Мультипликативно идемпотентные полукольца

Е. М. ВЕЧТОМОВ
Вятский государственный
гуманитарный университет
e-mail: vecht@mail.ru

А. А. ПЕТРОВ
Вятский государственный
гуманитарный университет
e-mail: apetrov43@mail.ru

УДК 512.558

Ключевые слова: полукольцо, конгруэнция, подпрямо неразложимое полукольцо, мультипликативно идемпотентное полукольцо, многообразие полуколец.

Аннотация

Статья посвящена изучению полуколец с идемпотентным умножением. Доказаны общие структурные теоремы для таких полуколец. Основное внимание уделено исследованию класса $\mathfrak{M}$ всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец. Получены необходимые условия подпрямой неразложимости полуколец из $\mathfrak{M}$. Рассмотрены некоторые свойства многообразия $\mathfrak{M}$. В частности, показано, что $\mathfrak{M}$ порождается двумя своими подмногообразиями, заданными тождествами $3x = x$ и $3x = 2x$. Исследовано многообразие $\mathfrak{N}$, порождённое двухэлементными коммутативными мультипликативно идемпотентными полукольцами. Доказано, что решётка всех подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ является 16-элементной булевой решёткой.

Abstract

E. M. Vechtomov, A. A. Petrov, Multiplicatively idempotent semirings, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 41—70.

The article is devoted to the investigation of semirings with idempotent multiplication. General structure theorems for such semirings are proved. We focus on the study of the class $\mathfrak{M}$ of all commutative multiplicatively idempotent semirings. We obtain necessary conditions when semirings from $\mathfrak{M}$ are subdirectly irreducible. We consider some properties of the variety $\mathfrak{M}$. In particular, we show that $\mathfrak{M}$ is generated by two of its subvarieties, defined by the identities $3x = x$ and $3x = 2x$. We explore the variety $\mathfrak{N}$ generated by two-element commutative multiplicatively idempotent semirings. It is proved that the lattice of all subvarieties of $\mathfrak{N}$ is a 16-element Boolean lattice.

1. Предварительные сведения

Некоторые результаты статьи анонсированы в [2—4, 8, 17].

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 41—70.

Полукольцом называется алгебраическая структура $\langle S,+,\cdot\rangle$ с бинарными операциями сложения $+$ и умножения $\cdot$, такая что $\langle S,+\rangle$ — коммутативная полугруппа, $\langle S,\cdot\rangle$ — полугруппа, умножение дистрибутивно относительно сложения с обеих сторон.

Полурешёткой называется любая идемпотентная коммутативная полугруппа.

Элемент θ произвольного полукольца S назовём *поглощающим по умножению* (*поглощающим по сложению*), если для всех $x \in S$ выполняется $x \cdot \theta = \theta \cdot x = \theta$ (соответственно $x + \theta = \theta$). Элемент полукольца, поглощающий по сложению и по умножению, называется *поглощающим*. Если в полукольце S существует элемент 0, нейтральный по сложению и поглощающий по умножению, то S называется *полукольцом с нулём* 0. Наконец, если полукольцо S обладает элементом 1, нейтральным по умножению, то S называется *полукольцом с единицей* 1.

Отметим, что к любому полукольцу S можно естественным образом присоединить нулевой элемент 0 или поглощающий элемент ∞. Обозначим полученные полукольца $S \cup \{0\}$ и $S \cup \{\infty\}$ соответственно.

Полукольцо называется *коммутативным*, если на нём тождественно выполняется $xy = yx$. Полукольцо с тождеством $xx = x$ $(x + x = x)$ называется *мультипликативно идемпотентным* (соответственно *аддитивно идемпотентным*). Полукольцо, одновременно мультипликативно и аддитивно идемпотентное, называется *идемпотентным*. Полукольцо S называется *дистрибутивным*, если на нём выполняется двойственный закон дистрибутивности $x + yz = (x + y)(x + z)$. Идемпотентное полукольцо с тождеством $x + y = xy$ называется *моннополукольцом*. Будем говорить, что полукольцо S обладает *константным сложением*, если существует элемент $t \in S$, такой что $x + y = t$ для всех $x, y \in S$ (равносильно, S удовлетворяет тождеству $x + y = u + v$). Полукольцо будем называть *прямоугольным*, если на нём тождественно выполняется $xyx = x$ (по аналогии с соответствующими полугруппами).

Отношение эквивалентности ρ на произвольном полукольце S называется *конгруэнцией*, если для всех $x, y, z \in S$ из $x \;\rho\; y$ следует $(x + z) \;\rho\; (y + z)$, $(xz) \;\rho\; (yz)$, $(zx) \;\rho\; (zy)$.

На любом полукольце S есть две тривиальные конгруэнции: нулевая конгруэнция $\mathbf{0}_S$ (отношение равенства) и единичная конгруэнция $\mathbf{1}_S$ (одноклассовая).

Полукольцо S называется *подпрямо неразложимым,* если на нём существует наименьшая ненулевая конгруэнция. Неодноэлементное полукольцо называется *конгруэнц-простым*, если на нём нет нетривиальных конгруэнций. Конгруэнц-простые полукольца подпрямо неразложимы.

При изучении многообразий полуколец исходными служат две классические теоремы Биркгофа. Напомним, что *многообразием полуколец* называется класс всех полуколец, удовлетворяющих некоторому набору полукольцевых тождеств. По первой теореме Биркгофа [5, с. 185], произвольный класс полуколец будет многообразием тогда и только тогда, когда он замкнут относительно взятия подполуколец, гомоморфных образов и любых прямых произведений. Из второй теоремы Биркгофа [5, с. 115] следует, что любое полукольцо является подпрямым произведением подпрямо неразложимых полуколец.

Для произвольного идеала I полукольца S определяется *конгруэнция Бёрна* $\rho(I)$: $x\ \rho(I)\ y$ тогда и только тогда, когда найдутся $s, t \in I$, для которых $x + s = y + t$.

Собственный идеал I полукольца S называется

- — *полустрогим* (*строгим*), если $a, a+b \in I$ (соответственно $a+b \in I$) влечёт $b \in I$;
- — *простым*, если из $ab \in I$ следует, что $a \in I$ или $b \in I$ для всех $a, b \in S$.

Через $\operatorname{Spec} S$ обозначим множество всех простых идеалов полукольца S.

Для любого элемента a полукольца S и натурального числа $n \geqslant 2$ положим

$$na = \underbrace{a + \ldots + a}_{n \text{ слагаемых}}.$$

Если S — полукольцо с единицей 1, то при $a = 1$ пишем $na = n$, так $1 + 1 = 2$, $1 + 1 + 1 = 3$.

Пусть $r(S)$ — множество всех элементов полукольца S с нулём 0, имеющих противоположные по сложению элементы. Легко убедиться, что $r(S)$ является подкольцом и строгим идеалом в S. Полукольцо S с нулём 0 называется *антикольцом*, если в нём $r(S) = \{0\}$.

Предложение 1.1. *Для произвольного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения*:

1) *в S выполняется тождество $x + xy + yx + y = x + y$, в частности $x + x + x + x = x + x$ (или $4x = 2x$)*;
2) *если S — полукольцо с единицей 1, то 1 является единственным обратимым элементом в S*;
3) *если S — полукольцо с нулём 0, то в нём выполняется импликация $x + y = 0 \Longrightarrow x = y$*;
4) *из $Sa = bS$ следует $a = b$ для любых $a, b \in S$*;
5) *$aS = bS$ и $Sa = Sb$ влекут $a = b$ для всех $a, b \in S$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Для любых $x, y \in S$ имеем $x + y = (x + y)^2 = x^2 + xy + yx + y^2 = x + xy + yx + y$. Полагая теперь $x = y$, получаем $x + x = x + x + x + x$.

Докажем второе утверждение. Пусть $ab = 1$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $a = a \cdot 1 = a \cdot ab = a^2b = ab = 1$.

Утверждение 3) следует из того, что в мультипликативно идемпотентном полукольце S множество $r(S)$ является булевым подкольцом.

Докажем утверждение 4). В этом случае $a = bs$ и $ta = b$ для некоторых $s, t \in S$. Тогда $a = bs = b^2s = ba = ta^2 = ta = b$.

Докажем утверждение 5). Из равенства $aS = bS$ получаем, что $a = bs$ и $b = at$ для некоторых $s, t \in S$, откуда следует, что $a = ba$, $b = ab$. Аналогично из условия $Sa = Sb$ вытекает, что $a = ab$, $b = ba$. Таким образом, $a = b$. ☐

Следствие 1.1. *Фактор-полукольцо $S/\rho(2S)$ будет булевым кольцом.*

Следствие 1.2. *Любой главный идеал коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца порождается однозначно определённым элементом.*

Пример 1.1. Зададим на (верхней) полурешётке $\langle S,+\rangle$ операцию умножения $\cdot$ тождеством $xy=x$. Получаем идемпотентное полукольцо $\langle S,+,\cdot\rangle$, в котором $Sx=S$ для всех $x\in S$. Если S неодноэлементное, то $Sa=Sb$ не влечёт $a=b$ при $a\neq b$ из S. Аналогично если на полурешётке $\langle S,+\rangle$ умножение определить формулой $xy=y$, то снова получим идемпотентное полукольцо S, на котором $aS=S$ при любом $a\in S$.

В произвольном полукольце S вводится «разностное» отношение $\leqslant$: $x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x=y$ или найдётся элемент $z\in S$, такой что $x+z=y$. Отношение $\leqslant$ рефлексивно и транзитивно, но не обязательно антисимметрично. Если оно антисимметрично, т. е. является отношением порядка, то полукольцо назовём *упорядочиваемым*. Заметим, что в случае аддитивно идемпотентных полуколец отношение $\leqslant$ является порядком, при этом $x\leqslant y$ тогда и только тогда, когда $x+y=y$.

Бинарное отношение $\sim$ на S, определяемое правилом, что $x\sim y$ тогда и только тогда, когда $x\leqslant y$ и $y\leqslant x$, является конгруэнцией на полукольце S. Соответствующее фактор-полукольцо $S/{\sim}$ уже упорядочиваемое. Упорядочиваемость полукольца S равносильна тому, что $\sim$ есть отношение равенства на S (см. [1, с. 30]).

Предложение 1.2. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S упорядочиваемо тогда и только тогда, когда на нём тождественно выполняется $3x=2x$.*

Доказательство. Необходимость. Если мультипликативно идемпотентное полукольцо S упорядочиваемо, то для $x\in S$ получаем $3x=2x$, поскольку $2x\leqslant 3x$ и $3x\leqslant 4x=2x$.

Достаточность. Пусть на S тождественно выполняется $3x=2x$. Покажем, что отношение $\leqslant$ на S антисимметрично. Пусть $a\leqslant b$ и $b\leqslant a$ в S, т. е. существуют такие элементы $s,t\in S$, что $a+s=b$, $b+t=a$. Тогда $a+s+t=b+t=a$, откуда следует, что $a+2s+2t=a+s+t=a$. Ввиду тождества $3x=2x$ получаем, что $a=(a+2s+2t)+s=a+s=b$. □

Для элемента a упорядоченного множества $\langle S,\leqslant\rangle$ через $(a]$ обозначается множество $\{x\in S\colon x\leqslant a\}$ — нижний конус элемента a, через $[a)$ обозначается множество $\{x\in S\colon a\leqslant x\}$ — верхний конус элемента a.

Предложение 1.3. *В произвольном идемпотентном полукольце S с единицей 1 нижний конус $(1]$ является дистрибутивной решёткой с единицей, а верхний конус $[1)=S+1$ будет монополукольцом с единицей.*

Доказательство. Пусть S — идемпотентное полукольцо с 1. Верхняя полурешётка $\langle(1],\leqslant\rangle$ имеет наибольший элемент 1. Для любых $x,y\in(1]$ получаем $xy\leqslant x\cdot 1=x$ и $xy\leqslant y$. Возьмём $x,y,z\in(1]$. Если $z\leqslant x$ и $z\leqslant y$, то $z=zz\leqslant xy$.

Значит, $xy = \inf(x, y) = yx$. Следовательно, $\langle(1], \leqslant\rangle$ — дистрибутивная решётка с 1. Факт, что полукольцо $[1) = S + 1$ есть монополукольцо с единицей 1, вытекает из того, что 1 — наименьший элемент в $S + 1$. □

На произвольном полукольце S для любого фиксированного натурального числа $n \geqslant 2$ определим бинарное отношение $\sim_{(n)}$ следующим образом: $a \sim_{(n)} b$ тогда и только тогда, когда $na = nb$. Очевидно, что отношение $\sim_{(n)}$ будет конгруэнцией на S.

Важную роль играет конгруэнция $\sim_{(2)}$ ($x \sim_{(2)} y$ тогда и только тогда, когда $2x = 2y$) на произвольном мультипликативно идемпотентном полукольце S.

Лемма 1.1. *Отношение $\sim_{(2)}$ является наименьшей конгруэнцией на произвольном мультипликативно идемпотентном полукольце S, фактор-полукольцо по которой будет идемпотентным полукольцом.*

Доказательство. Заметим, что $s \sim_{(2)} (2s)$ для любого $s \in S$. Для всякой конгруэнции ρ, такой что S/ρ — идемпотентное полукольцо, получаем, что $\sim_{(2)} \subseteq \rho$, поскольку при любых $a, b \in S$ из $a \sim_{(2)} b$ следует $[a]_\rho = [2a]_\rho = [2b]_\rho = [b]_\rho$. □

Следующие две леммы очевидны.

Лемма 1.2. *Для любого полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1) *S мультипликативно идемпотентно тогда и только тогда, когда классы любой конгруэнции ρ на S являются подполугруппами полугруппы $\langle S, \cdot\rangle$;*
2) *S идемпотентно тогда и только тогда, когда классы любой конгруэнции ρ на S являются подполукольцами в S.*

Любой элемент a коммутативного полукольца S определяет конгруэнцию $\sim_a$ на S: $x \sim_a y$ тогда и только тогда, когда $xa = ya$.

Лемма 1.3. *Для произвольных элементов a, b коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S выполняются следующие свойства:*

1) *$x \sim_a (ax)$ для любого $x \in S$;*
2) *если S обладает единицей 1, то $a \sim_a 1$;*
3) *если $a \sim_a b$ и $a \sim_b b$, то $a = b$.*

Для произвольного элемента a полукольца S рассмотрим бинарное отношение ${}_a\!\sim$: для любых $x, y \in S$ $x\,{}_a\!\sim y$ тогда и только тогда, когда $x + a = y + a$. Отношение ${}_a\!\sim$ является конгруэнцией на полугруппе $\langle S, +\rangle$. Если же a — поглощающий элемент по умножению, то ${}_a\!\sim$ — конгруэнция на полукольце S.

Говорят, что *простые идеалы* полукольца S *разделяют его элементы*, если для любых $a, b \in S$, $a \neq b$, найдётся простой идеал в S, содержащий ровно один из элементов a, b.

Предложение 1.4. *Простые идеалы произвольного полукольца S разделяют его элементы тогда и только тогда, когда S коммутативно и мультипликативно идемпотентно.*

Доказательство. Необходимость. Пусть P — простой идеал полукольца S и $a, b \in S$. Тогда $a^2 \in P$ тогда и только тогда, когда $a \in P$. Поэтому элементы a^2 и a не разделяются простыми идеалами, и значит, они равны, а полукольцо S мультипликативно идемпотентно. Пусть $ab \in P$. В P лежит также элемент $baba = ba$. Значит, полукольцо S коммутативно.

Достаточность. Рассмотрим произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S. По умножению S является полурешёткой. Возьмём в полукольце S элементы $a \neq b$. Не выполняется одно из равенств $a = ab$ или $b = ab$. Можно считать, что $a \neq ab$. Главный идеал $bS = \{s \in S \colon sb = s\}$ полукольца S не содержит элемент a. По лемме Цорна существует идеал P, максимальный среди идеалов J в S, обладающих свойствами $bS \subseteq J$ и $a \notin J$. Покажем, что P — простой идеал. Пусть $x, y \in S \setminus P$. Тогда $xS + P \supset P$ и $yS + P \supset P$, поэтому $a \in (xs + P) \cap (yS + P)$. Значит, $a = xs + p = yt + q$ для некоторых $s, t \in S$ и $p, q \in P$. Следовательно, $a = a^2 = (xs + p)(yt + q) = (xy)st + (xsq + pyt + pq)$, откуда получаем, что $xy \notin P$, поскольку $xsq + pyt + pq \in P$. Это доказывает простоту идеала P. Остаётся заметить, что $b = b^2 \in bS \subseteq P$, но $a \notin P$. Таким образом, простой идеал P *разделяет элементы* a и b, $a \neq b$, данного полукольца S. ☐

2. Структурные свойства

Предложение 2.1. *Пусть S — полукольцо с нулём 0, для которого кольцо $r(S)$ имеет единицу. Тогда полукольцо S однозначно представимо в виде прямой суммы кольца и антикольца.*

Доказательство. Пусть кольцо $r(S)$ обладает единицей e. В кольце $r(S)$ для элемента e имеется противоположный элемент $-e$. Рассмотрим в S идеал $J = \{s + (-e)s \colon s \in S\}$. Имеем $es = ese = se$ для всех $s \in S$. Поскольку $r(S)$ — идеал в S, то $r(S) = eS$. Ясно, что $S = r(S) + J$. Далее, пусть $r_1 + (s + (-e)s) = r_2 + (t + (-e)t)$ для некоторых $r_1, r_2 \in r(S)$ и $s, t \in S$. Умножая данное равенство на элемент e, получаем $r_1 = r_1e = r_2e = r_2$, откуда следует, что $s + (-e)s = t + (-e)t$. Поэтому получаем, что $S = r(S) \oplus J$, т. е. $S \cong r(S) \times J$. Полукольцо J является антикольцом. Действительно, если $(s + (-e)s) + (t + (-e)t) = 0$ для некоторых $s, t \in S$, то $s \in r(S)$ ввиду строгости идеала $r(S)$, $s = es$ и $s + (-e)s) = es + (-e)s = 0$. Проверим единственность разложения полукольца S в прямую сумму. Предположим, что $S = R \oplus A$, где R и A — идеалы S, являющиеся соответственно кольцом и антикольцом. Очевидно, что $R = r(S)$. Возьмём элемент a в A. Имеем $ea \in R \cap A = \{0\}$ и $a = ea + (a + (-e)a) = a + (-e)a \in J$. Значит, $A \subseteq J$, откуда следует, что $A = J$, поскольку $r(S) \oplus A = r(S) \oplus J$. ☐

Следствие 2.1. *Полукольцо S с нулём и единицей изоморфно прямому произведению кольца и антикольца тогда и только тогда, когда кольцо $r(S)$ имеет (свою) единицу.*

Замечание 2.1. Как следует из предложения 2.1, в следствии 2.1 кольцо и антикольцо единственны с точностью до изоморфизма.

Следствие 2.2. *Всякое конечное мультипликативно идемпотентное полукольцо с нулём разлагается в прямую сумму однозначно определённых конечных булева кольца и мультипликативно идемпотентного антикольца.*

Доказательство. Следствие вытекает из предложения 2.1 и того факта, что конечные булевы кольца содержат единицу. ☐

Полукольцо S с поглощающим элементом по умножению θ называется *θ-расширением полукольца A при помощи полукольца B*, если существует такая конгруэнция ρ на S, что $[\theta]_\rho \cong A$ и $S/\rho \cong B$. Если $\theta = 0$ — нуль, то S называется *0-расширением полукольца A при помощи полукольца B*. Так, прямое произведение произвольных полуколец с нулём A и B есть 0-расширение A при помощи B (а также B при помощи A) посредством конгруэнции ρ, такой что $(a, b)\ \rho\ (a', b')$ означает, что $b = b'$ при любых $a, a' \in A$ и $b, b' \in B$. Аналогично полукольцо S с единицей 1 назовём *1-расширением* полукольца A при помощи полукольца B, если на S существует такая конгруэнция ρ, что $[1]_\rho \cong A$ и $S/\rho \cong B$.

Полукольцо S будем называть *полукольцевым расширением* (или *связкой*) *семейства полуколец A_i ($i \in I$) при помощи полукольца B*, если на S существует такая конгруэнция ρ, что $S/\rho \cong B$ и каждый класс $[a_i]_\rho$ является подполукольцом в S, изоморфным соответствующему полукольцу A_i.

Предложение 2.2. *Всякое мультипликативно идемпотентное полукольцо S является полукольцевым расширением семейства мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x = 2y$ при помощи идемпотентного полукольца.*

Доказательство. Учитывая лемму 1.1, достаточно проверить, что любой класс конгруэнции $\sim_{(2)}$ на S будет подполукольцом в S. Действительно, пусть для $a, b \in S$ имеем $a \sim_{(2)} b$, т. е. $2a = 2b$. Тогда $2(a+b) = 2a+2b = 2a+2a = 2a$, откуда следует, что $(a + b) \sim_{(2)} a$. Кроме того, по лемме 1.2 $(ab) \sim_{(2)} a$. ☐

Предложение 2.3. *Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с нулём 0 является 0-расширением булева кольца $r(S)$ с помощью идемпотентного полукольца.*

Доказательство. В силу леммы 1.1 $S/{\sim_{(2)}}$ — идемпотентное полукольцо. Кроме того, нетрудно убедиться, что $[0]_{\sim_{(2)}} = r(S)$ — булево кольцо. ☐

Пусть S — коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо. Определим на нём бинарное отношение $\approx$ следующим образом: $a \approx b$ тогда и только тогда, когда $2a + 2b = 2ab$.

Нетрудно убедиться, что отношение $\approx$ рефлексивно и симметрично. Кроме того, если $a \approx b$, то для любого $c \in S$ имеем

$$2a + 2b + 2c = 2ab + 2c = 2ab + 2ac + 2bc + 2c = 2(a + c)(b + c),$$

т. е. $(a+c) \approx (b+c)$ и $2ac+2bc = 2abc$, откуда следует, что $(ac) \approx (bc)$. Таким образом, отношение $\approx$ сохраняет полукольцевые операции на S.

Замечание 2.2. Отношение $\approx$ не всегда транзитивно. Для примера достаточно рассмотреть полукольцо $T = L \cup \{\infty\}$, где L — дистрибутивная решётка, содержащая по крайней мере два различных ненулевых элемента a и b. Тогда $a \approx c \approx b$, но $a \not\approx b$.

Предложение 2.4. *Отношение $\approx$ на произвольном коммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце S обладает следующими свойствами (для всех $a, b \in S$):*

1) $a \approx 2a$;
2) $a \approx a + ab$;
3) *если в S выполняется квазитождество $a \approx b \Longrightarrow a = b$, то S является дистрибутивной решёткой*;
4) *для любой конгруэнции ρ на S, такой что S/ρ — дистрибутивная решётка, $\approx \subseteq \rho$.*

Доказательство. Свойства 1)—3) следуют из тождества $4x = 2x$.

Докажем свойство 4). Пусть S/ρ является дистрибутивной решёткой и $a \approx b$. Тогда

$$[a]_\rho = [a+ab]_\rho = [2a+2ab]_\rho = [2a]_\sigma + [2ab]_\rho = \\ = [2a]_\rho + [2a]_\rho + [2b]_\rho = [2a]_\rho + [2b]_\rho = [2a+2b]_\rho = [a+b]_\rho.$$

Равенство $[b]_\rho = [a+b]_\rho$ доказывается аналогично. □

Очевидно, что транзитивное замыкание δ бинарного отношения $\approx$, определённое правилом

для любых $a, b \in S$ $a \,\delta\, b$ тогда и только тогда,

когда найдутся $c_1, c_2, \ldots, c_n \in S$, такие что $a \approx c_1 \approx c_2 \approx \ldots \approx c_n \approx b$,

будет конгруэнцией на S, причём S/δ — дистрибутивная решётка.

Замечание 2.3. В [10] описана конгруэнция γ_0 на произвольном коммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце S

для любых $a, b \in S$ $a \,\gamma_0\, b$ тогда и только тогда,

когда найдётся $x \in S$, такой что $a + 2ax = b + 2bx$,

фактор-полукольцо по которой будет дистрибутивной решёткой.

Лемма 2.1. *Для любых элементов a, b, c коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S из $a \approx c \approx b$ следует, что $2a + 2b + 2c = 2abc$.*

Доказательство. Действительно, если $2a + 2b = 2ab$ и $2b + 2c = 2bc$, то $2ac + 2bc = 2abc$ и $2ab + 2ac = 2abc$. Учитывая тождество $4x = 2x$, получаем, что $2abc + 2abc = 2abc = 2ac + 2bc + 2ab + 2ac = 2a + 2b + 2c$. □

Предложение 2.5. *Для всякого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца* S $\delta = \approx \circ \approx$.

Доказательство. Пусть $a \approx c_1 \approx c_2 \approx b$. Докажем, что $a \approx c_1c_2 \approx b$. В самом деле, так как $a \approx c_1 \approx c_2$, то по лемме 2.1 $2a+2c_1+2c_2 = 2ac_1c_2$. Тогда

$$2a + 2c_1c_2 = (2a + 2c_1c_2)^2 = 2a + 2ac_1c_2 + 2c_1c_2 = 2a + 2c_1 + 2c_2 = 2ac_1c_2,$$

т. е. $a \approx c_1c_2$. Рассуждая таким же образом, получаем, что $c_1c_2 \approx b$.

Если же $a \approx c_1 \approx c_2 \approx \ldots \approx c_n \approx b$, то нетрудно убедиться, что $a \approx \approx c_1c_2 \cdot \ldots \cdot c_n \approx b$. ☐

Предложение 2.6. *Всякое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо* S *с нулём является* 0*-расширением булева кольца при помощи дистрибутивной решётки.*

Доказательство. Действительно, в этом случае S/δ — дистрибутивная решётка, а $[0]_\delta = r(S)$. ☐

На произвольном коммутативном дистрибутивном мультипликативно идемпотентном полукольце S введём бинарное отношение γ:

для любых $x, y \in S$ $x \mathrel{\gamma} y$ тогда и только тогда,

когда $2x + 2xy = 2x$ и $2y + 2xy = 2y$.

Очевидно, что отношение γ рефлексивно и симметрично. Кроме того, если $x \mathrel{\gamma} y$ и $y \mathrel{\gamma} z$, то

$$\begin{aligned}2x &= 2x + 2xy = 2x + 2x(y + yz) = 2x + 2xy + 2xyz = 2x + 2xyz = \\ &= 2(x + xy)(x + z) = 2x(x + z) = 2x + 2xz,\\ 2z &= 2z + 2yz = 2z + 2(y + xy)z = 2z + 2yz + 2xyz = 2z + 2xyz = \\ &= 2(z + x)(z + yz) = 2(z + x)z = 2z + 2xz,\end{aligned}$$

т. е. отношение γ транзитивно.

Для любых $x, y, z \in S$ из $x \mathrel{\gamma} y$ следует, что

$$\begin{gathered}2x + 2z = 2x + 2xy + 2z = 2x + 2z + 2(x + z)(y + z),\\ 2y + 2z = 2y + 2xy + 2z = 2y + 2z + 2(x + z)(y + z),\\ 2xz = 2(x + xy)z = 2xz + 2xzyz, \quad 2yz = 2(y + xy)z = 2yz + 2xzyz.\end{gathered}$$

Таким образом, γ — конгруэнция на S.

Предложение 2.7. *Конгруэнция* γ *на дистрибутивном коммутативном мультипликативно идемпотентном полукольце* S *является наименьшей конгруэнцией, фактор-полукольцо по которой будет идемпотентным монополукольцом.*

Доказательство. Для произвольных $x, y \in S$ имеем $(x+y) \mathrel{\gamma} (xy)$, поскольку

$$\begin{gathered}2(x + y) = (2x + 2y)^2 = 2x + 2y + 2xy = 2x + 2y + 2(x + y)xy,\\ 2xy = 2xy + 2(x + y)xy.\end{gathered}$$

То, что всегда $x\ \gamma\ (2x)$, очевидно. Таким образом, S/γ — идемпотентное монополукольцо.

Для любых элементов $a, b \in S$ и для любой конгруэнции ρ на S, такой что S/ρ — идемпотентное монополукольцо, из $a\ \gamma\ b$ вытекает $a\ \rho\ b$, так как

$$\begin{aligned}[a]_\rho = [2a]_\rho = [2a]_\rho + [2ab]_\rho = [2a]_\rho + [2a]_\rho + [2b]_\rho = [2a]_\rho + [2b]_\rho = \\ = [2a]_\rho + [2b]_\rho + [2b]_\rho = [2b]_\rho + [2ab]_\rho = [2b + 2ab]_\rho = [2b]_\rho = [b]_\rho. \quad \square\end{aligned}$$

Предложение 2.8. *Всякое дистрибутивное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо S является полукольцевым расширением семейства коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x + 2xy = 2x$ при помощи монополукольца.*

Доказательство. Покажем, что для произвольного элемента $s \in S$ класс $[s]_\gamma$ является подполукольцом в S. Замкнутость $[s]_\gamma$ относительно умножения следует из леммы 1.2. Кроме того, если $x\ \gamma\ y$, то

$$2x + 2x(x + y) = 2x + 2x + 2xy = 2x + 2xy = 2x,$$

$$2(x + y) + 2x(x + y) = 2x + 2y + 2x + 2xy = 2x + 2y,$$

т. е. $x\ \gamma\ (x + y)$. □

Следствие 2.3. *Любое дистрибутивное коммутативное идемпотентное полукольцо является полукольцевым расширением семейства дистрибутивных решёток при помощи монополукольца.*

Замечание 2.4. В [1] показано, что для всякого полукольца S с нулём 0 справедливо $[0]_{\rho(r(S))} = r(S)$ и $[0]_\sim = r(S)$, т. е. произвольное полукольцо с нулём есть 0-расширение кольца $r(S)$ как при помощи антикольца $S/\rho\big(r(S)\big)$, так и при помощи упорядочиваемого полукольца $S/\!\sim$.

В [6] указана наименьшая конгруэнция на произвольном полукольце S с нулём, фактор-полукольцо по которой является аддитивно идемпотентным полукольцом, а класс нуля совпадает с множеством $r(S)$. Таким образом, произвольное полукольцо с нулём является 0-расширением кольца $r(S)$ с помощью аддитивно идемпотентного полукольца.

Предложение 2.9. *Для любого мультипликативно идемпотентного полукольца S с тождеством $2x = 2y$ справедливы следующие утверждения*:

1) *S обладает поглощающим элементом по умножению θ*;
2) *S является θ-расширением мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением при помощи булева кольца*;
3) $S/_\theta\!\sim\, \cong S + \theta$;
4) ${}_\theta\!\sim\, = \rho([\theta]_{\theta\sim})$.

Доказательство. Докажем первое утверждение В силу тождества $2x = 2y$ все «удвоенные» элементы из S равны между собой. Обозначим этот элемент через θ. Тогда $s + s = \theta$ для любого $s \in S$, в частности, $\theta + \theta = \theta$, откуда следует, что $s\theta = s(\theta + \theta) = s\theta + s\theta = \theta$ (аналогично $\theta s = \theta$). Таким образом, θ — поглощающий элемент по умножению.

Докажем утверждение 2). Так как θ — поглощающий элемент по умножению, то отношение ${}_\theta\!\sim$ — конгруэнция на S, причём ${}_\theta\!\sim\, = \rho(2S)$, так как θ — единственный аддитивно идемпотентный элемент в S. Тогда по замечанию 1.1 $S/{}_\theta\!\sim$ — булево кольцо с нулём θ. Пусть теперь $a \;{}_\theta\!\sim\; b$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $(a + b) \;{}_\theta\!\sim\; (b + b) = \theta$, т. е. $[\theta]_{{}_\theta\sim}$ — полукольцо с константным сложением.

Для доказательства утверждения 3) заметим, что отображение $a + \theta \mapsto [a]_{{}_\theta\sim}$ является изоморфизмом фактор-полуколец $S/{}_\theta\!\sim$ на подполукольцо $S + \theta$ полукольца S.

Утверждение 4) очевидно. □

Теорема 2.1. *Любое мультипликативно идемпотентное полукольцо S с тождеством $x + 2xyx = x$ является полукольцевым расширением семейства булевых колец при помощи идемпотентного полукольца с тождеством $x + xyx = x$.*

Доказательство. Из леммы 1.1 и тождества $x + 2xyx = x$ следует, что фактор-полукольцо $S/\!\sim_{(2)}$ будет идемпотентным полукольцом с тождеством $x + xyx = x$.

Произвольный класс конгруэнции $\sim_{(2)}$ на S будет мультипликативно идемпотентным полукольцом с тождеством $2x = 2y$. Поэтому в силу предложения 2.9 и тождества $3x = x$ на S имеем $s = s + 2s = s + \theta$ для любого $s \in S$. Таким образом, θ служит нулём полукольца S, а само S является булевым кольцом. □

Следствие 2.4. *Любое мультипликативно идемпотентное (коммутативное) полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ является полукольцевым расширением семейства булевых колец при помощи идемпотентного полукольца (соответственно дистрибутивной решётки) с тождеством $x + xy = x$.*

Введём на произвольном полукольце S бинарное отношение σ:

для любых $x, y \in S$ $x \,\sigma\, y$ тогда и только тогда, когда $xyx = x$ и $yxy = y$.

Теорема 2.2. *Произвольное мультипликативно идемпотентное полукольцо S с тождеством $x + xyx = x$ является полукольцевым расширением семейства прямоугольных полуколец при помощи дистрибутивной решётки.*

Доказательство. То, что отношение σ будет конгруэнцией на произвольной идемпотентной полугруппе, доказано в [14, теорема 1]. При этом фактор-полугруппа по конгруэнции σ является полурешёткой. Покажем, что σ сохраняет сложение на S. Действительно, если для некоторых $a, b \in S$ выполняется $a \,\sigma\, b$, то, учитывая тождество $x + xyx = x$, для любого $c \in S$ получаем

$$\begin{aligned}(a + c)(b + c)(a + c) &= aba + abc + aca + ac + cba + cbc + ca + c = \\ &= a + ac + ca + c + aba + abc + cba + cbc = (a + c)^2 + (a + c)b(a + c) = \\ &= (a + c) + (a + c)b(a + c) = a + c.\end{aligned}$$

Аналогично $(b+c)(a+c)(b+c) = b+c$. Таким образом, σ — конгруэнция на S, причём фактор-полукольцо по ней коммутативно, идемпотентно и обладает тождеством $x+xy = x$, т. е. является дистрибутивной решёткой. ☐

Следствие 2.5. *Всякое идемпотентное полукольцо S с тождеством $x+xy = x$ является полукольцевым расширением семейства полуколец с тождеством $xy = x$ при помощи дистрибутивной решётки.*

Доказательство. По теореме 2.2 достаточно показать, что для любого $a \in S$ класс конгруэнции $[a]_\sigma$ удовлетворяет тождеству $xy = y$. Поскольку на $[a]_\sigma$ выполняется тождество $xyx = x$, то на $[a]_\sigma$ тождественно выполняется $x = x+xy = (xy)x+xy = xy$. ☐

Замечание 2.5 [15, следствие 2]. Всякое прямоугольное полукольцо S изоморфно прямому произведению полукольца с тождеством $xy = x$ и полукольца с тождеством $xy = y$.

Для произвольного простого идеала P коммутативного полукольца S определяется конгруэнция $\theta(P)$ [9, с. 210]:

$$\text{для любых } x, y \in S \ x\,\theta(P)\,y \text{ тогда и только тогда, когда найдётся } z \in S \setminus P, \text{ такой что } xz = yz.$$

Лемма 2.2. *Для всякого простого идеала P коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливы следующие утверждения:*

1) *множество $S \setminus P$ будет классом конгруэнции $\theta(P)$;*
2) *фактор-полукольцо $S/\theta(P)$ является полукольцом с единицей.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Заметим, что $u\,\theta(P)\,v$ для любых $u, v \in S \setminus P$, так как $u(uv) = uv = v(uv)$. Пусть теперь для элементов $p \in P$, $u \in S \setminus P$ выполняется $p\,\theta(P)\,u$, т. е. $pw = uw$ для некоторого $w \in S \setminus P$. Тогда $uw \in P$, что невозможно, так как P — простой идеал. Таким образом, $S \setminus P$ является классом конгруэнции $\theta(P)$.

Докажем утверждение 2). Покажем, что множество $S \setminus P$ является единичным классом в $S/\theta(P)$. В самом деле, учитывая пункт 1) и то, что для любых $p \in P$, $u \in S \setminus P$ имеем $pu\,\theta(P)\,p$, так как $(pu)u = pu$. ☐

Лемма 2.3. *Для любого коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца S справедливо $\bigcap\limits_{P \in \operatorname{Spec} S} \theta(P) = \mathbf{0}_S$, следовательно, имеет место изоморфное вложение S в коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо $\prod\limits_{P \in \operatorname{Spec} S} S/\theta(P)$ с единицей.*

Доказательство. Утверждение следует из предложения 1.4 и леммы 2.2. ☐

Лемма 2.4. *Произвольное коммутативное идемпотентное полукольцо S с единицей 1 является монополукольцом тогда и только тогда, когда оно удовлетворяет квазитождеству $x+1 = y+1 \Longrightarrow x = y$.*

Доказательство. Необходимость очевидна.

Докажем достаточность. Для любого $x \in S$ выполняется $x + 1 = (x + 1) + 1$, поэтому $x + 1 = x$. Тогда для всех $x, y \in S$ имеем $x + xy = xy$, $y + xy = xy$. Получаем, что $x + y = (x + y)^2 = x + xy + xy + y = xy + xy = xy$. □

Непустое подмножество F полукольца S называется его *фильтром*, если $ab, a+s \in F$ для любых $a, b \in F$ и $s \in S$. Фильтр F является подполукольцом в S, причём в случае аддитивно идемпотентного полукольца S он вместе с каждым своим элементом содержит и его верхний конус. Фильтр F называется *простым*, если при любых $a, b \in S$ из $a + b \in F$ следует $a \in F$ или $b \in F$.

Определим на полукольце S по его фильтру F бинарное отношение $\sigma(F)$ двойственным к конгруэнции Бёрна способом:

для любых $a, b \in S$ $a\ \sigma(F)\ b$ тогда и только тогда,

когда найдутся $x, y \in F$, такие что $ax = by$.

Лемма 2.5. *Если фильтр F мультипликативно идемпотентного полукольца S коммутативный по умножению, то $\sigma(F)$ — конгруэнция на S.*

Доказательство. Ясно, что отношение $\sigma(F)$ рефлексивно и симметрично. Пусть $a\ \sigma(F)\ b$ и $b\ \sigma(F)\ c$ для произвольных $a, b, c \in S$. Имеем $ax = by$ и $bu = cv$ для некоторых $x, y, u, v \in F$. Тогда $at = bt = ct$ при $t = xyuv \in F$, т. е. $a\sigma(F)c$. Значит, $\sigma(F)$ — отношение эквивалентности на множестве S. Поскольку $at = bt$, то $(a + s)t = at + st = bt + st = (b + s)t$, $(sa)t = (sb)t$ и $(as)t = ats = bts = (bs)t$, т. е. $(a + s)\ \sigma(F)\ (b + s)$, $(sa)\ \sigma(F)\ (sb)$ и $(as)\ \sigma(F)\ (bs)$. Стало быть, $\sigma(F)$ действительно является конгруэнцией на полукольце S. □

Предложение 2.10. *Любое идемпотентное полукольцо S с единицей 1 является 1-расширением монополукольца с единицей 1 посредством дистрибутивной решётки с единицей 1.*

Доказательство. Положим $F = [1) = S + 1$ и $L = (1]$. По предложению 1.3 подполукольцо L полукольца S является дистрибутивной решёткой с 1, а F — монополукольцо с единицей 1. При этом F служит простым фильтром полукольца S. Рассмотрим бинарное отношение $\sigma(F)$ на полукольце S по фильтру F. По лемме 2.5 $\sigma(F)$ — конгруэнция на S. Легко убедиться, что $[1]_{\sigma(T)} = F$. Возьмём $a, b \in L$. Если $a\ \sigma(F)\ b$, то $ax = by$ для некоторых $x, y \in F$. Так как $x = x + 1$ и $y = y + 1$, то $a = ax + a = by + b = b$. Поэтому $[a]_{\sigma(T)} = \{a\}$ для всех $a \in L$. Значит, $S/\sigma(F) \cong L$. □

Замечание 2.6. Полукольцо S называется *свободным* в классе $\mathbf{K}$ полуколец с множеством X свободных образующих, если для любого полукольца $T \in \mathbf{K}$ произвольное отображение $X \to T$ продолжается до гомоморфизма $S \to T$. Тем самым любое полукольцо из класса $\mathbf{K}$ является гомоморфным образом соответствующего свободного полукольца из $\mathbf{K}$.

Свободное полукольцо в многообразии всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с множеством X свободных образующих будем обозначать $\mathrm{FM}(X)$ или $\mathrm{FM}_{|X|}$, где $|X|$ — мощность множества X. Например, полукольцо FM_1 с одной свободной образующей $a = 1$ в силу тождества $4x = 2x$ имеет вид $\mathrm{FM}_1 = \{1, 2, 3\}$.

Пусть S — полукольцо с нулём 0 и единицей 1, P — мультипликативная полугруппа. Свободный (левый) S-полумодуль SP с базисом $\{p\colon p \in P\}$ представляет собой множество конечных (ненулевых) формальных сумм

$$s = \sum_{\substack{p\in P,\\ \text{почти все } s_p \text{ равны } 0,\\ \text{некоторый } s_p \text{ отличен от } 0}} s_p p \quad (s_p \in S,\ p \in P)$$

с операциями

$$\Big(\sum s_p p\Big) + \Big(\sum t_p p\Big) = \sum (s_p + t_p) p$$

и

$$s\Big(\sum s_p p\Big) = \sum s s_p p.$$

Полумодуль SP превращается в полукольцо, если на нём ввести умножение (свёртку) по формуле

$$\Big(\sum s_p p\Big)\Big(\sum t_p p\Big) = \sum_{p\in P}\Bigg(\sum_{\substack{u,v\in P,\\ uv=p}} s_u t_v\Bigg)p.$$

Полукольцо SP называется *полугрупповым полукольцом* полугруппы P над полукольцом коэффициентов S. Отождествим p с $1p$, $0p$ означает отсутствие соответствующего слагаемого в формальной сумме s.

Обозначим через T полукольцо с нулём $\mathrm{FM}_1 \cup \{0\}$. Для свободной полурешётки $L(X)$ с множеством $X = \{x_i\colon i \in I\}$ свободных образующих в многообразии всех полурешёток рассмотрим полугрупповое полукольцо $TL(X)$. Оно представляет собой полукольцо (ненулевых) многочленов без свободного члена от переменных x_i с коэффициентами $0, 1, 2, 3 \in T$. Имеем $\mathrm{FM}(X) \cong TL(X)/\rho$, где ρ — наименьшая конгруэнция, «склеивающая» элементы $u + v$ и $u + v + 2uv$ для любых (дизъюнктных) слов $u, v \in L(X)$.

В свободных полукольцах FM_n при $n \leqslant 3$ $|\mathrm{FM}_1| = 3$, $|\mathrm{FM}_2| = 39$, $|\mathrm{FM}_3| = 2289$.

Отметим, что свободное мультипликативно идемпотентное полукольцо с множеством X свободных образующих конечно тогда и только тогда, когда множество X конечно. Это следует из известного факта о конечности конечно порождённых идемпотентных полугрупп [14].

3. Подпрямо неразложимые коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца

Обозначим через $\mathfrak{M}$ многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец.

Легко убедиться, что с точностью до изоморфизма существует четыре двухэлементных коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольца:

- — двухэлементная цепь $\mathbb{B}$;
- — двухэлементное поле $\mathbb{Z}_2$;
- — двухэлементное монополукольцо $\mathbb{D} = \{1, \infty\}$ с единицей 1;
- — двухэлементное полукольцо $\mathbb{T} = \{1, \infty\}$ с единицей 1 и константным сложением.

Лемма 3.1. *Полукольца $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ — это в точности все конгруэнц-простые коммутативные мультипликативно идемпотентные полукольца.*

Доказательство. Пусть S — произвольное конгруэнц-простое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо. Для любого элемента $a \in S$ имеем $\sim_a = \mathbf{0}_S$ или $\sim_a = \mathbf{1}_S$. В первом случае получаем, что a — нейтральный элемент по умножению, так как $xa \sim_a x$ для всякого $x \in S$. Во втором случае $x \sim_a y$ для любых $x, y \in S$, в частности, $x \sim_a a$, откуда следует, что $xa = a$, т. е. a — поглощающий элемент по умножению. Нейтральный и поглощающий элементы по умножению произвольного полукольца, если они существуют, единственны. Кроме того, если они равны между собой, то полукольцо одноэлементно. Следовательно, $|S| = 2$. ☐

Теорема 3.1. *Для всякого подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{M}$ справедливы следующие утверждения*:

1) *S имеет единицу* 1;
2) *множество $S \setminus \{1\}$ — наибольший идеал в S, обладающий единицей e*;
3) *наименьшей ненулевой конгруэнцией на S служит конгруэнция, склеивающая только элементы* 1 *и e*;
4) *в S верно равенство $3 = 2$ или равенство $3 = 1$ и $e = 2$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1). Пусть S — полукольцо, удовлетворяющее условию теоремы. По лемме 2.3 $S \hookrightarrow \prod\limits_{P \in \operatorname{Spec} S} S/\theta(P)$, а по лемме $S/\theta(P)$ — полукольцо с единицей для любого $P \in \operatorname{Spec} S$. Так как S подпрямо неразложимо, то существует $I \in \operatorname{Spec} S$, такой что $S/\theta(I) \cong S$, откуда следует, что S обладает единицей.

Докажем утверждение 2). Предположим, что для любого $x \in S \setminus \{1\}$ найдётся $y \in S \setminus \{1\}$, такой что $xy \neq y$. Рассмотрим произвольные элементы a, b, $a \neq b$, из $S \setminus \{1\}$. По лемме 1.3 либо $a \nsim_a b$, либо $a \nsim_b b$. Пусть $a \nsim_a b$, т. е. $a \neq ab$. Тогда $a \sim_a 1$, $b \nsim_a 1$. Кроме того, по предположению $ac \neq c$ для некоторого $c \in S \setminus \{1\}$, откуда $a \nsim_c 1, a \sim_c ac$. Значит, любые элементы $x, y \in S \setminus \{1\}$ можно разделить некоторой нетривиальной конгруэнцией и для всех $x \in S \setminus \{1\}$ найдётся нетривиальная конгруэнция, разделяющая элементы x и 1. Получаем противоречие с подпрямой неразложимостью полукольца S.

Обозначим через e элемент из $S \setminus \{1\}$, для которого $xe = x$ при всех $x \in S \setminus \{1\}$.

Покажем, что $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S. Учитывая пункт 2) предложения 1.1, получаем, что $S \setminus \{1\}$ выдерживает умножение на элементы из S. Если $s+t=1$ для некоторых $s, t \in S \setminus \{1\}$, то $e = e \cdot 1 = e(s+t) = es+et = s+t = 1$, противоречие.

Чтобы доказать утверждение 3), заметим, что конгруэнция $\sim_e$ склеивает только элементы 1 и e, поэтому она и будет наименьшей ненулевой конгруэнцией на S.

Докажем утверждение 4). Пусть в S имеем $3 \neq 2$. Поскольку $3 \sim 2$, то конгруэнция $\sim$ ненулевая. Значит, по пункту 3) $1 \sim e$, в частности, $e \leqslant 1$, $e+s=1$ для некоторого $s \in S$. Поскольку $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S, получаем $s=1$, т. е. $e+1=1$ и $e+e=e$. Так как $2 \neq 1$, то $e = e+e = 2e = 2$. ☐

Предложение 3.1. *Произвольное полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ является подпрямым произведением полукольца $T_1 \in \mathfrak{M}$ с тождеством $3x = x$ и полукольца $T_2 \in \mathfrak{M}$ с тождеством $3x = 2x$.*

Доказательство. Представим S как подпрямое произведение семейства S_i $(i \in I)$ подпрямо неразложимых полуколец $S_i \in \mathfrak{M}$: $s \equiv (s_i) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ для каждого $s \in S$. Пусть I_1 — множество всех индексов $i \in I$, таких что S_i удовлетворяет тождеству $3x = x$, и $I_2 = I \setminus I_1$. По утверждению 4) теоремы 3.1 для любого $i \in I_2$ полукольцо S_i удовлетворяет тождеству $3x = 2x$. Можно считать, что I_1 и I_2 непустые. Получаем искомые полукольца $T_k = \{(s_i) \colon i \in I_k\}$ при $k = 1, 2$. ☐

Отметим, что на произвольном мультипликативно идемпотентном полукольце конгруэнция $\sim_{(3)}$, определённая по правилу

$$\text{для любых } a, b \in S \ a \sim_{(3)} b \text{ тогда и только тогда, когда } 3a = 3b,$$

является наименьшей конгруэнцией, фактор-полукольцо по которой обладает тождеством $3x = x$.

Следствие 3.1. *В произвольном полукольце $S \in \mathfrak{M}$ верно равенство $\sim \cap \sim_{(3)} = \mathbf{0}_S$.*

Для непустого собственного подмножества M полукольца S через τ_M обозначим разбиение S, при котором одним классом будет M, а все остальные классы одноэлементны.

Будем говорить, что разбиение полукольца S является *конгруэнцией* на S, если оно задаёт конгруэнцию на нём.

Лемма 3.2. *Во всяком подпрямо неразложимом полукольце $S \in \mathfrak{M}$, $|S| \geqslant 3$, найдутся такие элементы s, t, что $1+s=1$, $1+t \neq 1$.*

Доказательство. Действительно, в противном случае разбиение $\tau_{S \setminus \{1\}} = \big\{\{1\}, S \setminus \{1\}\big\}$ является конгруэнцией на S, разделяющей элементы 1 и e, что невозможно по пункту 3) теоремы 3.1. ☐

Предложение 3.2. *Любое подпрямо неразложимое полукольцо $S \in \mathfrak{M}$, имеющее поглощающий элемент по умножению, обладает нулевым элементом или поглощающим элементом.*

Доказательство. Обозначим через θ поглощающий по умножению элемент полукольца S. Отметим, что $\theta = \theta(\theta + \theta) = \theta + \theta$.

Случай 1. Если $1 + \theta = 1$, то для всех $x \in S$ выполняется

$$x = x \cdot 1 = x(1 + \theta) = x + x \cdot \theta = x + \theta.$$

Значит, θ — нулевой элемент в S.

Случай 2. Если $1 + \theta = \theta$, то для любого $x \in S$ имеем

$$\theta = \theta \cdot x = (1 + \theta)x = x + x \cdot \theta = x + \theta,$$

поэтому θ — поглощающий элемент в S.

Случай 3. Пусть $1 + \theta = a \notin \{1, \theta\}$. Тогда

$$a + \theta = (1 + \theta) + \theta = 1 + (\theta + \theta) = 1 + \theta = a.$$

Для любого $x \in S$ получаем $ax = (1 + \theta)x = x + \theta x = x + \theta$. Кроме того, $ax = (a + \theta)x = ax + \theta x = ax + \theta$.

Рассмотрим разбиение τ_{aS} полукольца S. Ясно, что $1 \notin aS$, $\theta = a\theta \in aS$. Покажем, что для любого $y \in aS$, $z \notin aS$ выполняется $y + z \in aS$. В самом деле, пусть $y = as$ для некоторого $s \in S$. Тогда

$$z + as = z + as + \theta = (z + \theta) + as = az + as = a(z + s) \in aS.$$

Тогда τ_{aS} является нетривиальной конгруэнцией на S, причём неверно, что $1\tau_{aS}e$. Значит, S подпрямо разложимо, противоречие. □

Следствие 3.2. *Всякое конечное подпрямо неразложимое полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ обладает нулевым элементом или поглощающим элементом.*

Доказательство. Действительно, в конечном полукольце $S \in \mathfrak{M}$ существует поглощающий элемент по умножению — это произведение всех элементов из S. □

Предложение 3.3. *Для любого подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{M}$, $|S| \geqslant 3$, справедливы следующие утверждения:*

1) *если S обладает поглощающим элементом ∞, то $S \setminus \{\infty\}$ — подполукольцо в S;*
2) *если S обладает нулём 0, то S — антикольцо.*

Доказательство. Докажем первое утверждение Покажем, что для всех $x, y \in S$ равносильны соотношения $x + y = \infty$ и $xy = \infty$. Действительно, если $xy = \infty$, то $x + y = x + 2xy + y = x + \infty + y = \infty$. Обратно, из $x + y = \infty$ следует, что $xy + xy = xy(x + y) = x\infty = \infty$. По лемме 3.2 $1 + a = 1$ для некоторого $a \in S$. Тогда

$$\begin{aligned} xy = xy(1 + a) = xy + xya = (xy + xya)^2 = \\ = xy + (xy + xy)a + xya = xy + \infty + xya = \infty. \end{aligned}$$

Пусть для некоторых элементов $a, b \in S$, таких что $a \neq \infty \neq b$, справедливо $a+b=\infty=ab$. Ясно, что $1+a \neq \infty$, иначе получаем, что $\infty=a+1=a\cdot 1=a$.

Пусть теперь $1+a=c\neq\infty$. Введём множество

$$A=\{x\in S\colon x+a=xa=\infty\}$$

и рассмотрим разбиение τ_A на S. Нетрудно убедиться, что τ_A — конгруэнция на S, причём $\{b,\infty\}\subseteq A$, $1\notin A$. Значит, по пункту 3 теоремы 3.1 S подпрямо разложимо, противоречие.

Докажем второе утверждение. Пусть $a\in r(S)$, $a\neq 0$. Тогда $a+a=0$.

Если $1+a=0$, то $a=1$, и S является булевым кольцом, откуда следует, что $S\cong\mathbb{Z}_2$, $|S|=2$, противоречие.

Пусть теперь $1+a=d\neq 0$. Тогда $d+a=(1+a)+a=1+(a+a)=1+0=1$. Если $d=1$, то $a=a\cdot 1=a(1+a)=a+a=0$, что невозможно. Если же $d\neq 1$, то получаем противоречие с тем, что $S\setminus\{1\}$ — идеал в S. □

Пример 3.1. Рассмотрим следующую алгебраическую структуру: к четырёхэлементной дистрибутивной решётке $T=\{e,a,b,0\}$ с наименьшим элементом 0 и наибольшим элементом e присоединим элемент 1, такой что $1+1=1\cdot 1=$ $=1+0=1$ и для всех $x\in S\setminus\{0\}$ выполняется $1+x=e$, $1\cdot x=x\cdot 1=x$. Получаем пятиэлементное коммутативное идемпотентное полукольцо $S=\{e,a,b,0,1\}$ с нулём 0 и единицей 1. Нетрудно проверить, что полукольцо S подпрямо неразложимо, но при этом имеет делители нуля a, b.

Замечание 3.1. Если подпрямо неразложимое полукольцо $S\in\mathfrak{M}$ имеет поглощающий элемент ∞', то, присоединяя к нему поглощающий элемент ∞, по пункту 3) теоремы 3.1 получаем, что полукольцо $S\cup\{\infty\}$ подпрямо разложимо, так как разбиение $\tau_{\{\infty',\infty\}}$ является конгруэнцией, причём $S\cup\{\infty\}/\tau_{\{\infty',\infty\}}\cong S$. Аналогично для подпрямо неразложимого полукольца $S\in\mathfrak{M}$ с нулём $0'$ полукольцо $S\cup\{0\}$ с присоединённым нулём 0 будет по теореме 3.1 подпрямо разложимым (разбиение $\tau_{\{0',0\}}$ является конгруэнцией, причём $S\cup\{0\}/\tau_{\{0',0\}}\cong S$).

Замечание 3.2. Если подпрямо неразложимое полукольцо $S\in\mathfrak{M}$ обладает нулём 0, то полукольцо $S\cup\{\infty\}$ также будет подпрямо неразложимым. В самом деле, для любых $a,b\in S$ и конгруэнции ρ на $S\cup\{\infty\}$ из $a\ \rho\ \infty$ следует, что $0\ \rho\ \infty$, так как $(a\cdot 0)\ \rho\ (\infty\cdot 0)$. Тогда $b\ \rho\ \infty$, поскольку $(b+0)\ \rho\ (b+\infty)$. Таким образом, $\rho=\mathbf{1}_{S\cup\{\infty\}}$, откуда следует, что для любой нетривиальной конгруэнции ρ' на $S\cup\{\infty\}$ класс $[\infty]_{\rho'}$ одноэлементен. Значит, полукольцо $S\cup\{\infty\}$ подпрямо неразложимо вместе с S. Аналогично проверяется, что для всякого подпрямо неразложимого полукольца $S\in\mathfrak{M}$ с поглощающим элементом ∞ полукольцо $S\cup\{0\}$ является подпрямо неразложимым.

Коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо назовём *цепным*, если полурешётка $\langle S,\cdot\rangle$ является цепью.

Замечание 3.3. Обозначим через S_0 одно из двухэлементных полуколец $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$ из $\mathfrak{M}$ с нулевым элементом, а через T_0 одно из двухэлементных полуколец $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$ с поглощающим элементом. Тогда по замечанию 3.2 полукольца $S_1=S_0\cup\{\infty\}$ и $T_1=T_0\cup\{0\}$ подпрямо неразложимы. Снова имеем подпрямо неразложимые полукольца $S_2 = S_1 \cup \{0\}$ и $T_2 = T_1 \cup \{\infty\}$. Продолжая процесс, для любого натурального n получим четыре подпрямо неразложимых полукольца: $S_n = S_{n-1} \cup \{\infty\}$ и $T_n = T_{n-1} \cup \{0\}$, если n нечётно, и $S_n = S_{n-1} \cup \{0\}$ и $T_n = T_{n-1} \cup \{\infty\}$ при чётном n.

Теорема 3.2. *Для любого кардинала $m \geqslant 2$ в многообразии $\mathfrak{M}$ существуют цепные подпрямо неразложимые полукольца мощности m как с 0, так и с ∞.*

Доказательство. Цепные полукольца из замечания 3.3 образуют цепочки вложенных полуколец

$$S_0 \subset S_1 \subset S_2 \subset \ldots \subset S_n \subset \ldots, \quad T_0 \subset T_1 \subset T_2 \subset \ldots \subset T_n \subset \ldots .$$

Их объединения

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} S_k, \quad \bigcup_{k=0}^{\infty} T_k$$

также будут цепными подпрямо неразложимыми полукольцами из $\mathfrak{M}$. Присоединяя к ним 0 или ∞, снова получаем цепные подпрямо неразложимые полукольца из $\mathfrak{M}$.

Для любого ординала α по трансфинитной индукции построим цепные подпрямо неразложимые полукольца S_α и T_α из $\mathfrak{M}$. В случае непредельного ординала α положим $S_\alpha = S_{\alpha-1} \cup \{\theta\}$, где $\theta = \infty$, если $S_{\alpha-1}$ — полукольцо с нулём 0, и $\theta = 0$, если $S_{\alpha-1}$ содержит ∞. Если α — предельный ординал, то положим

$$S_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} \cup \{\theta\},$$

где $\theta = 0$ или $\theta = \infty$. Аналогично строятся полукольца T_α. Заметим, что для каждого бесконечного ординала α мы построили цепные подпрямо неразложимые полукольца из $\mathfrak{M}$, имеющие мощность $|\alpha|$. □

В теореме 3.2 для каждого кардинала $m \geqslant 2$ получаются два подпрямо неразложимых идемпотентных цепных полукольца, что даёт результат А. Романовской [16, следствие 2.9].

Предложение 3.4. *Пусть S — подпрямо неразложимое полукольцо из $\mathfrak{M}$, причём $|S| \geqslant 3$. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) *если S имеет поглощающий элемент ∞, то $S \setminus \{\infty\}$ — подпрямо неразложимое полукольцо;*
2) *если S обладает нулём 0 и не имеет делителей нуля, то $S \setminus \{0\}$ — подпрямо неразложимое полукольцо.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Отметим вначале, что по предложению 3.3 $S \setminus \{\infty\}$ — подполукольцом в S. Пусть $S \setminus \{\infty\}$ подпрямо разложимо. Для каждой нетривиальной конгруэнции ρ_i ($i \in I$) на $S \setminus \{\infty\}$ рассмотрим разбиение ρ_i' полукольца S: одним классом будет $[\infty]_{\rho_i'}$, а остальные классы индуцирует конгруэнция ρ. Нетрудно убедиться, что ρ_i' — нетривиальная конгруэнция на S. Так как $\bigcap\limits_{i\in I} \rho_i = \mathbf{0}_{S\setminus\{\infty\}}$, то $\bigcap\limits_{i\in I} \rho'_i = \mathbf{0}_S$, откуда следует, что S подпрямо разложимо, противоречие.

Докажем второе утверждение. Так как в S нет делителей нуля, по предложению 3.3 $S \setminus \{0\}$ является подполукольцом в S. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству первого утверждения. □

Предложение 3.5. *Конечные цепные подпрямо неразложимые полукольца* $S \in \mathfrak{M}$ — *это с точностью до изоморфизма полукольца* S_n *и* T_n *из замечания 3.3. Значит, для любого натурального числа* $m \geqslant 2$ *существует ровно четыре* m*-элементных цепных подпрямо неразложимых коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольца.*

4. Подмногообразия в $\mathfrak{M}$

Опишем некоторые подмногообразия многообразия $\mathfrak{M}$.

Для полуколец $S_1, \ldots, S_n$ через $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ будем обозначать многообразие полуколец, порождённое этими полукольцами. Это означает, что многообразие $\mathfrak{M}(S_1, \ldots, S_n)$ задаётся множеством всевозможных тождеств, выполняемых на каждом из полуколец $S_1, \ldots, S_n$.

Отметим, что $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$ есть многообразие всевозможных дистрибутивных решёток, т. е. полуколец с полурешёточным умножением, где выполняется закон поглощения $x + xy = x$. Легко убедиться, что многообразие всех булевых колец характеризуется в $\mathfrak{M}$ тождеством $x + 2y = x$ и совпадает с $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$.

Предложение 4.1. *Произвольное монополукольцо есть подпрямое произведение полуколец* $\mathbb{D}$. *Следовательно,* $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$ — *многообразие всевозможных монополуколец.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое монополукольцо. Рассмотрим разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ полукольца S. Для любых $x, y \in S \setminus \{1\}$ имеем $x + y = xy \neq 1$, $1 + x = 1 \cdot x = x \neq 1$. Значит, $\tau_{S\setminus\{1\}}$ — конгруэнция на S, откуда следует, что $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$. Поэтому $S \cong \mathbb{D}$. □

Предложение 4.2. *Всякое полукольцо из* $\mathfrak{M}$ *с константным сложением будет подпрямым произведением семейства полуколец* $\mathbb{T}$. *Значит,* $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ — *многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с константным сложением.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее константным сложением. Для любого $x \in S\setminus\{1\}$ имеем $1+x = \infty \neq 1$. Таким образом, разбиение $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией, $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$. □

Многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$ фактически совпадает с многообразием всех полурешёток, а многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ представляет собой многообразие всевозможных полурешёток с поглощающим элементом.

Лемма 4.1. *Для любого элемента a дистрибутивного идемпотентного полукольца S бинарное отношение ${}_a\!\sim$ является конгруэнцией на S.*

Доказательство. Требуется проверить лишь замкнутость умножения. Пусть для некоторых элементов $x, y, z \in S$ выполняется $x \,{}_a\!\sim y$. Тогда

$$xz + a = (x + a)(z + a) = (y + a)(z + a) = yz + a,$$

т. е. $(xz) \,{}_a\!\sim (yz)$. Аналогично $(zx) \,{}_a\!\sim (zy)$. □

Приведём новые доказательства двух известных результатов.

Утверждение A [12, теорема]. *С точностью до изоморфизма существует три подпрямо неразложимых дистрибутивных коммутативных идемпотентных полукольца: двухэлементная цепь $\mathbb{B}$, двухэлементное монополукольцо с единицей $\mathbb{D}$ и трёхэлементное полукольцо $\mathbb{B} \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое коммутативное идемпотентное дистрибутивное полукольцо. Обозначим $Q = S \setminus \{1, e\}$. Заметим, что $xy \notin \{1, e\}$ для всех $x, y \in Q$.

Отметим, что $e + 1 \notin Q$. Действительно, если $e + 1 = q \in Q$, то $e = e + e = e(e + 1) = eq = q$. Противоречие.

Возможны два случая: $e+1 = 1$ или $e+1 = e$. Заметим, что в обоих случаях $e + e = e$.

Случай 1. Пусть $e+1 = 1$. По лемме 4.1 отношение ${}_e\!\sim$ является конгруэнцией на S, причём $1 \,{}_e\!\nsim e$, так как $1 = 1 + e \neq e + e = e$. Значит, ${}_e\!\sim$ — отношение равенства на S, откуда следует, что элемент e аддитивно сократим.

Выше показано, что $QS \subseteq Q$, при этом множество $S \setminus Q = \{1, e\}$ мультипликативно замкнуто. Рассмотрим элементы $x, y \in Q$. Заметим, что $x+y \neq 1$ в силу того, что $S \setminus \{1\}$ — идеал. Если $x+y = e$, то $x+e = x+x+y = x+y = e = e+e$, откуда следует, что $x = e$, противоречие. Таким образом, Q — простой идеал в S.

Покажем, что $S \setminus Q + Q \subseteq Q$. Действительно, если для некоторого $q \in Q$ выполняется $1 + q \in \{1, e\}$ (или $e + q \in \{1, e\}$), то $e + q = e = e + e$, откуда следует, что $q = e$, противоречие.

Если $|S| = 2$, то $S \cong \mathbb{B}$. Если же $|S| \geqslant 3$, то, учитывая лемму 3.2, имеем, что разбиение τ_Q является конгруэнцией на S, разделяющей элементы 1, e. Значит, $\tau_Q = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{B} \cup \{\infty\}$.

Случай 2. Пусть $e + 1 = e$. По лемме 4.1 конгруэнция ${}_1\!\sim$ — отношение равенства на S, откуда следует, что элемент 1 аддитивно сократим. По лемме 2.4 S является монополукольцом. Тогда по предложению 4.1 $S \cong \mathbb{D}$. □

Следствие 4.1. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}) = \mathfrak{M}(\mathbb{B} \cup \{\infty\})$ *— многообразие всех дистрибутивных коммутативных идемпотентных полуколец.*

Утверждение B [11, следствие 4.4]. *Любое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x + 2xy = x$ является подпрямым произведением двухэлементных полей и двухэлементных цепей, стало быть, булева кольца и дистрибутивной решётки.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x + 2xy = x$.

Подставляя в тождество $x = 1$, получаем $1 = 1 + 2y = (1 + y) + y$ для всех $y \in S$, откуда следует, что $1 + s = 1$ для любого $s \neq 1$, поскольку $S \setminus \{1\}$ — идеал в S. Тогда $\tau_{S\setminus\{1\}}$ — конгруэнция на S, откуда следует, что $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$. Теперь если $2 = 1$, то $S \cong \mathbb{B}$. Если же $2 \neq 1$, то $S \cong \mathbb{Z}_2$. ☐

Следствие 4.2. $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2)$ *— многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством* $x + 2xy = x$.

Предложение 4.3. *Для произвольного полукольца* $S \in \mathfrak{M}$ *равносильны следующие утверждения*:

1) *все идеалы в* S *полустрогие*;
2) *все простые идеалы в* S *полустрогие*;
3) $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2)$.

Доказательство. Проведём доказательство по циклу $1) \Longrightarrow 2) \Longrightarrow 3) \Longrightarrow 1)$.

Импликация $1) \Longrightarrow 2)$ очевидна.

Докажем импликацию $2) \Longrightarrow 3)$. Пусть полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ удовлетворяет условию 2). Представим S в виде подпрямого произведения подпрямо неразложимых полуколец $S_i \in \mathfrak{M}$ $(i \in I)$. Все полукольца S_i двухэлементные. В самом деле, зафиксируем индекс $j \in I$ и рассмотрим в S множество

$$J = \left\{ (s_i) \in \prod_{i \in I} S_i \colon s_j \neq 1 \right\},$$

являющееся идеалом по теореме 3.1. Идеал J полустрогий. Поэтому J — класс нуля конгруэнции Бёрна $\rho(J)$, разделяющей элементы 1 и e полукольца S_j. Значит, $S_j = \{1, e\}$. Итак, каждое полукольцо S_i изоморфно $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$ или $\mathbb{T}$ $(i \in I)$.

Поскольку идеалы $\mathbb{D} \setminus \{1\}$ и $\mathbb{T} \setminus \{1\}$ не являются полустрогими, то $S_i = \mathbb{B}$ или $S_i = \mathbb{Z}_2$ для всех $i \in I$. Заключаем, что S — подпрямое произведение полуколец $\mathbb{B}$ и $\mathbb{Z}_2$, т. е. $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{Z}_2)$.

Докажем импликацию $3) \Longrightarrow 1)$. По следствию 4.2 в S тождественно выполняется $x + 2xy = x$. Пусть для произвольного идеала $I \subseteq S$ выполняется $a + b, a \in I$ для некоторых $a, b \in S$. Тогда $b + ab = b(b + a) \in S$ и $ab \in S$, откуда следует что $b + ab + ab = b + 2ab = b \in I$. ☐

Следствие 4.3. *Все идеалы в* $S \in \mathfrak{M}$ *строгие тогда и только тогда, когда* S *— дистрибутивная решётка.*

Предложение 4.4. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством* $x + xy = 2x$ *является подпрямым произведением полуколец* $\mathbb{B}$ *и* $\mathbb{T}$, *а значит, дистрибутивной решётки и коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением. Таким образом,* $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{T})$ *— это многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством* $x + xy = 2x$.

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x+xy = 2x$. При $x = 1$ имеем $1+y = 1+1$ для всех $y \in S$. Значит, для всех $s \neq 1$ получаем либо $1 + s = 1 + 1 = 1$, либо $1 + s = 1 + 1 \neq 1$. В обоих случаях $\tau_{S\setminus\{1\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$. В первом случае $S \cong \mathbb{B}$, во втором случае $S \cong \mathbb{T}$. □

Предложение 4.5. *Любое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $x+y = 2xy$ является подпрямым произведением полуколец $\mathbb{D}$ и $\mathbb{T}$, или, равносильно, некоторых коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением и монополукольца. Поэтому $\mathfrak{M}(\mathbb{D}, \mathbb{T})$ — многообразие всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $x + y = 2xy$.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $x + y = 2xy$. При $y = 1$ получаем $x + 1 = x + x$ для всех $x \in S$. Значит, для любого s из идеала $S \setminus \{1\}$ имеем $1 + s = s + s \neq 1$. Таким образом, $\tau_{S\setminus\{1\}}$ — конгруэнция на S. Значит, $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$. Если $2 = 1$, то $S \cong \mathbb{D}$, если же $2 \neq 1$, то $S \cong \mathbb{T}$. □

Замечание 4.1. В произвольном полукольце S из $\mathfrak{M}(\mathbb{D}, \mathbb{T})$ нет собственных полустрогих идеалов. В самом деле, в силу тождества $x + y = 2xy$ имеем $S + I \subseteq I$ для произвольного идеала I в S.

Предложение 4.6. *Всякое коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $2x = 2y$ является подпрямым произведением полуколец $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{T}$, стало быть, булева кольца и коммутативного мультипликативно идемпотентного полукольца с константным сложением. Следовательно, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2, \mathbb{T})$ совпадает с многообразием всех коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x = 2y$.*

Доказательство. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — подпрямо неразложимое полукольцо, обладающее тождеством $2x = 2y$. Подставляя $x = s \neq 1$, $y = 1$, получаем $s + s = 1 + 1$ для всякого $s \in S \setminus \{1\}$, откуда следует, что $2 \neq 1$.

Предположим, что существует $a \in S \setminus \{1\}$, такой что $1 + a = 1$. Тогда в силу тождества $2x = 2y$ справедливо $1 = 1+a = (1+a)+a = 1+(a+a) = 1+(t+t) = (1 + t) + t$ для любого $t \in S \setminus \{1\}$. Значит, $1 + t = 1$, так как $S \setminus \{1\}$ — идеал в S. Получаем, что $\tau_{S\setminus\{1\}}$ — конгруэнция на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2$.

Ясно, что если $1 + b \neq 1$ для некоторого $b \in S \setminus \{1\}$, то $1 + t \neq 1$ для всех $t \in S \setminus \{1\}$. В этом случае $S \cong \mathbb{T}$. □

Предложение 4.7. *Произвольное коммутативное мультипликативно идемпотентное полукольцо с тождеством $2x + xy = xy$ является подпрямым произведением полуколец $\mathbb{D}$, $\mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$. Следовательно, многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{D}, \mathbb{Z}_2) = \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\})$ является многообразием всевозможных коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец с тождеством $2x + xy = xy$.*

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое полукольцо из многообразия полуколец с тождеством $xy + 2x = xy$. Оно обладает единицей 1 и элементом e, таким что $em = m$ для любого m из максимального идеала $M = S \setminus \{1\}$. При этом из тождества $xy + 2x = xy$ следует, что для всех $x \in S$ выполняется $x + 2 = x$.

Пусть $2 = 1$. Тогда для всех $x, y \in S$ справедливо $x+1 = x$, $y+1 = y$, откуда следует, что $x+xy = xy = y+xy$. Получаем, что $x+y = x+y+2xy = 2xy = xy$. Таким образом, S — монополукольцо, и по предложению 4.1 $S \cong \mathbb{D}$.

Пусть $2 = e$. Тогда для всякого $x \in S$ справедливо $x + e = x$. Заметим, что множество $S \setminus \{1, e\}$ является простым идеалом в S. Если $S \setminus \{1, e\} = \varnothing$, то $S \cong \mathbb{Z}_2$. Если же $S \setminus \{1, e\} \neq \varnothing$, то разбиение $\tau_{S\setminus\{1,e\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S\setminus\{1,e\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.

Пусть теперь $2 \notin \{1, e\}$. Тогда $e + e = 2$ и $x + 2 = x$ для всех $x \in S$. Если $e+1 = 1$, то $2 = e+2 = e$. Если же $e+1 \notin \{1, e\}$, то $e+1 = e(e+1) = e+e = 2$, откуда следует, что $e = e + 2 = 2 + 1 = 1$. Противоречие. Значит, $e + 1 = e$. Теперь $1 = 2 + 1 = (e + e) + 1 = e + (e + 1) = e + e = 2$, противоречие. □

Обозначим через $\mathfrak{N}$ многообразие полуколец, порождённое полукольцами $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$, или, равносильно, одним полукольцом $\mathbb{B} \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{D} \times \mathbb{T}$.

В произвольном полукольце $S \in \mathfrak{N}$ выполняется тождество

$$x + 2xy + yz = x + 2xz + yz, \qquad (*)$$

поскольку ему удовлетворяют полукольца $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$.

Лемма 4.2. *Если $S \in \mathfrak{N}$ обладает единицей 1, а элементы из $S \setminus \{1\}$ аддитивно идемпотентны, то для всех $x \in S$, $y \in S \setminus \{1\}$ справедливо равенство*

$$1 + x + y = 1 + x + xy. \qquad (**)$$

Доказательство. Пусть полукольцо S удовлетворяет условию леммы. Тогда на S выполняется тождество $(*)$. Подставив в $(*)$ $x = 1$ и переобозначив переменные, получаем равенство $1+2x+xy = 1+2y+xy$. Если $x \in S$ и $y \in S \setminus \{1\}$, то $1+x+xy = 1+y+xy$. Имеем $1+x+xy = (1+x+xy)+x = (1+y+xy)+x = 1 + x + y$. □

Замечание 4.2. Полукольца $\mathbb{D} \cup \{0\}$ и $\mathbb{T} \cup \{0\}$ не удовлетворяют тождеству $(*)$, стало быть, они не принадлежат многообразию $\mathfrak{N}$. В самом деле, для полукольца $\mathbb{D} \cup \{0\}$ при $x = 1$, $y = \infty$, $z = 0$ имеем

$$\infty = 1 + 2 \cdot 1 \cdot \infty + 1 \cdot \infty \cdot 0 \neq 1 + 2 \cdot 1 \cdot\ 0 + 1 \cdot \infty \cdot 0 = 1.$$

Для полукольца $\mathbb{T} \cup \{0\}$ при $x = y = 1$, $z = 0$ получаем

$$\infty = 1 + 1 + 0 \neq 1 + 0 + 0 = 1.$$

Лемма 4.3. *Для произвольного идемпотентного подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{N}$ справедливы следующие утверждения:*

1) *отношение ${}_1\!\sim$ является конгруэнцией на S;*
2) *если $1 + e = 1$, то отношение ${}_e\!\sim$ является конгруэнцией на S.*

Доказательство. Докажем первое утверждение. Достаточно проверить, что ${}_1{\sim}$ сохраняет полукольцевое умножение. Пусть для некоторых $a, b \in S$ выполняется $a + 1 = b + 1$. Рассмотрим произвольный элемент $c \in S$. Имеем $1 + a + c = 1 + b + c$. Из равенства $(**)$ выводим $1 + a + c = 1 + a + ac$. Принимая теперь в $(**)$ $x = a$, $y = ac$, имеем $1 + a + ac = 1 + ac + ac = 1 + ac$. Аналогично $1 + b + c = 1 + bc$. Таким образом, ${}_1{\sim}$ является конгруэнцией на S.

Докажем второе утверждение. Покажем, что ${}_e{\sim}$ сохраняет полукольцевое умножение. Пусть для элементов $a, b \in S$ выполняется $a \ {}_e{\sim}\ b$, т. е. $a + e = b + e$. Нужно показать, что $ac + e = bc + e$ для любого $c \in S$. Заметим, что из $a + e = b + e$ следует $ac + ec = bc + ec$.

При $c = 1$, очевидно, получаем требуемое.

Пусть теперь $c \neq 1$. Учитывая, что $e + 1 = 1$, имеем $a + 1 = a + e + 1 = b + e + 1 = b + 1$. Тогда по пункту 1) получаем, что $ac + 1 = bc + 1$, откуда следует, что $ac + e = bc + e$, так как $c \neq 1$. □

Пусть S — произвольное подпрямо неразложимое полукольцо в $\mathfrak{M}$, причём $S \geqslant 3$. Тогда по лемме 3.2 существует следующее разбиение полукольца S:

$$\tau = \big\{\{1\},\ A = \{x \in S\colon x \neq 1,\ x + 1 = 1\},\ B = \{x \in S\colon x \neq 1,\ x + 1 \neq 1\}\big\}.$$

Лемма 4.4. *Разбиение τ произвольного подпрямо неразложимого полукольца $S \in \mathfrak{M}$, $|S| \geqslant 3$, обладает следующими свойствами*:

1) $1 + A = \{1\}$, $A + A \subseteq A$, $AA \subseteq A$, $B + S \subseteq B$;
2) *если $S \in \mathfrak{N}$ и в нём $3 = 1 \neq 2$, то τ является отношением равенства на S и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.*

Доказательство. Докажем пункт 1). Ясно, что $A + 1 = \{1\}$.

Пусть $a, a' \in A$, т. е. $a + 1 = a' + 1 = 1$. Тогда $a + a' + 1 = (a + 1) + a' = 1 + a' = 1$, откуда следует, что $a + a' \in A$. Заметим, что $aa' = aa' \cdot 1 = aa'(a + 1) = aa' + aa'$. Учитывая это, получаем $1 = a + a' + 1 = a + 2aa' + a' + 1 = aa' + 1$, откуда следует, что $aa' \in A$.

Если для некоторых $x \neq 1 \neq y$ выполняется $x + y + 1 = 1$, то $x + 1 = y + 1 = 1$. Значит, если $b \in B$, то $b + s \in B$ для любого $s \neq 1$.

Пусть $b \in B$. Рассмотрим элемент $b + 1 \neq 1$. Предположим, что $b + 1 \in A$, т. е. $b + 1 + 1 = 1$. Если $1 + 1 = 1$, то $1 = b + 1 + 1 = b + 1 \neq 1$, противоречие. Если же $1 + 1 = s \neq 1$, то $b + s = b + 1 + 1 = 1$, что также невозможно, так как $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S. Таким образом, $1 + B \in B$.

Итак, имеем $1 + A = \{1\}$, $A + A \subseteq A$, $AA \subseteq A$, $B + S \subseteq B$.

Докажем пункт 2). По пункту 4) теоремы 3.1 имеем $e = 2$, откуда следует, что $e + 1 = 1$. Значит, $S \setminus \{1\}$ является идемпотентным подполукольцом в S, и по лемме 4.2 на S для всех $x, y \in S \setminus \{1\}$ выполняется равенство $(**)$.

Пусть $a \in A$, $b \in B$, т. е. $a + 1 = 1$, $b \neq 1 \neq b + 1$. Если $ab + 1 = 1$, то, учитывая $(**)$, получаем $1 = 1 + a + ab = 1 + a + b = 1 + b \neq 1$. Противоречие. Значит, $AB \subseteq B$.

Пусть теперь $b, b' \in B$. Предположим, что $bb' + 1 = 1$. Тогда $b = b \cdot 1 = b(bb' + 1) = b + bb'$. Из равенства $(**)$ получаем $1 + bb' + b = 1 + bb' + b \cdot bb'$, откуда следует, что $1 = 1 + bb' = 1 + b + bb' = 1 + b \neq 1$, противоречие. Стало быть, $BB \subseteq B$.

Учитывая пункт 1), заключаем, что τ является конгруэнцией на S, разделяющей элементы 1 и e. Значит, $\tau = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$. □

Теорема 4.1. *Полукольца* $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{B} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$ *исчерпывают — с точностью до изоморфизма — все подпрямо неразложимые полукольца многообразия* $\mathfrak{N}$.

Доказательство. Пусть S — подпрямо неразложимое полукольцо из $\mathfrak{N}$.

Рассмотрим все возможные случаи.

1. Пусть $2 = 1$, т. е. S идемпотентно.

1.1. Предположим, что $1 + e = 1$. По лемме 4.3 ${}_e\!\sim$ будет конгруэнцией на S, причём $e \;{}_e\!\nsim\; 1$, поэтому ${}_e\!\sim \,= \mathbf{0}_S$. Таким образом для всех $x, y \in S$ из $x + e = y + e$ следует, что $x = y$. Тогда для всякого $x \in S$ выполняется $x + e = x$, так как $x + e = x + e + e$.

Рассмотрим произвольные элементы $s, t \in S \setminus \{1, e\}$. Заметим, что $1 + s \notin \{1, e\}$, иначе $s = s + s = e$. Если $s + t \in \{1, e\}$, то $s + t + 1 = 1$ в силу соотношения $1 + 1 = 1 + e = 1$. Так как $S \setminus \{1\}$ является идеалом в S, то должно выполняться $1 + s = 1$ и $1 + t = 1$, что, как показано выше, невозможно. Значит, $s + t \notin \{1, e\}$.

Если $|S| = 2$, то $S \cong \mathbb{B}$. Если же $|S| \geqslant 3$, то разбиение $\tau_{S \setminus \{1,e\}}$ является конгруэнцией на S. Значит, $\tau_{S \setminus \{1,e\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{B} \cup \{\infty\}$.

1.2. Пусть $1 + e \neq 1$. Тогда $e + 1 = e(e + 1) = e + e = e$. По лемме 4.3 отношение ${}_1\!\sim$ является конгруэнцией на S, при этом $e \;{}_1\!\nsim\; 1$. Значит, ${}_1\!\sim \,= \mathbf{0}_S$ и элемент 1 аддитивно сократим. По лемме 2.4 S — монополукольцо, поэтому $S \cong \mathbb{D}$.

2. Пусть $3 = 2 \neq 1$.

2.1. Предположим, что $2 = e$. Тогда $e + 1 = 3 = 2 = e$. Если для любого $x \in S \setminus \{1\}$ выполняется $x + 1 \in S \setminus \{1\}$, то разбиение $\tau_{S \setminus \{1\}}$ является конгруэнцией на S, поэтому $\tau_{S \setminus \{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$.

Пусть теперь существует $a \in S \setminus \{1, e\}$, такой что $a + 1 = 1$. Тогда $a + e = e$, $a + a = a$ и по замечанию 4.2 $\{a, 1, 2\} \cong \mathbb{T} \cup \{0\} \notin \mathfrak{N}$. Противоречие.

2.2. Пусть $2 \notin \{1, e\}$. Тогда $e + e = e + 1 = 2 = e + 2$. Если для любого $x \in S \setminus \{1\}$ выполняется $x + 1 \neq 1$, то разбиение $\tau_{S \setminus \{1\}}$ является конгруэнцией на S, откуда следует, что $\tau_{S \setminus \{1\}} = \mathbf{0}_S$ и $S \cong \mathbb{T}$.

Если же существует $a \notin \{1, e\}$, такой что $a + 1 = 1$, то $a + e = e$, $a + a = a$, $a + 2 = 2$ и $\{a, 1, 2, e\} \notin \mathfrak{N}$, так как в нём не выполняется $(*)$. Противоречие.

3. Пусть $3 \neq 2$. Тогда $3 = 1$ по пункту 4) теоремы 3.1. Если $|S| = 2$, то $S \cong \mathbb{Z}_2$. Если же $|S| \geqslant 3$, то по лемме 4.4 $S \cong \mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$. □

Следствие 4.4. *Произвольное полукольцо* $S \in \mathfrak{N}$ *будет подпрямым произведением некоторого семейства полуколец* $\mathbb{B}$, $\mathbb{Z}_2$, $\mathbb{D}$, $\mathbb{T}$, $\mathbb{B} \cup \{\infty\}$, $\mathbb{Z}_2 \cup \{\infty\}$.

Следствие 4.5. *В классе* $\mathfrak{M}$ *многообразие* $\mathfrak{N}$ *задаётся одним тождеством* $(*)$.

Теорема 4.2. *Решётка подмногообразий многообразия* $\mathfrak{N}$ *является* 16-*элементной булевой решёткой.*

Доказательство. Имеем $\mathfrak{M}(\mathbb{B}\cup\{\infty\}) = \mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D})$ и $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2\cup\{\infty\}) = \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{D})$. Поэтому по теореме 4.1 любое подмногообразие в $\mathfrak{N}$ определяется подмножеством множества $M = \{\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{D},\mathbb{T}\}$. При этом, как легко убедиться, разные подмножества в M порождают разные многообразия. Стало быть, решётка $L(\mathfrak{N})$ подмногообразий многообразия $\mathfrak{N}$ будет 16-элементной булевой решёткой. Наименьшим элементом в $L(\mathfrak{N})$ является тривиальное многообразие, наибольшим — само $\mathfrak{N}$. Многообразия $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ — атомы в $L(\mathfrak{N})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{T})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{D},\mathbb{T})$ — коатомы. □

Предложение 4.8. *Для всякого полукольца* $S \in \mathfrak{M}$ *имеют место следующие утверждения*:

1) $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда* S *обладает тождеством* $x + 2xy = 3x$;
2) $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D},\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда* S *дистрибутивно, что равносильно тому, что* $S \in \mathfrak{N}$ *и удовлетворяет тождеству* $3x = 2x$;
3) $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2,\mathbb{D},\mathbb{T})$ *тогда и только тогда, когда* S *обладает тождеством* $x + 2xy = 3xy$;
4) $S \in \mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{D})$ *тогда и только тогда, когда* $S \in \mathfrak{N}$ *и* S *удовлетворяет тождеству* $3x = x$.

Доказательство. Докажем утверждение 1). Ясно, что полукольцо $S \in \in \mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{Z}_2,\mathbb{T})$ удовлетворяют тождеству $x + 2xy = 3x$, а то в свою очередь влечёт тождество $(*)$, но это неверно на $\mathbb{D}$. Остаётся применить теорему 4.2.

Утверждения 2)—4) доказываются аналогичным образом, только надо показать, что тождество $(*)$ выполняется в любом дистрибутивном полукольце $S \in \mathfrak{M}$. Для этого заметим, что в S выполняется тождество $x + xy = x + 3xy$, а из двойственного закона дистрибутивности получаем, что

$$x + yz = (x + y)(x + z) = x + xy + xz + yz.$$

Тогда

$$x + 2xy + yz = x + 3xy + xz + yz = x + xy + xz + yz = x + yz.$$

Поэтому и $x + 2xz + yz = x + yz$. □

Замечание 4.3. Мы видим, что многообразие $\mathfrak{N}$ содержит четыре подмногообразия с идемпотентным тождеством $x + x = x$: тривиальное, $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D})$. Как показано в [13], в многообразии $\mathfrak{M}$ существует ещё одно «идемпотентное» подмногообразие — многообразие коммутативных идемпотентных полуколец. Оно совпадает с $\mathfrak{M}(\mathbb{D} \cup \{\infty\})$ и строго содержит $\mathfrak{M}(\mathbb{B},\mathbb{D})$.

В классе полуколец $\mathfrak{M}$ каждое тождество, из которого вытекает тождество $(*)$, задаёт одно из шестнадцати подмногообразий в $\mathfrak{N}$ по теореме 4.2. Приведём несколько примеров.

1. Во всяком полукольце $S \in \mathfrak{M}$ тождество $(*)$ эквивалентно любому из тождеств $x + 2xy + xyz = x + 2xz + xyz$, $x + 2xy + 2xyz = x + 2xz + 2xyz$, определяющих многообразие $\mathfrak{N}$. Однако тождество $(*)$ не равносильно ни одному из тождеств $2x+2xy+2yz = 2x+2xz+2yz$ и $2x+2xy+2xyz = 2x+2xz+2xyz$. В самом деле, $(\mathbb{T}\cup\{0\})\cup\{\infty\} \notin \mathfrak{N}$, но в этом полукольце выполняются указанные тождества.

2. В многообразии $\mathfrak{M}$ каждое из тождеств $x+xy+yz = x+xz+yz$, $x+yz = x+xy+yz$ равносильно двойственному закону дистрибутивности, т. е. любое из этих тождеств определяет многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{B}, \mathbb{D}, \mathbb{T})$.

3. В классе $\mathfrak{M}$ тождество $3x = 3y$ равносильно каждому из тождеств $x+y = x + z$, $x + y = u + v$ и определяет многообразие $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$.

Предложение 4.9. *Решётка $L(\mathfrak{M})$ имеет ровно четыре атома: $\mathfrak{M}(\mathbb{B})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{Z}_2)$, $\mathfrak{M}(\mathbb{D})$, $\mathfrak{M}(\mathbb{T})$ и является атомной.*

Доказательство. Покажем, что любое неодноэлементное полукольцо $S \in \mathfrak{M}$ имеет двухэлементное подполукольцо.

Если существует $a \in S$, такой что $3a \neq 2a$, то $\{2a, 3a\}$ — подполукольцо в S, изоморфное $\mathbb{Z}_2$.

Пусть теперь в S выполняется тождество $3x = 2x$. Если существует $a \in S$, такой что $2a \neq a$, то $\{a, 2a\}$ будет подполукольцом в S, изоморфным $\mathbb{T}$.

Если же S идемпотентно, то для всех $a \neq b$ из S либо $a \neq ab$, либо $b \neq ab$. Пусть $a \neq ab$. Тогда либо $a + ab \neq a$, либо $a + ab \neq ab$. В первом случае подполукольцом в S будет $T_1 = \{a, a + ab\}$, во втором — $T_2 = \{ab, a + ab\}$, причём $T_1 \cong \mathbb{D}$, $T_2 \cong \mathbb{B}$. □

Отметим, что решётка подмногообразий любого нетривиального многообразия атомная [7, с. 376].

Для произвольного полукольцевого тождества $f = g$ через $\mathfrak{M}(f = g)$ обозначим подмногообразие в $\mathfrak{M}$, порождённое этим тождеством.

Предложение 4.10. *В решётке подмногообразий многообразия $\mathfrak{M}$ выполняются следующие равенства:*

1) $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(3x = 2x)$;
2) $\mathfrak{M}(3x = 2x) \cap \mathfrak{M}(3x+y = x+y) = \mathfrak{M}(2x+y = x+y) = \mathfrak{M}(2x = x) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})$;
3) $\mathfrak{M}(3x + y = x + y) = \mathfrak{M}(3x = x) \vee \mathfrak{M}(\mathbb{T})$.

Доказательство. Первое утверждение вытекает из предложения 3.1.

Докажем второе утверждение. Пусть $S \in \mathfrak{M}$ — полукольцо, обладающее тождествами $3x = 2x$ и $3x + y = x + y$. Таким образом, в S выполняется тождество $2x + y = x + y$.

Представим S как подпрямое произведение семейства S_i $(i \in I)$ подпрямо неразложимых полуколец $S_i \in \mathfrak{M}$: $s \equiv (s_i) \in \prod\limits_{i \in I} S_i$ для каждого $s \in S$. Пусть I_1 — множество всех индексов $i \in I$, таких что S_i удовлетворяет тождеству $2x = x$, и $I_2 = I \setminus I_1$.

Зафиксируем индекс $j \in I_2$ и покажем, что $S_j \cong \mathbb{T}$. Предположим, что найдётся элемент $a \in S_j$, такой что $a + 1 = 1$. Тогда $a + 2 = 2$, и в силу тождества $2x + y = x + y$ имеем $2 = 2 \cdot 1 + a = 1 + a = 1$, что невозможно. Значит, по лемме 3.2 $|S_j| = 2$, причём $e + 1 = e$, $1 \neq 1 + 1 = e$. Таким образом, $S_j \cong \mathbb{T}$.

Доказательство третьего утверждения аналогично доказательству первого. Нужно учесть, что по теореме 3.1 для любого подпрямо неразложимого полукольца в $\mathfrak{M}$ из $3 \neq 1$ следует $3 = 2$. □

Литература

[1] Вечтомов Е. М. Введение в полукольца. — Киров: Изд-во ВятГПУ, 2000.

[2] Вечтомов Е. М., Петров А. А. О многообразии полуколец с идемпотентным умножением // Алгебра и логика: теория и приложения: тез. докл. Междунар. конф., посвящ. памяти В. П. Шункова. — Красноярск, 2013. — С. 33—34.

[3] Вечтомов Е. М., Петров А. А. О подпрямо неразложимых коммутативных мультипликативно идемпотентных полукольцах // Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения: тез. докл. XI Междунар. конф. — Саратов, 2013. — С. 14—15.

[4] Вечтомов Е. М., Петров А. А. Некоторые многообразия коммутативных мультипликативно идемпотентных полуколец // Современные проблемы математики и её приложений: труды 45-й Междунар. молодёжной школы-конференции, посвящ. 75-летию В. И. Бердышева. — Екатеринбург, 2014. — С. 10—12.

[5] Кон П. Универсальная алгебра. — М.: Мир, 1968.

[6] Лукин М. А. Об одной универсальной конгруэнции на полукольцах // Проблемы современного математического образования в вузах и школах России: матер. V Всероссийской науч.-метод. конф. — Киров, 2012. — С. 312—316.

[7] Мальцев А. И. Алгебраические системы. — М.: Наука, 1970.

[8] Петров А. А. Один класс мультипликативно идемпотентных полуколец // Алгебра и комбинаторика: тез. Междунар. конф. по алгебре и комбинаторике, посвящ. 60-летию А. А. Махнева. — Екатеринбург, 2013. — С. 131—132.

[9] Чермных В. В. Функциональные представления полуколец // Фундамент. и прикл. мат. — 2011/2012. — Т. 17, вып. 3. — С. 111—227.

[10] Ghosh S. Another note on the least lattice congruence on semirings // Soochow J. Math. — 1996. — Vol. 22, no. 3. — P. 357—362.

[11] Ghosh S. A characterization semirings which subdirect products of rings and distributive lattices // Semigroup Forum. — 1999. — Vol. 59. — P. 106—120.

[12] Kalman J. A. Subdirect decomposition of distributive quasilattices // Fund. Math. — 1971. — Vol. 71. — P. 161—163.

[13] McKenzie R., Romanowska A. Varieties of $\wedge$-distributive bisemilattices // Contrib. Gen. Algebra. Proc. Klagefurt Conf., 1978. — Klagefurt, 1979. — P. 213—218.

[14] McLean D. Idempotent semigroups // Am. Math. Mon. — 1954. — Vol. 61, no. 2. — P. 110—113.

[15] Pastijn F., Romanowska A. Idempotent distributive semirings. I // Acta Sci. Math. — 1982. — Vol. 44. — P. 239—253.

[16] Romanowska A. On bisemilattices with one distributive law // Algebra Universalis. — 1980. — Vol. 10. — P. 36—47.

[17] Vechtomov E. M., Petrov A. A. About the structure of multiplicative idempotent semirings // Abstract of Reports of the 9th Int. Alg. Conf. in Ukraine. — L'viv, 2013. — P. 210.