусть R — произвольное ассоциативное кольцо с единицей. Основные определения взяты из [2, 6].

Обозначим через $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ множество матриц со счётным числом строк и столбцов, у которых вне главной диагонали есть лишь конечное число ненулевых элементов, а также существует такой номер n, что для любого $i \geqslant n$ элементы матрицы r_{ii} равны a, $a \in R$. Ясно, что $\mathrm{Mat}_\infty(R)$ — это кольцо.

Обозначим через $\mathrm{FMat}(R)$ подкольцо кольца $\mathrm{Mat}_\infty(R)$, состоящее из матриц, содержащих конечное число ненулевых элементов.

Обозначим через $\mathrm{Mat}(R)$ матрицы со счётным числом строк и столбцов, такие что в каждом столбце содержится лишь конечное число ненулевых элементов (кольцо эндоморфизмов свободного модуля $V = \bigoplus R$ счётного ранга при фиксации базиса).

Обозначим через $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ кольцо $\mathrm{Mat}_2\big(\mathrm{Mat}_\infty(R)\big)$.

Подмножество $\{f_{ij}\}$, $i, j \in \mathbb{N}$, кольца $\mathrm{Mat}(R)$ называется *системой матричных единиц*, если $f_{ij} f_{st} = \delta_{js} f_{it}$ (δ_{js} — символ Кронекера).

Будем обозначать через E_n единичную матрицу размера $n \times n$, через E_∞ — единичную матрицу счётного размера, через E — единичную матрицу кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$.

Инволюцией на кольце R называется антиавтоморфизм порядка 2. Пусть R — кольцо с инволюцией τ и

$$Q_n = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}.$$

Инволюция τ индуцирует инволюцию на кольце $\mathrm{Mat}_{2n}(R)$ по правилу

$$(a_{ij}) \mapsto Q_n^{-1}(x_{ij})Q_n, x_{ij} = a_{ji}^\tau.$$

Будем обозначать это отображения также τ.

Унитарной группой $\mathrm{U}_{2n}(R)$ над кольцом R с инволюцией τ называется группа матриц $A \in \mathrm{Mat}_{2n}(R)$, таких что $A^\tau A = E_{2n}$.

Пусть

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix},$$

$X, Y, V, W \in \mathrm{Mat}_n(R)$, принадлежит $\mathrm{U}_{2n}(R)$. Отождествим матрицу A с элементом из $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$ по правилу

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} X & 0 & Y & 0 \\ 0 & E_\infty & 0 & 0 \\ V & 0 & W & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E_\infty \end{pmatrix}.$$

Скобки при записи внутренних матриц будем опускать, когда это не приводит к неоднозначности. Сохраним обозначение $\mathrm{U}_{2n}(R)$ для получившихся подмножеств $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Ясно, что $\mathrm{U}_{2n}(R)$ — подгруппы группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$, а также что для $m \geqslant n$ мы имеем $\mathrm{U}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{U}_{2m}(R)$.

Определение 1. Положим $\mathrm{U}(R) = \bigcup\limits_{n \geqslant 1} \mathrm{U}_{2n}(R)$ ($\mathrm{U}_{2n}(R) \subseteq \mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$). Это подгруппа группы обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Назовём её *стабильной унитарной группой*.

На кольце $\mathrm{Mat}_{2,\infty}$ определим инволюцию по правилу

$$\begin{pmatrix} (x_{ij}) & (y_{ij}) \\ (v_{ij}) & (w_{ij}) \end{pmatrix} \mapsto Q^{-1} \begin{pmatrix} (x^\tau_{ji}) & (v^\tau_{ji}) \\ (y^\tau_{ji}) & (w^\tau_{ji}) \end{pmatrix} Q, \quad Q = \begin{pmatrix} 0 & E_\infty \\ -E_\infty & 0 \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Это отображение будем обозначать также через τ. Несложно убедиться, что для любого элемента $A \in \mathrm{U}(R)$

$$A^\tau A = E.$$

Будем обозначать через E_{ij} стандартные матричные единицы кольца $\mathrm{Mat}(R)$. Также введём два счётных набора индексов из $\mathbb{N}$ и $\mathbb{N}'$. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} X & Y \\ V & W \end{pmatrix}, \quad X, Y, V, W \in \mathrm{Mat}_\infty(R).$$

Тогда индексы $i \in \mathbb{N}$ будут применяться для нумерации строк и столбцов матрицы X, строк матрицы Y и столбцов V, а индексы $j \in \mathbb{N}'$ — для нумерации строк и столбцов матрицы W, строк матрицы V и столбцов Y. Также будем считать, что $(i')' = i$, $i \in \mathbb{N}$.

Обозначим через e_{ij}, $i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, стандартные матричные единицы кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Согласно введённым обозначениям

$$e_{ij} = \begin{pmatrix} E_{ij} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{ij'} = \begin{pmatrix} 0 & E_{ij} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{i'j} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E_{ij} & 0 \end{pmatrix}, \quad e_{i'j'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_{ij} \end{pmatrix}.$$

Положим

$$s_{ij} = E - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}, \quad h_{ij} = \begin{pmatrix} s_{ij} & 0 \\ 0 & s_{ij}. \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $h_{ij} \in \mathrm{U}(R)$.

Подгруппу в группе $\mathrm{U}(R)$, порождённую матрицами

$$w_{ij}^r = \begin{pmatrix} E + rE_{ij} & 0 \\ 0 & E - r^\tau E_{ji} \end{pmatrix}, \quad v_{ij}^r = \begin{pmatrix} E & rE_{ij} + r^\tau E_{ji} \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$t_{ij}^r = \begin{pmatrix} E & 0 \\ rE_{ij} + r^\tau E_{ji} & E \end{pmatrix}, \quad p_{ii}^r = \begin{pmatrix} E & rE_{ii} \\ 0 & E \end{pmatrix}, \quad r^\tau = r,$$

$$q_{ii}^r = \begin{pmatrix} E & 0 \\ rE_{ii} & E \end{pmatrix}, \quad r^\tau = r,$$

будем обозначать через $\mathrm{EU}(R)$ и называть *стабильной элементарной подгруппой*.

Положим $T = \{r \in R \mid r = r^\tau\}$, $[A, B] = ABA^{-1}B^{-1}$. Если $A \subseteq \mathrm{U}(R)$, то $\mathrm{C}(A) = \{B \in \mathrm{U}(R) \mid BX = XB$ для всех $X \in A\})$, $\mathrm{St}\,(A) = \{B \in \mathrm{U}(R) \mid B^{-1}AB = A\})$. Через $\langle A\rangle_{\mathrm{mul}}$ будем обозначать подгруппу, порождённую элементами из A. Через $\langle A\rangle$ будем обозначать кольцо, полученное путём сложения и умножения элементов A, а также взятия их обратных элементов в случае, когда такие элементы существуют.

Мы будем опускать нулевые элементы при записи матриц, когда это не приводит к неоднозначности.

2. Доказательство основной теоремы

Основным результатом данной работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть R и S — ассоциативные кольца с $1/2$, τ — инволюция на R, ε — инволюция на S, $\varphi\colon \mathrm{U}(R) \to \mathrm{U}(S)$ — изоморфизм стабильных унитарных групп. Пусть также существует обратимый элемент $\beta \in Z(R)$, такой что $\beta\beta^\tau - 1$ обратим. Тогда существует кольцевой изоморфизм*

$$\theta\colon \langle \mathrm{U}(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}(S)\rangle,$$

такой что

$$\varphi(A) = \theta(A) \quad \text{для всех} \quad A \in \mathrm{EU}(R).$$

Шаг 1. Для доказательства нам потребуется следующее утверждение из [2].

Предложение 1. *Пусть R — ассоциативное кольцо с $1/2$, H, G — подгруппы в группе обратимых элементов кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$. Элементы γ_1 и γ_2 — идемпотенты кольца $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$, такие что $1 - 2\gamma_1 \in H$, $1 - 2\gamma_2 \in H$, $1 - 2\gamma_1\gamma_2 \in G$, $\gamma_1\gamma_2 = \gamma_2\gamma_1$,*

$$\mathrm{C}_G(\mathrm{St}_G\{1 - 2\gamma_1, 1 - 2\gamma_2\}) \subseteq \mathrm{C}_G(H),$$

$$H = \langle \{(1 - 2\gamma_1)a(1 - 2\gamma_1)a^{-1} \mid a \in H\}\rangle_{\mathrm{mul}}.$$

Тогда $\gamma_1\gamma_2 = 0$ и $H \subseteq (\gamma_1 + \gamma_2)\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)(\gamma_1 + \gamma_2) + E$.

Пусть H_{ij}, $i \neq j$, $i, j \in \mathbb{N}$, — подгруппа $\mathrm{U}(R)$, порождённая элементами

$$E + re_{ij} - re_{j'i'},\ E + re_{ji} - re_{i'j'},\ E + re_{ij'} + re_{j,i'},\ E + re_{i'j} + re_{j'i}.$$

Пусть

$$A \in \mathrm{C}(\mathrm{St}\,\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}),\, E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}).$$

Так как элементы $E + re_{ii'}$, $E + re_{jj'}$, $E + re_{i'i}$, $E + re_{j'j}$, h_{ij} содержатся в $\mathrm{St}\,\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}),\, E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}$, то A коммутирует с ними. Значит,

$$A = \xi(e_{ii} + e_{i'i'} + e_{jj} + e_{j'j'}) + x,$$
$$xe_{kk} = e_{kk}x = 0, \quad k \in \{i, i', j, j'\}, \quad \xi r = r\xi \ \text{ при } \ r \in T.$$

Отсюда следует, что $A \in \mathrm{C}(H_{ij})$, т. е.

$$\mathrm{C}(\mathrm{St}\,\{E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}),\, E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\}) \subseteq \mathrm{C}(H_{ij}). \tag{2}$$

Для любого

$$s_r \in \{E + re_{ij} - r_{j'i'},\, E + re_{j,i} - re_{i'j'},\, E + re_{ij'} + re_{ji'},\, E + re_{i'j} + re_{j'i}\}$$

имеем

$$\big(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})\big)s_r\big(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})\big) = s_r^{-1}, \quad s_r^2 = s_{2r}.$$

Следовательно,

$$H_{ij} = \big\langle \big(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})\big)s\big(E - 2(e_{ii} + e_{i'i'})\big)s^{-1} \mid s \in H_{ij} \big\rangle_{\mathrm{mul}}. \tag{3}$$

Ввиду равенств

$$[E + e_{ij} - e_{j'i'},\, E + re_{ij'} + re_{ji'}] = E + 2re_{ii'},$$
$$E - 2(e_{kk} + e_{k'k'}) = \big((E + e_{kk'})(E - 2e_{k'k})\big)^2, \quad k = i, j,$$

получаем

$$E - 2(e_{ii} + e_{i'i'}),\, E - 2(e_{jj} + e_{j'j'}) \in H_{ij}, \tag{4}$$
$$E + re_{ii'},\, E + re_{jj'},\, E + re_{i'i},\, E + re_{j'j} \in H_{ij}. \tag{5}$$

Положим

$$\varphi\big(E - 2(e_{kk} + e_{k'k'})\big) = 1 - 2f_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Тогда ввиду равенств (2)—(4), (6) для f_i, f_j и H_{ij} выполнены условия предложения 1. Следовательно,

$$f_i f_j = f_j f_i = 0, \tag{7}$$
$$\varphi(H_{ij}) \subseteq (f_i + f_j)\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)(f_i + f_j) + E. \tag{8}$$

Шаг 2. Положим

$$H_k = \langle E + re_{kk'},\, E + re_{k'k} \mid r \in T\rangle_{\mathrm{mul}}, \quad k = i, j.$$

Тогда $H_i, H_j \subseteq H_{ij}$. Покажем, что

$$\varphi(H_k) \subseteq f_k \mathrm{Mat}_{2,\infty}(S) f_k + E, \quad k = i, j. \tag{9}$$

Положим $N_k = \{A \in \mathrm{U}(S) \mid A = f_k A f_k + 1 - f_k\}$, $k = i, j$. Тогда

$$N_i \cap N_j = \{E\}, \quad [N_i, N_j] = \{E\}. \tag{10}$$

Так как элементы групп $\varphi(H_i)$, $\varphi(H_j)$ коммутируют с f_k, $k=i,j$, мы получаем, что

$$H_iH_j \subseteq \varphi^{-1}(N_iN_j). \tag{11}$$

Следовательно, для всех $r\in T$ существуют $\gamma_k(r),\rho_k(r)\in N_k$, для которых

$$E+re_{ii'}=\gamma_i(r)\gamma_j(r), \quad E+re_{i'i}=\rho_i(r)\rho_j(r). \tag{12}$$

Положим

$$d=\beta e_{ii}+\beta^{-\tau}e_{i'i'}+E-e_{ii}-e_{i'i'}, \tag{13}$$

где β — центральный элемент кольца R, β, β^τ, $\beta\beta^\tau-1$ обратимы в R. Тогда получаем, что d принадлежит $\mathrm{U}(R)$ и коммутирует с $E-2(e_{kk}+e_{k'k'})$, $k=i,j$. Следовательно,

$$d\varphi^{-1}(N_k)d^{-1}\subseteq\varphi^{-1}(N_k), \quad k=i,j. \tag{14}$$

Положим

$$F=\{E+re_{ii'} \mid r=r^\tau\}.$$

Поскольку F — коммутативная группа, с помощью (10) получаем, что

$$\gamma_1(r),\gamma_2(r)\in\mathrm{C}(F). \tag{15}$$

Несложно показать, что $[\mathrm{C}(F),d]\subseteq F$, откуда по (15) получаем, что

$$\begin{aligned}[E+re_{ii'},d]&=\gamma_i(r)\gamma_j(r)d\gamma_j(r)^{-1}\gamma_i(r)d^{-1}=\\&=\gamma_i(r)[\gamma_j(r),d]\gamma_i(r)d^{-1}=[\gamma_j(r),d]\,[\gamma_i(r),d]=[\gamma_i(r),d]\,[\gamma_j(r),d].\end{aligned}$$

Имеем $[\gamma_k(r),d]\in F$, следовательно, так как $\beta\beta^\tau-1$ обратим, можно считать, что $\gamma_k(r)\in F$, $k=i,j$, и для каждого $r\in T$ существует t_r, такой что

$$E+t_re_{ii'}\in\varphi^{-1}(N_i), \quad E+(r-t_r)e_{ii'}\in\varphi^{-1}(N_j). \tag{16}$$

Аналогично для каждого $r\in T$ найдётся элемент s_r, для которого

$$E+s_re_{i'i}\in\varphi^{-1}(N_i), \quad E+(r-s_r)e_{i'i}\in\varphi^{-1}(N_j). \tag{17}$$

Из (10), (16), (17) получаем, что

$$\begin{aligned}(E+(r-t_r)e_{ii'})(E+s_we_{i'i})&=(E+s_we_{i'i})(E+(r-t_r)e_{ii'}),\\(E+t_re_{ii'})(E+(w-s_w)e_{i'i})&=(E+(w-s_w)e_{i'i})(E+t_re_{ii'}).\end{aligned}$$

Следовательно,

$$(r-t_r)s_w=s_w(r-t_r)=t_r(w-s_w)=(w-s_w)t_r=0 \ \text{ для всех } \ r,w\in T. \tag{18}$$

Тогда $0=t_1(1-s_1)=(1-t_1)s_1$, откуда следует, что $t_1=s_1=s_1^2=r_1^2$. Тогда по (16), (17)

$$\bigl((E+t_1e_{ii'})(E-t_1e_{i'i})^2\bigr)^2=E-2t_1(e_{ii}+e_{i'i'})\in\varphi^{-1}(N_i) \tag{19}$$

и аналогично

$$E-2(1-t_1)(e_{ii}+e_{i'i'})\in\varphi^{-1}(N_j). \tag{20}$$

Так как

$$\big(E-2t_1(e_{ii}+e_{i'i'})\big)\big(E-2(1-t_1)(e_{ii}+e_{i'i'})\big)=E-2(e_{ii}+e_{i'i'}),$$
$$E-2(e_{ii}+e_{i'i'})=\varphi^{-1}(1-2f_i)\in\varphi^{-1}(N_i),$$

то из (10) выводим, что $E-2(1-t_1)(e_{ii}+e_{i'i'})=E$. Следовательно, $t_1=s_1=0$, откуда, учитывая (18), получаем, что $r=t_r=s_r$. По (19) и (20) получаем

$$\varphi(E+re_{ii'}),\ \varphi(E+re_{i'i})\in N_i.$$

Следовательно, $\varphi(H_i)\subseteq N_i\subseteq f_i\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)f_i+E$. Аналогично, $\varphi(H_j)\subseteq N_j\subseteq$ $\subseteq f_j\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)f_j+E$.

Шаг 3. Положим

$$\varphi(E+re_{ii'})=E+x_{r,i},\quad \varphi(E+re_{i'i})=E+y_{r,i},$$

где $i\in\mathbb{N}$, $r\in T$,

$$g_r=E+\frac{1}{2}\big(x_{r,i}+x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})-\varphi(h_{i,i+1})x^{\varepsilon}_{r,i}+\varphi(h_{i,i+1})x^{\varepsilon}_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})\big).\qquad(21)$$

Покажем, что

$$x_{r,i}x_{s,i}=0,\quad y_{r,i}y_{s,i}=0 \ \text{ для всех } \ r,s\in T.\qquad(22)$$

Из определения $x_{r,i}$ получаем, что

$$x_{r,i}+x^{\varepsilon}_{r,i}+x_{r,i}x^{\varepsilon}_{r,i}=0,\quad x_{r+s,i}=x_{r,i}+x_{s,i}+x_{r,i}x_{s,i}.\qquad(23)$$

Действительно, пусть

$$\lambda=\beta(e_{ii}+e_{i+1,i+1})+\beta^{-\tau}(e_{i'i'}+e_{(i+1)'(i+1)'})+E-e_{ii}-e_{i+1,i+1}-e_{i'i'}-e_{(i+1)'(i+1)'}.$$

Тогда

$$\lambda h_{i,i+1}=h_{i,i+1}\lambda,\quad \lambda re_{ii'}\lambda^{-1}=\beta\beta^{\tau}re_{ii'},$$

следовательно,

$$\varphi(\lambda)\varphi(h_{i,i+1})=\varphi(h_{i,i+1})\varphi(\lambda),\quad \varphi(\lambda)x_r\varphi(\lambda^{-1})=x_{\beta\beta^{\tau}r}.\qquad(24)$$

Легко убедиться, что $x_{-r,i}=(x_{r,i})^{\varepsilon}$ и $g_r\in\mathrm{U}(S)$. Так как элементы $E+re_{ii'}$ и $E+se_{ii'}$ коммутируют, то $x_{r,i}x_{s,i}=x_{s,i}x_{r,i}$. Также ясно, что

$$x_{r,i},y_{r,i}\in f_i\mathrm{Mat}_{2,\infty}f_i,\quad \varphi(h_{i,i+1})e_i\varphi(h_{i,i+1})=e_{i+1}.\qquad(25)$$

Значит,

$$[g_r,(1+x_{s,i})\varphi(h_{i,i+1})(1+x_{s,i})\varphi(h_{i,i+1})]=E.$$

Следовательно,

$$\varphi^{-1}(g_r)(re_{ii'}+re_{i+1(i+1)'})=(re_{ii'}+re_{i+1(i+1)'})\varphi^{-1}(g_r).\qquad(26)$$

Из определения g_r следует, что $[g_r, E-2(e_i+e_{i+1})] = E$. Учитывая (26), получаем

$$\varphi^{-1}(g_r) = \begin{pmatrix} A_1 & & & B_1 & & \\ & A_2 & & & B_2 & \\ & & A_3 & & & B_3 \\ C_1 & & & D_1 & & \\ & 0 & & & A_2 & \\ & & C_3 & & & D_3 \end{pmatrix},$$

$$A_1, B_1, C_1, D_1 \in \mathrm{Mat}_{i-1}(R), \quad A_2, B_2 \in \mathrm{Mat}_2(R), \quad A_3, B_3, C_3, D_3 \in \mathrm{Mat}_\infty(R)$$

(на пустых местах в матрице предполагаются нулевые элементы).

При этом так как матрица $\varphi^{-1}(g_r)$ обратима, то A_2 также обратима. Тогда элемент $\varphi^{-1}(g_r)$ может быть представлен в виде

$$\varphi^{-1}(g_r) = G_1G_2,$$

$$G_1 = \begin{pmatrix} E_{i-1} & & & 0 & \\ & E_2 & & & B_2A_2^{-1} \\ & & E_\infty & & 0 \\ & 0 & & & E_\infty \end{pmatrix}, \quad G_2 = \begin{pmatrix} A_1 & & & B_1 & & \\ & A_2 & & & 0 & \\ & & A_3 & & & B_3 \\ C_1 & & & D_1 & & \\ & 0 & & & A_2 & \\ & & C_3 & & & D_3 \end{pmatrix}$$

(на пустых местах в матрицах предполагаются нулевые элементы). (27)

Легко убедиться, что G_2 коммутирует с λ. Имеем

$$[\varphi^{-1}(g_r), \lambda] = G_1G_2\lambda G_2^{-1}G_1^{-1}\lambda^{-1} = [G_1, \lambda].$$

Отсюда получаем, учитывая вид G_1 из (27), что $[\varphi^{-1}(g_r), \lambda]$ коммутирует с $E + se_{ii'}$. Значит, $[g_r, \varphi(\lambda)]x_{s,i} = x_{s,i}[g_r, \varphi(\lambda)]$. Тогда, используя (24), (25), получаем

$$\begin{aligned}
0 &= [g_r, \varphi(\lambda)]x_{s,i}f_{i+1} = x_{s,i}[g_r, \varphi(\lambda)]f_{i+1} = x_{s,i}g_r\varphi(\lambda)g_r^{-1}\varphi(\lambda)^{-1}f_{i+1} = \\
&= x_{s,i}\left(E + \frac{1}{2}\big(x_{r,i} + x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}) - \varphi(h_{i,i+1})x^\varepsilon_{r,i} + \varphi(h_{i,i+1})x^\varepsilon_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})\big)\right) \times \\
&\times \varphi(\lambda)\left(E + \frac{1}{2}\big(x^\varepsilon_{r,i} - x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1}) + \varphi(h_{i,i+1})x^\varepsilon_{r,i} + \varphi(h_{i,i+1})x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})\big)\right) \times \\
&\times \varphi(\lambda)^{-1}f_{i+1} = \\
&= x_{s,i}\left(f_i + \frac{1}{2}x_{r,i} + \frac{1}{2}x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})\right) \times \\
&\times\left(1+\frac{1}{2}\big(x_{r_2,i} - x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1}) + \varphi(h_{i,i+1})x_{r_2,i} + \varphi(h_{i,i+1})x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1})\big)\right)f_{i+1} = \\
&= x_{s,i}\left(f_i + \frac{1}{2}x_{r,i} + \frac{1}{2}x_{r,i}\varphi(h_{i,i+1})\right)\left(f_{i+1} - \frac{1}{2}x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1}) + \right.\\
&\left. + \frac{1}{2}\varphi(h_{i,i+1})x_{r_1,i}\varphi(h_{i,i+1})\right) = x_{s,i}(x_{r,i} - x_{r_1,i})\frac{1}{2}\varphi(h_{i,i+1}), \quad r_1 = \beta\beta^\tau r.
\end{aligned}$$

Следовательно, с помощью (23) получаем, что

$$0 = x_{s,i}(x_{r,i} - x_{r_1,i}) = x_{s,i}(x_{r,i} + x^{\varepsilon}_{r_1,i} + x_{r_1,i}x^{\varepsilon}_{r_1,i}) =$$
$$= x_{s,i}(x_{r,i} + x_{-r_1,i} + x_{r_1,i}x_{-r_1,i}) = x_{s,i}(x_{r-r_1,i} + (x_{r_1,i} - x_{r,i})x_{r_1,i}) = x_{r,i}x_{r-r_1,i}.$$

Так как $r - r_1 = (1 - \beta\beta^{\tau})r$ пробегает все элементы T, то $x_{r,i}x_{s,i} = 0$. Аналогично $y_{r,i}y_{s,i} = 0$.

Шаг 4. Положим

$$z_{ii} = x_{1,i}y_{1,i}, \quad z_{i'i'} = y_{1,i}x_{1,i}, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{28}$$

Выполнено равенство

$$\big((1 + e_{ii'})(1 - e_{i'i})\big)^3 = 1 - 2(e_{ii} + e_{i'i'}).$$

Значит, $1 - 2f_i = \big((1 - x_{1,i})(1 - y_{1,i})\big)^3$. Следовательно, учитывая (25), получаем, что

$$2f_i + x_{1,i} + y_{1,i} - 2x_{1,i}y_{1,i} - 2y_{1,i}x_{1,i} - x_{1,i}y_{1,i}x_{1,i} - y_{1,i}x_{1,i}y_{1,i} = 0. \tag{29}$$

Умножая полученное равенство слева на $x_{1,i}$ и справа на $y_{1,i}$, получаем, что $(x_{1,i}y_{1,i})^2 = x_{1,i}y_{1,i}$. Аналогично, умножая (29) слева на $y_{1,i}$ и справа на $x_{1,i}$, получаем $(y_{1,i}x_{1,i})^2 = y_{1,i}x_{1,i}$. Значит, элементы z_{ii} и $z_{i'i'}$ являются идемпотентами.

Преобразовав (29), видим, что

$$f_i = x_{1,i}(1 - 2y_{1,i} - y_{1,i}x_{1,i}) + y_{1,i}(1 - 2x_{1,i} - x_{1,i}y_{1,i}).$$

Отсюда выводим, учитывая (28) и (25), что

$$x_{1,i} = z_{ii}(1 - 2x_{1,i} - x_{1,i}y_{1,i}) = z_{ii}^2(1 - 2x_{1,i} - x_{1,i}y_{1,i}) = z_{ii}x_{1,i}.$$

Аналогично $y_{1,i} = z_{i'i'}y_{1,i}$. Следовательно, из (29) и (25)

$$f_i = z_{ii} + z_{i'i'}, \tag{30}$$
$$\varphi\big(1 - 2(e_{ii} + e_{i'i'})\big) = 1 - 2(z_{ii} + z_{i'i'}), \quad i \in \mathbb{N}. \tag{31}$$

Легко убедиться, что элементы z_{ii}, $i \in \mathbb{N}$, сопряжены между собой и элементы $z_{i'i'}$, $i' \in \mathbb{N}$, сопряжены между собой (например, при помощи матриц $\varphi(h_{ij})$). Покажем, что z_{ii} и $z_{i'i'}$, $i \in \mathbb{N}$, также сопряжены. Рассмотрим матрицу

$$H = \begin{pmatrix} E_\infty - E_{11} & -E_{11} \\ E_{11} & E_\infty - E_{11} \end{pmatrix}.$$

Прямым подсчётом убеждаемся, что

$$H^{-1} = \big(E - 2(e_{11} + e_{1'1'})\big)H = H\big(E - 2(e_{11} + e_{1'1'})\big)$$

и что $H \in \mathrm{U}(R)$. Имеем $H(E + re_{11'})H^{-1} = 1 + re_{1'1}$, значит, $\varphi(H)z_{11}\varphi(H)^{-1} = z_{1'1'}$. Положим

$$T_{ij} = (h_{i,i-1} \dots h_{21})H(h_{12} \dots h_{j,j-1}). \tag{32}$$

Заметим, что $T_{ij} \in \mathrm{U}(R)$. Тогда получаем

$$z_{i'i'} = \varphi(T_{ij}) z_{jj} \varphi(T_{ij})^{-1}. \tag{33}$$

Имеем

$$\begin{aligned} T_{ij}^{-1} = (h_{j,j-1} \dots h_{12}) H^{-1} (h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = (h_{j,j-1} \dots h_{12})(E - 2(e_{11} + e_{1'1'}) H (h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = \big(E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\big)(h_{j,j-1} \dots h_{12}) H (h_{21} \dots h_{i,i-1}) = \\ = \big(E - 2(e_{jj} + e_{j'j'})\big) T_{ji}. \end{aligned} \tag{34}$$

Итак, $\{z_{ii},\, z_{i'i'} \mid i \in \mathbb{N}\}$ — система ортогональных сопряжённых между собой идемпотентов. Положим

$$\begin{aligned} &z_{ij} = z_{ii} \varphi(h_{i,i+1} \dots h_{j-1,j}) z_{jj}, \quad i < j, \\ &z_{ij} = z_{ii} \varphi(h_{i-1,i} \dots h_{j,j+1}) z_{jj}, \quad i > j, \\ &z_{i'j'} = z_{i'i'} \varphi(h_{i,i+1} \dots h_{j-1,j}) z_{j'j'}, \quad i < j, \\ &z_{i'j'} = z_{i'i'} \varphi(h_{i-1,i} \dots h_{j,j+1}) z_{j'j'}, \quad i > j, \\ &z_{ij'} = z_{ii} \varphi(T_{ji}^{-1}) z_{j'j'}, \\ &z_{i'j} = z_{i'i'} \varphi(T_{ij}) z_{jj}. \end{aligned}$$

Из соотношения $\varphi(h_{ij}) z_{ii} \varphi(h_{ij}) = z_{jj}$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$, и равенства (33) легко вывести, что $z_{\mu\nu} z_{\lambda\gamma} = \delta_{\nu\lambda} z_{\mu\gamma}$, $\mu, \nu, \lambda, \gamma \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$. Также получаем, что

$$(1 + x_{1,i})^{\varepsilon} = \varphi(E + e_{ii'})^{\varepsilon} = \varphi(E + e_{ii'})^{-1} = E - x_{1,i},$$

откуда следует, что $x_{1,i}^{\varepsilon} = -x_{1,i}$. Аналогично $y_{1,i}^{\varepsilon} = -y_{1,i}$. Значит,

$$z_{ii}^{\varepsilon} = z_{i'i'}, \quad z_{ij}^{\varepsilon} = z_{j'i'}. \tag{35}$$

Из (34) следует, что

$$z_{ij'}^{\varepsilon} = z_{j'j'}^{\varepsilon} \varphi(T_{ji}^{-1})^{\varepsilon} z_{ii}^{\varepsilon} = z_{jj} \varphi(T_{ji}) z_{i'i'} = z_{jj} \big(E - 2(z_{jj} + z_{j'j'})\big) \varphi(T_{ij}^{-1}) z_{i'i'} = -z_{ji'}.$$

Аналогично

$$z_{i'j}^{\varepsilon} = -z_{j'i}. \tag{36}$$

Отметим два свойства построенной системы матричных единиц.

Свойство 1. *Для любого $A \in \mathrm{U}(S)$ найдётся n (зависящее от A), такое что A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} (z_{ii} + z_{i'i'})$ и $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} (e_{ii} + e_{i'i'})$ при всех $k \geqslant n$.*

Доказательство. По определению $\mathrm{U}(R)$ найдётся такое n, что для всех $k \geqslant n$ элемент $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k} (e_{ii} + e_{i'i'})$. Следовательно, $\varphi^{-1}(A)$

коммутирует и с $E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$. Ввиду равенства (31)

$$\varphi\big(E-2(e_{ii}+e_{i'i'})\big)=\varphi\bigg(\prod_{i=1}^{k}\big(1-2(e_{ii}+e_{i'i'})\big)\bigg)=\prod_{i=1}^{k}\big(1-2(z_{ii}+z_{i'i'})\big)=$$
$$=1-2\bigg(\sum_{i=1}^{k}\big(z_{ii}+z_{i'i'}\big)\bigg).$$

Значит, A коммутирует с $\sum\limits_{i=1}^{k}(z_{ii}+z_{i'i'})$ при всех $k\geqslant n$. □

Свойство 2. *Для любого $A\in\mathrm{U}(S)$ найдётся n (зависящее от A), такое что A коммутирует со всеми $z_{ii}+z_{i'i'}$ и*

$$\varphi^{-1}(A)(e_{ii}+e_{i'i'})=(e_{ii}+e_{i'i'})\varphi^{-1}(A)=e_{ii}+e_{i'i'}$$

при $i\geqslant n$.

Доказательство аналогично доказательству свойства 1.

Шаг 5. Для всех матриц из $\langle\mathrm{U}(S)\rangle$ определим отображение α по формуле

$$\alpha(A)=\begin{pmatrix}(z_{1i}Az_{j1}) & (z_{1i}Az_{j'1})\\ (z_{1i'}Az_{j1}) & (z_{1i'}Az_{j'1})\end{pmatrix},\quad i,j\in\mathbb{N}. \tag{37}$$

Лемма 1. *Построенное отображение α является изоморфизмом между кольцами $\langle\mathrm{U}(S)\rangle$ и $\langle\mathrm{U}(S_1)\rangle$, $S_1=z_{11}\mathrm{Mat}_2\big(\mathrm{Mat}(S)\big)z_{11}=z_{11}\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)z_{11}$.*

Для доказательства нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2. *Если матрица*

$$\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$$

коммутирует с $E+e_{ii'}$, то $E_{ii}Z=ZE_{ii}=0$, $E_{ii}W=XE_{ii}$.

Если матрица

$$\begin{pmatrix}X & Y\\ Z & W\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_{2,\infty}(R)$$

коммутирует с $E+e_{i'i}$, то $E_{ii}Y=YE_{ii}=0$, $WE_{ii}=E_{ii}X$.

Доказательство. Утверждение проверяется прямым подсчётом. □

Нам потребуется ещё одна лемма.

Лемма 3. *Если $A\in\mathrm{U}(S)$ коммутирует со всеми z_{ii}, $z_{i'i'}$, $x_{1,i}$, $y_{1,i}$, то $A=E$.*

Доказательство. Так как A коммутирует с $E-2(z_{ii}+z_{i'i'})$, то $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$. Следовательно,

$$A=\begin{pmatrix}\mathrm{diag}[a_1,a_2,\ldots] & \mathrm{diag}[b_1,b_2,\ldots]\\ \mathrm{diag}[c_1,c_2,\ldots] & \mathrm{diag}[d_1,d_2,\ldots]\end{pmatrix}.$$

Поскольку A коммутирует с $E+x_{1,i}$, $E+y_{1,i}$, получаем, что $\varphi(A)$ коммутирует с $E+e_{ii'}$, $E+e_{i'i}$. Значит, по лемме 2 $b_i=c_i=0$, $a_i=d_i$.

Положим

$$h'_{ij}=E-z_{ii}-z_{jj}+z_{ij}+z_{ji}-z_{i'i'}-z_{j'j'}+z_{i'j'}+z_{j'i'}.$$

Легко убедиться, что $h'_{ij}\in\mathrm{U}(S)$. Рассмотрим матрицу h'_{12}. Элемент $\varphi^{-1}(h'_{12})$ коммутирует с $E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$, $E+e_{ii'}$, $E+e_{i'i}$, $i\neq 1,2$. Значит,

$$\varphi^{-1}(h'_{12})=\begin{pmatrix} r_1 & s_1 & & r_2 & s_2 & \\ t_1 & g_1 & & t_2 & g_2 & \\ & & \operatorname{diag}[x_1,x_2,\dots] & & & \operatorname{diag}[0,0,\dots] \\ r_3 & s_3 & & r_4 & s_4 & \\ t_3 & g_3 & & t_4 & g_4 & \\ & & \operatorname{diag}[0,0,\dots] & & & \operatorname{diag}[x_1,x_2,\dots] \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\bigl(1-2(z_{11}+z_{1'1'})\bigr)h'_{12}=h'_{12}\bigl(1-2(z_{22}+z_{2'2'})\bigr),$$

следовательно,

$$\begin{pmatrix} -r_j & -s_j \\ t_j & g_j \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} r_j & -s_j \\ t_j & -g_j \end{pmatrix},$$

откуда получаем, что $r_j=g_j=0$. По определению z_{ij}, учитывая равенства $x_{1,i}=z_{ii}x_{1,i}$, $y_{1,i}=z_{i'i'}y_{1,i}$, получаем, что $h'_{12}x_{1,1}=x_{1,2}h'_{12}$, $h'_{12}y_{1,1}=y_{1,2}h'_{12}$. Следовательно, $s_2=t_2=s_3=t_3=0$. Имеем $(h'_{12})^2=E$, значит,

$$\begin{pmatrix} 0 & s_1 \\ t_1 & 0 \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} s_1t_1 & 0 \\ 0 & t_1s_1 \end{pmatrix}=E,$$

т. е. $t_1=s_1^{-1}$. Так же получаем, что $t_4=s_4^{-1}$. Аналогичным способом можно установить, что

$$\varphi^{-1}(h'_{ij})=a_{ij}e_{ij}+a_{ij}^{-1}e_{ji}+b_{ij}e_{i'j'}+b_{ij}^{-1}e_{j'i'}+X, \tag{38}$$

где

$$X=\begin{pmatrix} \operatorname{diag}[x_1,x_2,\dots] & 0 \\ 0 & \operatorname{diag}[x_1,x_2,\dots] \end{pmatrix},\quad x_i=x_j=0,\quad i,j\in\mathbb{N}.$$

По условию матрица A перестановочна со всеми z_{ij}, следовательно, $\varphi^{-1}(A)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(h'_{ij})$. Значит, из (38) следует, что a_i и d_i сопряжены между собой, и в силу того, что $\varphi^{-1}(A)\in\mathrm{U}(R)$, получаем, что $a_i=d_i=1$. Лемма 3 доказана. □

Доказательство леммы 1. По свойству 2 системы $\{z_{ij}\mid i,j\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'\}$ получаем, что $\alpha(A)\in\mathrm{Mat}_2\bigl(\mathrm{Mat}(S_1)\bigr)$. По свойству 1 получаем, что α — кольцевой гомоморфизм.

Докажем инъективность отображения α. Пусть $\alpha(A)=0$, $A\in\langle\mathrm{U}(S)\rangle$. Это означает, что $z_{ij}Az_{kl}=0$, $z_{ij}A^{\varepsilon}z_{kl}=0$ для любых $i,j,k,l\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'$. Отсюда следует, что

$$\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})A\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0,\quad \sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})A^{\varepsilon}\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0$$

для любых $n \geqslant 1$. По свойству 1 системы $\{z_{ij}\}$ получаем, что существует n, такое что $\sum\limits_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})$ коммутирует с A, A^{ε}, e_{1i}, e_{j2}, $e_{2'j'}$, $e_{i'1'}$. Тогда

$$\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})e_{1j}Ae_{j2}\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0,$$
$$\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{1'i'}\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})=0.$$

Значит,

$$\begin{aligned}
E+a_{ij}e_{12}-a_{ij}^{\varepsilon}e_{2'1'} &= E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'1'}=\\
&=\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'}1')\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})+\\
&+\Bigl(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})\Bigr)(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'}1')\Bigl(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})\Bigr)=\\
&=\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})+\\
&+\Bigl(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})\Bigr)(E+e_{1i}Ae_{j2}+e_{2'j'}A^{\varepsilon}e_{i'1'})\Bigl(E-\sum_{i=0}^{n}(z_{ii}+z_{i'i'})\Bigr).
\end{aligned}$$

Следовательно, матрица $E+a_{ij}e_{12}-a_{ij}^{\varepsilon}e_{2'1'}$ удовлетворяет условию леммы 3. Тогда $a_{ij}=0$, $i,j\in\mathbb{N}$. Аналогично можно показать, что $a_{ij}=0$ для всех $i,j\in\mathbb{N}\cup\mathbb{N}'$, т. е. $A=0$.

Очевидно, что $\mathrm{Mat}_2\bigl(\mathrm{FMat}(S_1)\bigr)\subseteq\mathrm{Im}\,\alpha$, $\alpha\bigl(\mathrm{Mat}_2(\mathrm{FMat}(S)\bigr)=\mathrm{Mat}_2(\mathrm{FMat}(S_1)$. Так как для любой $A\in\mathrm{U}(S_1)$ имеем $A-E\in\mathrm{Mat}_2\bigl(\mathrm{FMat}(S)\bigr)$, то $\langle\mathrm{U}(S_1)\rangle\subseteq\mathrm{Im}\,\alpha$.

Пусть $\alpha(A)=B$, $A\in\mathrm{U}(S)$. Покажем, что $B\in\mathrm{U}(S_1)$. По свойству 2 найдётся n, такое что A коммутирует с $z_{ii}+z_{i'i'}$, $i\geqslant n$. Значит,

$$B=\begin{pmatrix}X & & Y & \\ & \mathrm{diag}[x_1,x_2,\ldots] & & \mathrm{diag}[y_1,y_2,\ldots]\\ V & & W & \\ & \mathrm{diag}[v_1,v_2,\ldots] & & \mathrm{diag}[w_1,w_2,\ldots]\end{pmatrix}.$$

Можно выбрать такое n, что $\varphi^{-1}(A)$ также будет коммутировать с $E+e_{i'i}, E+e_{ii'}$ при $i\geqslant n$. Значит, можно считать, что $y_i=v_i=0$, $x_i=w_i$. Элемент B коммутирует с h'_{ij}, $i,j\geqslant n$, следовательно, $x_i=w_i=a$. Покажем, что $a\in Z(S_1)$. Пусть

$$C=E+z_{i1}cz_{1i+1}-z_{(i+1)'1'}c^{\varepsilon}z_{1'i'}.$$

Так как элемент C перестановочен с $E-2(z_{jj}+z_{j'j'})$, $E+x_{1,j}$, $E+y_{1,j}$, $j\neq i, i+1$, $E+x_{1,i}$, $E+y_{1,i+1}$ и с h'_{ij}, $i,j\in[1,i-1]\cup[i+2,\infty)$, то

$$\varphi^{-1}(C)=\begin{pmatrix} E_{i-1} & & & & 0 & & & \\ & a_1 & b_1 & & & a_2 & 0 & \\ & c_1 & d_1 & & & 0 & 0 & \\ & & & E_\infty & & & & 0 \\ 0 & & & & E_{i-1} & & & \\ & 0 & 0 & & & a_4 & b_4 & \\ & 0 & d_3 & & & c_4 & d_4 & \\ & & & 0 & & & & E_\infty \end{pmatrix}. \tag{39}$$

Тогда $\varphi^{-1}(C)$ коммутирует с $\varphi^{-1}(B)$ и C коммутирует с B. Следовательно, a перестановочен с c, т. е. $a\in Z(S_1)$.

Имеем

$$\begin{pmatrix}\mathrm{diag}[a,a,\dots] & 0\\ 0 & \mathrm{diag}[a,a,\dots]\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} X & & Y & \\ & aE_\infty & & 0\\ V & & W & \\ & 0 & & aE_\infty\end{pmatrix}+$$

$$+\begin{pmatrix} -X+\mathrm{diag}[a,\dots,a] & & -Y & \\ & 0 & & 0\\ -V & & -W+\mathrm{diag}[a,\dots,a] & \\ & 0 & & 0\end{pmatrix}=B+B'.$$

Ясно, что $\alpha^{-1}(B')\in\mathrm{FMat}(S)$. Следовательно,

$$\begin{pmatrix}\mathrm{diag}[a,a,\dots] & 0\\ 0 & \mathrm{diag}[a,a,\dots]\end{pmatrix}\in\operatorname{Im}\alpha$$

и

$$\alpha^{-1}\left(\begin{pmatrix}\mathrm{diag}[a,a,\dots] & 0\\ 0 & \mathrm{diag}[a,a,\dots])\end{pmatrix}\right)\in Z(\mathrm{U}(S).$$

Отсюда получаем, что $a=1$ ввиду тривиальности $Z\big(\mathrm{U}(S)\big)$. Значит, $\alpha\big(\mathrm{U}(S)\big)=$ $=\mathrm{U}(S_1)$, откуда следует, что $\operatorname{Im}\alpha=\langle\mathrm{U}(S_1)\rangle$. Лемма 1 доказана. $\square$

Далее при записи элементов из $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S)$ в виде матриц мы будем подразумевать их образы при отображении α.

Для обозначения матрицы из $\mathrm{Mat}_{2,\infty}(S_1)$, содержащей единственный ненулевой элемент $a\in S_1$ на месте (i,j), мы будем использовать запись az_{ij}.

Определим отображение $\varepsilon_1: S_1\to S_1$ по формуле $(z_{11}Az_{11})^{\varepsilon_1}=z_{11'}A^{\varepsilon}z_{1'1}$. Ясно, что ε_1 — инволюция на кольце S_1. Имеем

$$(z_{1i}Az_{j1})^{\varepsilon_1}=z_{11'}(z_{1i}Az_{j1})^{\varepsilon}z_{1'1}=z_{1j'}A^{\varepsilon}z_{i'1}. \tag{40}$$

Аналогично получаем

$$(z_{1i'}Az_{j'1})^{\varepsilon_1}=z_{1j}A^{\varepsilon}z_{i1},(z_{1i'}Az_{j1})^{\varepsilon_1}=-z_{1j'}A^{\varepsilon}z_{i1},(z_{1i}Az_{j'1})^{\varepsilon_1}=-z_{1j}A^{\varepsilon}z_{i'1}. \tag{41}$$

Положим, как раньше,

$$B^{\varepsilon_1} = Q^{-1} \begin{pmatrix} (b^{\varepsilon_1}_{ji}) & (b^{\varepsilon_1}_{j'i}) \\ (b^{\varepsilon_1}_{ji'}) & (b^{\varepsilon_1}_{j'i'}) \end{pmatrix}, \quad Q, B \in \langle \mathrm{U}(S_1) \rangle.$$

Тогда из (40) and (41) следует, что

$$\alpha(A^{\varepsilon}) = \alpha(A)^{\varepsilon_1}, \quad A \in \langle \mathrm{U}(S) \rangle. \tag{42}$$

Шаг 6. Покажем, что

$$\varphi(h_{ij}) = 1 - z_{ii} - z_{jj} + a_{ij} z_{ij} + a_{ij}^{-1} z_{ji} - z_{i'i'} - z_{j'j'} + a_{ij}^{\varepsilon_1} z_{i'j'} + (a_{ij}^{-1})^{\varepsilon_1} z_{j'i'}. \tag{43}$$

Аналогично описанию $\varphi^{-1}(h'_{ij})$ можно установить, что

$$\alpha\big(\varphi(h_{ij})\big) = a_{ij} z_{ij} + a_{ij}^{-1} z_{ji} + d_{ij} z_{i'j'} + d_{ij}^{-1} z_{j'i'} + Y,$$

где

$$Y = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[y_1, y_2, \ldots] & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[y_1, y_2, \ldots] \end{pmatrix}, \quad y_i = y_j = 0, \quad i, j \in \mathbb{N}.$$

Так как h_{ij} и h_{kl} коммутируют при различных индексах, то y_n сопряжены друг с другом. Значит, в силу стабильности матриц $\alpha\big(\varphi(h_{ij})\big)$ получаем, что $y_n = 1$. А в силу унитарности матриц h_{ij} получаем $d_{ij} = a_{ij}^{\varepsilon_1}$. Обозначим элементы $a_{i,i+1}$ через a_i.

Шаг 7. Ясно, что

$$x_{1,i} = b_i z_{ii'}, \quad y_{1,i} = b_i^{-1} z_{i'i}. \tag{44}$$

Выполнено равенство $h_{i,i+1}(E + e_{ii'}) h_{i,i+1} = (E + e_{i+1,(i+1)'})$, следовательно,

$$\begin{pmatrix} 0 & a_i \\ a_i^{-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_i & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_i^{-\varepsilon_1} \\ a_i^{\varepsilon_1} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b_{i+1} & 0 \end{pmatrix},$$

значит,

$$b_i = a_i b_{i+1} a_i^{\varepsilon}. \tag{45}$$

Пусть

$$D_2 = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[b_1^{-1}, b_1^{-1}, \ldots] & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix},$$

$$D_1 = \begin{pmatrix} \mathrm{diag}[1, a_1, a_1 a_2, \ldots] & 0 \\ 0 & \mathrm{diag}[1, a_1^{-\varepsilon_1}, a_1^{-\varepsilon_1} a_2^{-\varepsilon_1}, \ldots] \end{pmatrix}.$$

Положим

$$z'_{ij} = \alpha^{-1}\big((D_2 D_1)^{-1} \alpha(z_{ij}) (D_2 D_1)\big). \tag{46}$$

Тогда $z'_{ii} = z_{ii}$, $z'_{i'i'} = z_{i'i'}$, $z'_{i,i+1} = a_i z_{i,i+1}$, а в силу (45) $z'_{ii'} = x_{1,i}$, $z'_{i'i} = y_{1,i}$. Следовательно,

$$\varphi(h_{ij}) = E - z'_{ii} - z'_{jj} + z'_{ij} + z'_{ji} - z'_{i'i'} - z'_{j'j'} + z'_{i'j'} + z'_{j'i'}, \tag{47}$$

$$\varphi(E + e_{ii'}) = E + z'_{ii'}, \quad \varphi(E + e_{i'i}) = E + z'_{i'i}. \tag{48}$$

Заметим, что для построенных матричных единиц по-прежнему выполнены равенства (35) и (36). Далее всюду в качестве матричных единиц $\{z_{ij}\}$ мы будем рассматривать матричные единицы, полученные при помощи формулы (46).

Шаг 8. Установим вид образов элементов, которые порождают элементарную подгруппу. Ясно, что $\varphi(E+re_{ii'})=E+sz_{i1'}$, $\varphi(E+re_{i'i})=E+s_1z_{i'i}$, $r\in T$. Покажем, что $w_{12}^r=E+re_{12}-r^\tau e_{2'1'}$ переходит в $E+az_{21}-a^{\varepsilon_1}z_{2'1'}$. Так как w_{12}^r коммутирует с $E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$, $E+e_{ii'}$, $E+e_{i'i}$ при $i\neq 1,2$, то

$$\varphi(w_{12}^r)=\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & a_2 & b_2 & \\ c_1 & d_1 & & c_2 & d_2 & \\ & & \mathrm{diag}[s_1,s_2,\ldots] & & & \mathrm{diag}[0,\ldots] \\ a_3 & b_3 & & a_4 & b_4 & \\ c_3 & d_3 & & c_4 & d_4 & \\ & & \mathrm{diag}[0,\ldots] & & & \mathrm{diag}[s_1,s_2\ldots] \end{pmatrix}.$$

Поскольку w коммутирует также с $E+e_{11'}$ и с $E+e_{2'2}$, получаем, что $c_1=b_4=a_3=c_3=b_3=c_2=d_2=b_2=0$, $a_1=a_4$, $d_1=d_4$. Имеем $\big(E-2(e_{11}+e_{1'1'})\big)w\big(E-2(e_{11}+e_{1'1'})\big)=w^{-1}$, откуда следует, что

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & & a_2 & 0 & \\ 0 & d_1 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & \\ 0 & d_3 & & c_4 & d_1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & -b_1 & & a_2 & 0 & \\ 0 & d_1 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & \\ 0 & d_3 & & -c_4 & d_1 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} a_1^2 & -a_1b_1+b_1d_1 & & a_1a_2+a_2a_1 & 0 & \\ 0 & d_1^2 & & 0 & 0 & \\ & & \ddots & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1^2 & 0 & \\ 0 & d_1d_3+d_3d_1 & & c_4a_1-d_1c_4 & d_1^2 & \\ & & \ddots & & & \ddots \end{pmatrix}=E.$$

Следовательно, $a_1^2=d_1^2=s_1^2=s_4^2=1$, откуда выводим, что $a_1=d_1=s_i=1$, так как $(w_{12}^r)^2=w_{12}^{2r}$ и $1/2\in R$. Значит, $a_2=0$, $d_3=0$. Ввиду унитарности w_{12}^r получаем, что $c_4=-b_1^{\varepsilon_1}$.

Теперь рассмотрим $v_{12}^r=E+re_{12'}+r^\tau e_{21'}$. Так как v_{12}^r коммутирует с $E-2(e_{ii}+e_{i'i'})$, $E+e_{i'i}$, $i\neq 1,2$, и с $E+e_{jj'}$, то аналогично описанию образующей w_{12}^r получаем, что

$$v_{12}^r = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & & a_2 & b_2 & & \\ 0 & d_1 & & c_2 & d_2 & & \\ & & \mathrm{diag}[s_1, s_2, \ldots] & & & & \ddots \\ 0 & 0 & & a_1 & 0 & & \\ 0 & 0 & & 0 & d_1 & & \\ & & \ddots & & & & \mathrm{diag}[s_1, s_2, \ldots] \end{pmatrix}.$$

Так как $\big(E-2(e_{11}+e_{1'1'})\big)v_{12}^r\big(E-2(e_{11}+e_{1'1'})\big) = (v_{12}^r)^{-1}$, то так же, как выше, получаем, что $a_1 = d_1 = s_i$, $a_2 = d_2 = 0$. Ввиду унитарности v_{12}^r получаем, что $c_2 = b_2^{\varepsilon_1}$.

Шаг 9. Так как

$$\varphi(h_{ij}) = \begin{pmatrix} s_{ij} & 0 \\ 0 & s_{ij} \end{pmatrix},$$

то $\varphi(w_{ij}^r) = E+a_r z_{ij} - a_r^{\varepsilon_1} z_{j'i'}$, $\varphi(v_{ij}^s) = E+b_r z_{ij'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{ji'}$, причём a_r, b_r зависят только от элемента r. Покажем, что $a_r = b_r$.

Имеем

$$[E + re_{12'} + r^\tau e_{21'}, E + e_{1'1}](E + r^\tau r e_{22'}) = E + r^\tau e_{21} - re_{1'2'}.$$

Следовательно,

$$[E + b_r z_{12'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{21'}, E + z_{11'}](1 + dz_{11'}) = \\ = E + b_r z_{12'} + b_r^{\varepsilon_1} z_{21'} + (d + b_r^{\varepsilon_1} b_r) z_{22'} = E + a_r z_{12} - a_r^{\varepsilon_1} z_{2'1'},$$

откуда следует, что $a_r = b_r$.

Покажем, что $\varphi(1 + e_{12} - e_{2'1'}) = 1 + z_{12} - z_{2'1'}$. Имеем

$$\big((1+e_{12}-e_{2'1'})(1-e_{21}+e_{1'2'})(1-e_{21}+e_{1'2'})\big)^2 = 1-2(e_{11}+e_{22}+e_{1'1'}+e_{2'2'}).$$

Значит,

$$\big((E + az_{12} - a^{\varepsilon_1} z_{2'1'})(E + 2az_{21} - 2a^{\varepsilon_1} z_{1'2'})\big)^2 = E - 2(z_{11} + z_{22} + z_{1'1'} + z_{2'2'}).$$

Следовательно, $a^2 = 1$. Также имеем $E+e_{13}-e_{3'1'} = [E+e_{12}-e_{2'1'}, E+e_{23}-e_{3'2'}]$. Тогда

$$E + az_{13} - a^{\varepsilon_1} z_{3'1'} = [E + az_{12} - a^{\varepsilon_1} z_{2'1'}, E + az_{23} - a^{\varepsilon_1} z_{3'2'}],$$

откуда следует, что $a^2 = a$. Значит, $a = 1$.

Имеем

$$[E + e_{12} - e_{2'1'}, E + re_{12'} + re_{21'}] = E + 2re_{11'}, \quad r = r^\tau.$$

Следовательно,

$$[E + z_{12} - z_{2'1'}, E + a_r z_{12'} - a_r z_{21'}] = E + 2c_r z_{11'}.$$

Отсюда выводим, что $a_r = c_r$.

Определим отображение $\pi\colon R \to S_1$ по правилу $\pi(r) = a_r$. Отображение π — гомоморфизм колец, так как

$$[E + ae_{12} - a^\tau e_{2'1'}, E + be_{23} - b^\tau e_{3'2'}] = E + abe_{13} - b^\tau a^\tau e_{3'1'}.$$

Поскольку

$$\begin{aligned} E + \pi(r^\tau) + \pi(r^\tau)^{\varepsilon_1} = \varphi(E + r^\tau e_{12'} + re_{21'}) = \\ = \varphi(h_{12})\big(\varphi(E + re_{12'} + r^\tau e_{21'})\big)\varphi(h_{12}) = E + \pi(r)^{\varepsilon_1} z_{12'} + \pi(r) z_{21'}, \end{aligned}$$

то $\pi(r^\tau) = \pi(r)^{\varepsilon_1}$.

Определим отображение $\theta\colon \langle \mathrm{U}(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}(S_1)\rangle$ по формуле $\theta(A) = \big(\pi(a_{ij})\big)$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$. Очевидно, что θ — кольцевой гомоморфизм, причём ввиду результата шага 9

$$\theta(A) = \alpha \circ \varphi(A) \quad \text{при} \quad A \in \mathrm{EU}(R).$$

Пусть $\theta(A) = 0$, т. е. $\pi(a_{ij}) = 0$, $i, j \in \mathbb{N} \cup \mathbb{N}'$. Пусть r — некоторый элемент из матрицы A. Тогда

$$\varphi(E + re_{12} - r^\tau e_{2'1'}) = E + \pi(r) z_{12} - \pi(r)^{\varepsilon_1} z_{2'1'} = E.$$

Так как φ — изоморфизм, то $r = 0$, следовательно, θ — инъективное отображение.

Рассматривая отображение $\varphi^{-1}\colon \mathrm{U}(S_1) \to \mathrm{U}(R)$, получаем, что θ сюръективно. Значит, θ — кольцевой изоморфизм. Отсюда получаем, что отображение $\alpha^{-1} \circ \theta\colon \langle \mathrm{U}(R)\rangle \to \langle \mathrm{U}(S)\rangle$ также является кольцевым изоморфизмом и удовлетворяет условию теоремы. Теорема доказана.

Литература

[1] Голубчик И. З., Михалёв А. В. Изоморфизм унитарных групп над ассоциативными кольцами // Зап. науч. сем. ЛОМИ АН СССР. — 1983. — Т. 132. — С. 97—109.

[2] Клейн И. С., Михалёв А. В. Ортогональная группа Стейнберга над кольцом с инволюцией // Алгебра и логика. — 1970. — Т. 9, № 2. — С. 145—166.

[3] Петечук В. М. Автоморфизмы симплектической группы $\mathrm{Sp}_n(R)$ над некоторыми локальными кольцами: Деп. ВИНИТИ, № 2224-80.

[4] Петечук В. М. Изоморфизмы симплектических групп над коммутативными кольцами // Алгебра и логика. — 1983. — Т. 22, № 5. — С. 551—562.

[5] Dieudonne J. On the automorphisms of the classical groups // Mem. Am. Math. Soc. — 1951. — Vol. 2. — P. 1—95.

[6] Hahn A. J., O'Meara O. T. The Classical Groups and K-Theory. — Berlin: Springer, 1989.

[7] Hua L. K. On the automorphisms of the symplectic group over any field // Ann. Math. — 1948. — Vol. 49. — P. 739—759.

[8] Johnson A. A. The automorphisms of the unitary groups over infinite fields // Am. J. Math. — 1973. — Vol. 95, No. 1. — P. 87—107.

[9] McQueen L., McDonald B. R., Automorphisms of the symplectic group over a local ring // J. Algebra. — 1974. — Vol. 30, No. 1-3. — P. 485—495.

[10] O'Meara O. T. The automorphisms of the standard symplectic group over any integral domain // J. Reine Angew. Math. — 1968. — Vol. 230. — P. 103—138.

[11] Rickart C. E. Isomorphic group of linear transformations. II // Am. J. Math. — 1951. — Vol. 73. — P. 697—716.

[12] Schreier O., van der Waerden B. L. Die Automorphismen der projektiven Gruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. — 1928. — B. 6. — S. 303—322.