# Группы с циклическим регуляторным фактором в классе почти вполне разложимых абелевых групп

**Е. А. БЛАГОВЕЩЕНСКАЯ**
*Петербургский университет путей сообщения,*
*Санкт-Петербургский государственный*
*политехнический университет*
e-mail: kblag2002@yahoo.com

УДК 512.54

**Ключевые слова:** абелевы группы без кручения конечного ранга с циклическим регуляторным фактором, кольцо эндоморфизмов, группа автоморфизмов.

**Аннотация**

Обсуждаются некоторые результаты о почти вполне разложимых группах с циклическим регуляторным фактором в контексте общей теории почти вполне разложимых абелевых групп.

**Abstract**

*E. A. Blagoveshchenskaya, Cyclic regulator quotient groups in the class of almost completely decomposable groups*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 23—31.

Some results on almost completely decomposable groups with cyclic regulator quotient are discussed in the context of the general theory of almost completely decomposable Abelian groups.

*Статья посвящена профессору*
*Альфреду Львовичу Шмелькину*
*по случаю его 75-летия*

## 1. Введение

Целью данного обзора является выявление особой роли почти вполне разложимых абелевых групп без кручения конечного ранга с циклическим регуляторным фактором (crq-групп) в классе всех таких групп с произвольным регуляторным фактором (acd-групп). Первые результаты о crq-группах появились в середине XX столетия и касались прямых разложений и проблем классификации абелевых групп без кручения в целом (см. [23, проблемы 67, 68]). В действительности рассмотрение acd-групп как таковых было мотивировано растущим интересом ко всем абелевым группам без кручения, поэтому почти

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 4, с. 23—31.

вполне разложимые группы зачастую исследовались без какого-либо названия для них. Приведём некоторые важные определения.

Натуральное число $n$ называется *рангом* абелевой группы без кручения $X$, если оно является мощностью его максимальной линейно независимой системы [23, раздел 16]. Ранг группы $X$ обозначается $\mathrm{rk}\, X$. Любая прямая сумма групп ранга 1 называется вполне разложимой группой.

Если $V$ является подгруппой в $X$ (возможно, $V = X$), пишем $V \subset X$ и

$$V_*^X = \{g \in X \colon \text{существует } n \in \mathbb{N}, \text{ для которого } ng \in V\}$$

обозначает *сервантную оболочку* $V$ в $X$. Подгруппа $V$ называется *сервантной* подгруппой в $X$, если $V_*^X = V$.

Хорошо известно, что абелева группа без кручения $X$ конечного ранга $n$ определяется с точностью до изоморфизма как подгруппа группы $\mathbb{Q}^n$ (т. е. подгруппа конечной прямой суммы групп, изоморфных аддитивной группе $\mathbb{Q}$ рациональных чисел). Несмотря на это очень простое и естественное определение, было трудно понять структуру абелевых групп без кручения, в основном из-за их неизоморфных прямых разложений [23, раздел 90].

Очевидно, что произвольная абелева группа без кручения $X$ содержит (неединственную с точностью до изоморфизма) вполне разложимую подгруппу $A$ того же ранга, что и $X$, так что для любого элемента $x \in X$ существует натуральное число $k$, удовлетворяющее условию $kx \in A$. Пусть $A = A_1 \oplus A_2 \oplus \ldots \oplus A_n$ — разложение $A$ на прямые слагаемые ранга 1. Не умаляя общности, предположим, что все $A_i$, $i = 1, \ldots, n$, сервантные в $X$ (если $A_i$ не является сервантной в $X$, вместо неё возьмём сервантную оболочку подгруппы $A_i$ в $X$). Условие $\mathrm{rk}\, A = \mathrm{rk}\, X$ обеспечивает то, что фактор-группа $X/A$ состоит из элементов конечного порядка и не является ограниченной в общем случае. Обычный алгебраический подход состоит в упрощении ситуации требованием конечности группы $X/A$. Это привело к возникновению нового класса acd-групп.

Почти вполне разложимая группа (*acd-группа*) $X$ — это абелева группа без кручения конечного ранга, содержащая вполне разложимую подгруппу $A$, такую что $X/A$ — конечная группа. Если к тому же $X/A$ — циклическая группа, то $X$ называется acd-группой с циклическим регуляторным фактором (*crq-группой*).

## 2. Определения и некоторые важные результаты теории acd-групп

Теория почти вполне разложимых групп в последние десятилетия интенсивно развивается, и монография А. Мадера «Почти вполне разложимые группы» содержит её главные результаты, полученные до появления этой книги. Замечательной чертой acd-групп является то, что все их вполне разложимые подгруппы минимального индекса изоморфны [24, лемма 4.2.1, теорема 4.2.13]. Они называются *регулярными подгруппами* acd-группы. Пересечение $R(X)$ всех регулярных подгрупп группы $X$ оказалось вполне характеристической вполне разложимой подгруппой в $X$ [24, определение 4.1.5, теорема 4.4.4, следствие 4.4.5]. Эта особая единственным образом определённая вполне разложимая подгруппа $R(X)$ в acd-группе $X$ называется *регулятором* группы $X$, обозначим её $A = R(X)$. Мы также вводим *регуляторную экспоненту*, определяемую как наименьшее положительное целое число $e$ со свойством $e\big(X/R(X)\big) = 0$.

В действительности свойства абелевой группы $X$ тесно связаны с групповыми свойствами её кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} X$. Монография [14] создаёт общий всеобъемлющий фундамент для исследования этих связей, так как наряду с классическими результатами содержит и современные. Главным основанием для сочетания группового и кольцевого подходов в случае acd-групп является хорошо известный факт, что $\operatorname{End} X$ acd-группы $X$ также является acd-группой как аддитивная структура (см., например, [24, 25.2]). Следующая характеристика кольца эндоморфизмов acd-группы основана на том, что регулятор $A$ является вполне характеристической подгруппой в $X$, и следовательно, для любого $\varphi \in \operatorname{End} X$ верно, что $\varphi|_A \in \operatorname{End} A$ [24, лемма 8.1.5]. Кроме того, acd-группа $X$ ранга $n$ находится в делимой оболочке $\mathbb{Q}A \cong \mathbb{Q}^n$ своего регулятора $A$ и $\operatorname{End} X$ может рассматриваться как подкольцо кольца $\operatorname{End} A$. Сказанное сформулировано в следующей лемме.

**Лемма 2.1 [9, лемма 2.1].** *Пусть $X$ — почти вполне разложимая группа с регулятором $A$, и пусть $e$ — положительное целое число, для которого $eX \subset A$. Тогда*

$$\operatorname{End} X = \{\varphi \in \operatorname{End} A\colon (eX)\varphi \subset eX\}.$$

Следуя традициям, мы используем запись $\langle \ldots \rangle$ для группы, порождённой элементами в угловых скобках.

*Тип* элемента $g \in X$, $g \neq 0$ (обозначение $\operatorname{tp}_X g$), можно определить как класс изоморфизма рациональной группы $\tau$, которая изоморфна $\langle g \rangle_*$ в $X$ и содержит $\mathbb{Z}$. Тогда мы можем сказать, что элемент $g$ имеет тип $\tau$, где $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$. Далее, $\operatorname{tp}_X g$ совпадает с типом группы, $\operatorname{tp} X$, если $X$ — однородная группа.

Следуя стандартным определениям, введём $X(\tau) = \{g \in X\colon \operatorname{tp}^X(g) \geqslant \tau\}$, $X^*(\tau) = \sum\limits_{\sigma > \tau} X(\sigma)$ и сервантную оболочку группы $X^*(\tau)$ в $X$, которую будем обозначать $X^\sharp(\tau)$. Тип $\tau$ называется *критическим* для группы без кручения $X$ и является элементом множества $T_{\mathrm{cr}}(X)$, если $X(\tau)/X^\sharp(\tau) \neq 0$ (см. [24, с. 37, определение 2.4.6]).

Мы называем группу $X$ группой *кольцевого* типа, если $T_{\mathrm{cr}}(X)$ состоит только из идемпотентных типов, т. е. тех типов, которые представляются характеристиками, состоящими только из символов 0 и $\infty$ (см. [23, раздел 85; 24, с. 13]).

Мы говорим, что $X$ является *блочно-жёсткой* группой, если множество $T_{\mathrm{cr}}(X)$ представляет собой антицепь. В этом случае регулятор $R(X)$ также является блочно-жёсткой группой, так как $T_{\mathrm{cr}}(X) = T_{\mathrm{cr}}(A)$. Если при этом $\operatorname{rk} A(\tau) = 1$ для всех $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(X)$, то $A$ и $X$ называются *жёсткими* группами.

Поскольку acd-группы имеют довольно сложную структуру и допускают неизоморфные прямые разложения, традиционно они исследуются с использованием понятия почти изоморфизма ($\cong_{\mathrm{nr}}$), эквивалентности, которая слабее изоморфизма ($\cong$), но отражает свойства, связанные с прямыми разложениями, достаточно полно (см. [1, 2, 13, 21]).

Существует несколько эквивалентных определений почти изоморфизма, и мы выбираем следующее

**Определение 2.2 [15, теорема 7.16; 24, определение 9.1.2, теорема 9.1.4, 5].** Пусть $G$ и $H$ — группы конечного ранга без кручения. Тогда $G$ и $H$ *почти изоморфны* (обозначение $G \cong_{\mathrm{nr}} H$) тогда и только тогда, когда для каждого простого $q$ существует мономорфизм $\varphi_q \colon G \to H$, для которого индекс $[H : G\varphi_q]$ конечен и $q$ не делит $[H : G\varphi_q]$.

Если две группы почти изоморфны, то они обе или неразложимы, или обладают почти изоморфными разложениями касательно их неразложимых прямых слагаемых (см. [15, теорема 7.16]).

В [5] показано, что, если acd-группы кольцевого типа почти изоморфны, то их кольца эндоморфизмов тоже почти изоморфны как абелевы группы без кручения. В меньшем классе crq-групп этот вывод получил дальнейшее развитие, завершившееся красивой теоремой в форме Бэра—Капланского. Доказательство этой теоремы базируется на классификации этих групп с точностью до почти изоморфизма, полученной в [21].

Если crq-группа $X$ является жёсткой, то существует в точности один представитель в её классе почти изоморфизма, изоморфный аддитивной группе кольца $\operatorname{End} X$, которое является $E$-кольцом [20, теорема 4.6, следствие 3.5]. Это позволяет доказать определяемость с точностью до почти изоморфизма блочно-жёстких crq-групп кольцевого типа их кольцами эндоморфизмов. [20, теорема 4.6].

**Теорема 2.3 (теорема Бэра—Капланского о почти изоморфизме).** *Блочно-жёсткие crq-группы $X$ и $Y$ кольцевого типа почти изоморфны, если и только если* $\operatorname{End}(X) \cong \operatorname{End}(Y)$.

Заметим, что класс почти вполне разложимых групп не удовлетворяет теореме Бэра—Капланского о почти изоморфизме. Причина в том, что в нём содержатся группы, получившие название *строго неразложимых групп*, имеющие кольца эндоморфизмов такой же crq-структуры, что и кольца эндоморфизмов подходящих почти вполне разложимых групп с циклическим регуляторным фактором [12]. Доказательство теоремы Бэра—Капланского о почти изоморфизме открыло возможность введения кольцевых структур на crq-группах кольцевого типа [8, 10].

В целом класс блочно-жёстких crq-групп представляет особый интерес как источник новых идей и элегантных формулировок результатов. Чтобы подчеркнуть эту роль crq-групп в развитии теории acd-групп, следует напомнить некоторые известные результаты. В их числе полная классификация с точностью до изоморфизма crq-групп $X$, матричные представления кольца эндоморфизмов $\operatorname{End} X$ crq-группы $X$ и группы автоморфизмов кольца $\operatorname{End} X$ (см. [4,16]). Однако наибольшее внимание, без сомнения, должно быть уделено теореме Бэра—Капланского о почти изоморфизме и теории прямых разложений crq-групп.

Классификация прямых разложений crq-групп с точностью до почти изоморфизма получена применением комбинаторного метода [1]. Именно этот взгляд на crq-группы привёл к анализу числовых параметров, присущих прямым разложениям crq-групп, а именно количества неразложимых слагаемых и их рангов в возможных разложениях одной и той же группы [1, 3]. Теперь обсудим эти результаты более детально.

## 3. Классификация и прямые разложения crq-групп

Сфокусируем внимание на блочно-жёсткой crq-группе $X$ кольцевого типа с регулятором $A$ и циклическим регуляторным фактором $X/A$ экспоненты $e = \exp X/A = |X/A|$. Вполне разложимая группа $A$ является прямой суммой своих $\tau$-однородных компонент $A(\tau)$, где $A(\tau) \cong n_\tau \tau$ (прямая сумма $n_\tau$ копий группы $\tau$, $\mathbb{Z} \subset \tau \subset \mathbb{Q}$), т. е. $A = \bigoplus\limits_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} A(\tau)$ и $n = \operatorname{rk} X = \operatorname{rk} A = \sum\limits_{\tau \in T_{\mathrm{cr}}(A)} n_\tau$.

Заметим, что блочно-жёсткая acd-группа $X$ имеет так называемый «регулярный регулятор», что означает наличие в ней только одной регулярной подгруппы, которая и есть регулятор в $X$. Так как регулярные подгруппы являются вполне разложимыми подгруппами минимального индекса в $X$, их $\tau$-однородные компоненты $A(\tau)$ сервантны в $X$.

Мы используем числа $m_\tau(X)$, введённые для crq-группы $X$ в [24, определение 12.6.2] и [21, определение 2.1]. Определим естественный эпиморфизм

$$\bar{\phantom{A}} : A \mapsto A/eA = \bar{A}. \tag{1}$$

Выберем образующий элемент $b + A$ группы $X/A$. Тогда $eb = \sum\limits_{\tau \in T} v_\tau$, $v_\tau \in A_\tau$ и

$$m_\tau = m_\tau(X) = |\bar{v}_\tau| = |v_\tau + eA|. \tag{2}$$

Очевидно, $m_\tau | e$ для всех $\tau \in T$.

В [21, лемма 2.2] показано, что $m_\tau(X)$ не зависят от выбора элемента $b$ и служат инвариантами группы $X$. Более того, они одинаковы для почти изоморфных групп.

**Теорема 3.1 (критерий почти изоморфизма [21, теорема 2.4]).** *Пусть $X$ и $Y$ — блочно-жёсткие crq-группы. Тогда $X \cong_{\mathrm{nr}} Y$, если и только если $R(X) \cong R(Y)$ и $m_\tau(X) = m_\tau(Y)$ для всех типов $\tau$.*

Особое разложение, называемое *главным разложением* в [21, теорема 3.5] и [24, теорема 13.1.6], всегда существует для почти вполне разложимых групп в соответствии с теоремой о главном разложении [24, теорема 9.2.7]. Для рассматриваемых групп оно описано в следующей теореме.

**Теорема 3.2 (о главном разложении).** *Пусть $X$ — блочно-жёсткая crq-группа. Тогда существует разложение $X = Y \oplus A'$, такое что $A'$ вполне разложима, $Y$ является жёсткой crq-группой и $\tau \in T_{\mathrm{cr}}(Y)$, если и только если $m_\tau(Y) = m_\tau(X) > 1$. Группа $Y$ единственна с точностью до почти изоморфизма, и $A'$ единственна с точностью до изоморфизма.*

Такое разложение не единственно, но определено однозначно с точностью до почти изоморфизма. Другие разложения с точностью до почти изоморфизма описываются следующим образом.

**Теорема 3.3 (критерий разложимости [21, теорема 3.3]).** *Пусть $X$ — блочно-жёсткая crq-группа. Если $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_t \oplus X_{t+1}$, причём $X_{t+1}$ вполне разложима ($\mathrm{rk}\, X_{t+1} \geqslant 1$) и $m_{\tau\, i} = m_\tau(X_i)$, то $m_\tau(X) = \prod\limits_{i=1}^{t} m_{\tau\, i}$ для всех типов $\tau$ и выполняются следующие условия.*

D1. *Целые числа $m_{\tau\, i}$ и $m_{\sigma\, j}$ являются взаимно простыми, если $i \neq j$.*

D2. $|\{i\colon m_{\tau\, i} > 1\}| \leqslant \mathrm{rk}\big(X(\tau)\big)$.

*Обратно, если $m_\tau(X) = \prod\limits_{i=1}^{t} m_{\tau\, i}$ — разложения чисел $m_\tau(X)$, удовлетворяющие условиям D1 и D2, то существует разложение $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \ldots \oplus X_t \oplus X_{t+1}$, в котором $X_i$ — жёсткие группы, $T_{\mathrm{cr}}(X_i) = \{\rho\colon m_{\rho\, i} > 1\}$ и $m_\tau(X_i) = m_{\tau\, i}$ для всех $i = 1, \ldots, t$, при этом $X_{t+1}$ — вполне разложимая группа.*

Эти результаты связаны с графической (комбинаторной) теорией прямых разложений crq-групп. Главным достижением этой теории является полное решение сформулированных Л. Фуксом проблем 67 и 68, касающихся рангов неразложимых слагаемых и их числа в различных разложениях одной и той же абелевой группы без кручения [23]. Сначала эти проблемы были решены для класса crq-групп следующими теоремами (см. [3]).

**Теорема 3.4 (решение проблемы 67 для класса crq-групп).** *Пусть $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s < n$ — натуральные числа. Для того чтобы существовала блочно-жёсткая crq-группа ранга $n$, допускающая разложения в прямую сумму $n_1$ неразложимых слагаемых, $n_2$ неразложимых слагаемых,..., $n_s$ неразложимых слагаемых, необходимо и достаточно, чтобы $n_1 \geqslant n/(n - n_s + 1)$.*

**Теорема 3.5 (решение проблемы 68 для класса crq-групп).** *Пусть $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s = l_1 + l_2 + \ldots + l_t$, $1 < s, t < n$, — два разбиения натурального числа $n$ в суммы натуральных слагаемых. Для того чтобы существовала блочно-жёсткая crq-группа ранга $n$, допускающая как разложение в прямую сумму неразложимых слагаемых рангов $r_1, r_2, \ldots, r_s$, так и разложение в прямую сумму неразложимых слагаемых рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$, необходимо и достаточно, чтобы $r_i \leqslant n - t + 1$ для всех $i = 1, \ldots, s$ и $l_j \leqslant n - s + 1$ для всех $j = 1, \ldots, t$.*

На основании этих необходимых и достаточных условий существования crq-группы, обладающей требуемыми свойствами разложимости, проблемы Л. Фукса 67 и 68 были успешно решены для класса acd-групп специальным обобщением используемой техники. Для них условия получились более сложными, чем для crq-групп, но имеющими ту же форму неравенств.

**Теорема 3.6 (решение проблемы 67 для класса acd-групп).** *Пусть $1 < n_1 < n_2 < \ldots < n_s < n$ — натуральные числа. Для того чтобы существовала абелева группа без кручения ранга $n$, допускающая разложения в прямую сумму $n_1$ неразложимых слагаемых, $n_2$ неразложимых слагаемых,$\ldots$, $n_s$ неразложимых слагаемых, необходимо и достаточно, чтобы $n_1 \geqslant q$, где $q = q(n, n_s)$ — некоторое натуральное число, определяемое числами $n$ и $n_s$.*

**Теорема 3.7 (решение проблемы 68 для класса acd-групп).** *Пусть $n = r_1 + r_2 + \ldots + r_s = l_1 + l_2 + \ldots + l_t$, $1 < s, t < n$, — два разбиения натурального числа $n$ в суммы натуральных слагаемых, содержащие соответственно $s'$ и $t'$ единиц. Для того чтобы существовала абелева группа без кручения ранга $n$, допускающая как разложение в прямую сумму неразложимых слагаемых рангов $r_1, r_2, \ldots, r_s$, так и разложение в прямую сумму неразложимых слагаемых рангов $l_1, l_2, \ldots, l_t$, необходимо и достаточно, чтобы $r_i \leqslant r$ для всех $i \leqslant s$ и $l_j \leqslant l$ для всех $j \leqslant t$, где $r = r(n, t', t)$, $l = l(n, s', s)$ — некоторые натуральные числа.*

Точные границы $r = r(n, t', t)$, $l = l(n, s', s)$ для рангов неразложимых слагаемых в различных разложениях одной и той же группы и ограничения на их количество $q = q(n, n_s)$ указаны в [1,13].

Оказалось, что сформулированные необходимые и достаточные условия на натуральные числа для того, чтобы они могли быть реализованы как числовые характеристики различных разложений одной и той же acd-группы, совпадают с этими условиями для класса всех абелевых групп без кручения конечного ранга. Это обеспечило полное решение данных проблем.

Понятие почти изоморфизма естественным образом было расширено с класса абелевых групп без кручения конечного ранга на некоторые классы групп счётного ранга [22]. Класс почти жёстких групп введён как обобщение класса crq-групп. Этот класс абелевых групп без кручения счётного ранга наследует некоторые важные свойства crq-групп, включая определяемость с точностью до почти изоморфизма кольцами эндоморфизмов, а также теорию прямых разложений [6,11,18].

Более того, теория crq-групп — фундамент для изучения некоторых батлеровских групп, являющихся расширениями конечных или бесконечных прямых сумм сильно неразложимых групп [17,19].

Справедливым будет заключение, что crq-группы интересны сами по себе и одновременно как источник развития знаний о других классах абелевых групп без кручения.

# Литература

[1] Благовещенская Е. А. О прямых разложениях абелевых групп без кручения конечного ранга // Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1983. — Т. 132. — С. 17—25.

[2] Благовещенская Е. А. Разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения в прямые суммы неразложимых групп // Алгебра и анализ. — 1992. — Т. 4, № 2. — С. 62—69.

[3] Благовещенская Е. Графическое истолкование некоторых абелевых групп без кручения конечного ранга // Прикладная математика: Тр. Санкт-Петербургского политехнического ун-та. — 1996. — Т. 461. — С. 53—59.

[4] Благовещенская Е. А. Автоморфизмы колец эндоморфизмов блочно-жёстких почти вполне разложимых групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2004. — Т. 10, вып. 2. — С. 23—50.

[5] Благовещенская Е. Двойственные связи между почти вполне разложимыми группами и их кольцами эндоморфизмов // Соврем. мат. и её прил. — 2004. — Т. 13. Алгебра.

[6] Благовещенская Е. Прямые разложения локально почти вполне разложимых групп счётного ранга // Чебышёвский сб. — 2005. — Т. 6, № 4. — С. 24—47.

[7] Благовещенская Е. Двойственная структура почти вполне разложимых групп и их колец эндоморфизмов // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 2. — С. 159—160.

[8] Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые группы и кольца // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 8. — С. 3—27.

[9] Благовещенская Е. А. Почти вполне разложимые группы с примарным регуляторным фактором и их кольца эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 17—38.

[10] Благовещенская Е. Теоремы реализации и классификации для одного класса колец без кручения конечного ранга // Успехи мат. наук. — 2006. — Т. 61, № 4. — С. 183—184.

[11] Благовещенская Е. А. Определяемость абелевых групп без кручения счётного ранга некоторого класса их кольцами эндоморфизмов // Фундамент. и прикл. мат. — 2007. — Т. 13, вып. 1. — С. 31—43.

[12] Благовещенская Е. А. Кольца эндоморфизмов жёстких почти вполне разложимых групп // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 7. — С. 31—47.

[13] Благовещенская Е. А., Яковлев А. В. Прямые разложениях абелевых групп конечного ранга без кручения // Алгебра и анализ. — 1989. — Т. 1. — С. 111—127.

[14] Крылов П. А., Михалёв А. В., Туганбаев А. А. Абелевы группы и их кольца эндоморфизмов. — М.: Факториал, 2006.

[15] Arnold D. Finite Rank Torsion Free Abelian Groups and Rings. — Berlin: Springer, 1982. — (Lect. Notes in Math.; Vol. 931).

[16] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of almost completely decomposable groups // Rings, Modules, Algebras and Abelian Groups. — New York: Marcel Dekker, 2004. — (Lect. Notes Pure Appl. Math.; Vol. 236). — P. 45—54.

[17] Blagoveshchenskaya E. Classification of a class of finite rank Butler groups // Models, Modules and Abelian Groups. — 2008. — P. 135—146.

[18] Blagoveshchenskaya E., Göbel R. Classification and direct decompositions of some Butler groups of countable rank // Commun. Algebra. — 2002. — Vol. 30, no. 7. — P. 3403—3427.

[19] Blagoveshchenskaya E., Göbel R., Strüngmann L. Classification of some Butler groups of infinite rank // Commun. Algebra. — 2013. — Vol. 380. — P. 1—17.

[20] Blagoveshchenskaya E., Ivanov G., Schultz P. The Baer—Kaplansky theorem for almost completely decomposable groups // Contemp. Math. — 2001. — Vol. 273. — P. 85—93.

[21] Blagoveshchenskaya E., Mader A. Decompositions of almost completely decomposable Abelian groups // Contemp. Math. — 1994. — Vol. 171. — P. 21—36.

[22] Blagoveshchenskaya E., Strüngmann L. Near-isomorphism for a class of infinite rank torsion-free Abelian groups // Commun. Algebra. — 2007. — Vol. 35. — P. 1—18.

[23] Fuchs L. Infinite Abelian Groups. Vols. 1, 2. — New York: Academic Press, 1970; 1973.

[24] Mader A. Almost Completely Decomposable Abelian Groups. — Amsterdam: Gordon and Breach, 1999. — (Algebra, Logic and Applications; Vol. 13).