Плотные конечно порождённые подгруппы и интегрирование в компактных группах

О. В. ГЕРАСИМОВА
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: ynona.olga@gmail.com

УДК 512.543.7+512.544.33+512.815.8+517.984.5+514.84

Ключевые слова: компактная группа, плотная подгруппа, интегрирование, коммутаторный гамильтониан.

Аннотация

Для компактной группы G указываются способы приближения коммутаторного гамильтониана конечными суммами вида $\sum\limits_{g\in G}\sum\limits_{h\in G}\mu_g\nu_h ghg^{-1}h^{-1}$, где $\sum\limits_{g\in G}\mu_g=1$, $\sum\limits_{h\in G}\nu_h=1$.

Abstract

O. V. Gerasimova, Dense finitely generated subgroups and integration on compact groups, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 71—77.

We point out methods of approximation of the commutator Hamiltonian on a compact group G with finite sums of the form $\sum\limits_{g\in G}\sum\limits_{h\in G}\mu_g\nu_h ghg^{-1}h^{-1}$, where $\sum\limits_{g\in G}\mu_g=1$ and $\sum\limits_{h\in G}\nu_h=1$.

В [2] было показано, что спектр коммутаторного гамильтониана компактной группы водородоподобен. В данной работе мы находим приближение этого оператора конечными двойными суммами.

Везде ниже мы придерживаемся следующих обозначений:

G — компактная группа, мера Хаара μ на G такова, что $\mu(G)=1$;

G_d — плотная подгруппа G, порождённая элементами $\Pi=\{g_1,\ldots,g_n\}$;

$\Pi_1=\{1\}\cup\Pi$; $\Pi^l=\underbrace{\Pi\times\ldots\times\Pi}_{l}$;

$P\overset{\text{def}}{=}\mu_0\cdot 1+\sum\limits_{i=1}^{n}\mu_i g_i\in R[G]$, где μ_i — произвольные положительные действительные числа, для которых $\mu_0+\mu_1+\ldots+\mu_n=1$;

$P^l=\mu_l\cdot 1+\sum\limits_{h\in\Pi^l}\mu_h h\in R[G]$ и $\mu_l+\sum\limits_{h\in\Pi^l}\mu_h=1$;

$C(G)$ — пространство всех непрерывных комплекснозначных функций $f\colon G\to\mathbb{C}$;

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 71—77.
© 2013 *Центр новых информационных технологий МГУ, Издательский дом «Открытые системы»*

$\rho\colon G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$ — представление группы G в пространстве $V = C(G)$ правыми сдвигами $\rho(h) \times f(g) \stackrel{\mathrm{def}}{=} f(g * h)$.

Теорема 1. *Для любой компактной группы G и любых её элементов $g_1, \ldots, g_n$, порождающих в ней плотную подгруппу G_d,*

$$\rho(P^l) \times f(g) = \mu_0 f(g) + \sum_{h \in \Pi^l} f(g * h) \xrightarrow[l \to \infty]{} \int\limits_G f(g)\, d\mu_G \cdot e(g),$$

где $e(g) = 1$ для любого $g \in G$. В частности,

$$\int\limits_G f(g)\, d\mu_G = \lim_{l \to \infty} \sum_{h \in \Pi_1^l} \mu_h f(h) = \lim \rho(P^l) \times f(e).$$

Теорема 2. *Для любого унитарного конечномерного неприводимого комплексного представления компактной группы G в линейном пространстве V имеет место равенство*

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{h \in \Pi_1^l} \mu_h h^{-1} a h = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(a) \cdot \mathbb{1},$$

где $a \in \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$. В частности,

$$\lim_{l_1 \to \infty} \lim_{l_2 \to \infty} \sum_{h_1 \in \Pi_1^{l_1}} \sum_{h_2 \in \Pi_1^{l_2}} \mu_{h_1}^{(l_1)} \mu_{h_2}^{(l_2)} h_1 h_2 h_1^{-1} h_2^{-1} = \frac{1}{n^2}.$$

В связи с этой теоремой см. [1].

Доказательство теоремы 1 разобьём на две части: сначала докажем теорему для произвольного конечномерного представления, потом, воспользовавшись теоремой Петера—Вейля, обобщим её на бесконечномерный случай.

1. Конечномерный случай

Далее во всём разделе рассматриваем унитарное представление

$$\rho\colon G \to \operatorname{End}_{\mathbb{C}} V$$

группы G в конечномерном комплексном пространстве V, которое будем считать нормированным относительно евклидовой нормы

$$\|v\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n |v_i|^2}.$$

Замечание 1. Пусть $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ — векторы в V с единичной нормой и μ, ν — такие положительные числа, что $\mu + \nu = 1$. Тогда

$$\|\mu x + \nu y\|_2 = \sum_{i=1}^{n} |\mu x_i + \nu y_i|^2 = \mu^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 + 2\mu\nu \sum_{i=1}^{n} |x_i y_i| + \nu^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \mu^2 \sum_{i=1}^{n} |x_i| + 2\mu\nu \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} + \nu^2 \sum_{i=1}^{n} |y_i|^2 =$$
$$= \left(\mu \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2} + \nu \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |y_i|^2} \right)^2 = (\mu\|x\|_2 + \nu\|y\|_2)^2 = 1.$$

причём равенство достигается только тогда, когда x совпадает с y.

Лемма 1. *Единичный вектор $v \in V$ является собственным вектором оператора P с собственным значением 1 тогда и только тогда, когда для каждого $g_i \in \Pi$ выполняется равенство $g_i v = v$.*

Доказательство.

$$Pv = \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i v = v,$$

где

$$\mu_0 \geqslant 0, \quad 0 < \mu_i \leqslant 1, \quad \sum_{i=0}^{n} \mu_i = 1,$$

т. е. вектор v лежит на выпуклой оболочке векторов $g_i v$, $i = \overline{1, n}$, лежащих на единичной сфере. По замечанию 1 это возможно только тогда, когда Pv совпадает с одним из $g_i v$. Пусть для определённости $g_n v = v$. Тогда

$$Pv = \sum_{i=0}^{n} \mu_i g_i v = \mu_n v + \sum_{i=0}^{n-1} \mu_i g_i v = v.$$

Значит,

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mu_i g_i v = (1 - \mu_n) v.$$

Разделим выражение на $1 - \mu_n$, получим, что

$$\sum_{i=0}^{n-1} \nu_i g_i v = v,$$

где

$$0 < \nu_i = \frac{\mu_i}{1 - \mu_n} \leqslant 1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i = 1,$$

т. е. v лежит на выпуклой оболочке векторов $g_i v$, где $i = \overline{1, n-1}$. Повторяя этот процесс, убеждаемся, что для каждого $i \in \overline{1, n}$ выполняется $g_i v = v$. $\square$

Замечание 2. Хорошо известно, что $|\lambda| \leqslant \|P\|_2^2$ для собственных значений λ оператора P. Но

$$|\lambda| \leqslant \|P\|^2 = \left\| \sum_{i=0}^{n} \mu_i g_i \right\|_2 \leqslant \sum_{i=0}^{n} \mu_i \|g_i\|_2 = 1,$$

и следовательно, все собственные значения оператора P по модулю не превосходят 1.

Лемма 2. *Если $\mu_0 \neq 0$, то*

а) *если собственное значение λ оператора P такое, что $|\lambda| = 1$, то $\lambda = 1$;*

б) *жорданова клетка, отвечающая собственному значению 1, тривиальна.*

Доказательство. Докажем утверждение а). Возьмём единичный вектор $v \in V$, собственный для оператора P с собственным значением λ. Тогда

$$\lambda v = Pv = \mu_0 v + \sum_{i=1}^{n} \mu_i g_i$$

лежит в выпуклой оболочке векторов $v, g_1 v, \ldots, g_n v$, имеющих единичную норму. По условию и сам λv — единичный вектор. Значит, по замечанию 1 он совпадает с одним из векторов $v, g_1 v, \ldots, g_n v$. Положим $g_n v = \lambda v$. Тогда

$$\mu_0 v + \sum_{i=1}^{n-1} \mu_i g_i v = \lambda(1 - \mu_n) v.$$

После перенормирования на $1 - \mu_n$ получим

$$\nu_0 v + \sum_{i=1}^{n-1} \nu_i g_i v = \lambda v,$$

где

$$\nu_0 \neq 0, \quad 0 < \nu_i = \frac{\mu_i}{1 - \mu_n} \leqslant 1, \quad \sum_{i=0}^{n-1} \nu_i = 1.$$

Продолжая процесс тем же образом, получим, что $v = \lambda v$, а значит, $\lambda = 1$.

Докажем утверждение б). Предположим, что жорданова нормальная форма оператора P содержит нетривиальную клетку с собственным значением 1. Ортонормируем жорданов базис. Тогда жорданова клетка при собственном значении 1 будет верхнетреугольной матрицей вида

$$J_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ & \ddots & & \vdots \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 1 \end{pmatrix},$$

причём $a_{ij} \neq 0$ для некоторых $i < j$. Возьмём единичный вектор $v = (0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0)$ с единицей на j-м месте. Тогда

$$\|Pv\|_2 = \|(a_{1j}, \ldots, a_{ij}, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)\|_2 = \\ = \sqrt{1 + \sum_{l<j} a_{lj}^2} > \sqrt{1 + |a_{ij}^2|} > 1 = \|P\|_2,$$

что невозможно. □

Теорема. *Пусть*

$$V = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}\, P} V_\lambda \text{ —}$$

жорданово разложение рассматриваемого пространства V относительно действия оператора P и $v \in V$. Тогда последовательность $v, Pv, P^2v, \ldots$ является фундаментальной и $P^l v \underset{l\to\infty}{\to} v_1$, где v_1 — проекция вектора v на компоненту V_1.

Доказательство. По доказанным выше утверждениям в жордановом базисе оператор P имеет вид

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & & & \\ & 1 & & \vdots & & & \\ & & \ddots & \vdots & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & J_{\lambda_1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & J_{\lambda_k} \end{pmatrix},$$

где $|\lambda_i| < 1$. Пусть

$$v = v_1 + v_{\lambda_1} + \ldots + v_{\lambda_k} \text{ —}$$

разложение вектора v по собственным подпространствам. Тогда

$$H^l v = v_1 + \sum_{\lambda_i \in \mathrm{Spec}\, P} J_{\lambda_i}^l v_{\lambda_i}.$$

Рассмотрим произвольный элемент этой суммы

$$J_\lambda^{m\times m} = \lambda \mathrm{E} + \mathrm{N},$$

где E — единичная матрица, а N — матрица с единицами над диагональю. Тогда

$$J_\lambda^l v_\lambda = (\lambda \mathrm{E} + \mathrm{N})^l v_\lambda = \sum_{i=0}^{m-1} C_l^i \lambda^{l-i} N^j v_\lambda = \sum_{i=0}^{m-1} C_l^i \lambda^l (\lambda^{-i} \mathrm{N}^j v_\lambda) \underset{l\to\infty}{\to} 0.$$

Значит,

$$P^l v = v_1 \sum_{\lambda_i \in \mathrm{Spec}\, P} J_{\lambda_i}^l v_{\lambda_i} \underset{l\to\infty}{\to} v_1.$$ □

2. Бесконечномерный случай

В этом разделе требуется различать между нормами в $C(G)$, пространстве непрерывных комплекснозначных функций,

$$\|f\|_1 = \sup_{g \in G} |f(g)|$$

и

$$\|f\|_2 = \Bigl(\int\limits_G |f|^2 \, \mathrm{d}\mu_G \Bigr)^{1/2}.$$

Доказательство теоремы 1. По теореме Петера—Вейля [3] для каждой непрерывной функции f на компактной группе G и любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $\bar{f}$, порождающая конечномерный подмодуль в модуле непрерывных функций, что $\|f - \bar{f}\|_1 < \varepsilon/3$. Тогда норма разности интеграла и l-й степени действия оператора может быть приближена суммой

$$\Bigl\| P^l f - \int\limits_G f \, \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_1 \leqslant$$
$$\leqslant \|P^l(f - \bar{f})\|_1 + \Bigl\| P^l \bar{f} - \int\limits_G \bar{f} \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_1 + \Bigl\| \int\limits_G (\bar{f} - f) \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_1 = (1) + (2) + (3).$$

Первое слагаемое оценим следующим образом:

$$\|P^l(f - \bar{f})\|_1 = \sup_{g \in G} |P^l(f(g) - \bar{f}(g))| = \sup_{g \in G} \Bigl| \sum_{h \in \Pi^l} \mu_h h\bigl(f(g) - \bar{f}(g)\bigr) \Bigr| =$$
$$= \sup_{g \in G} \Bigl| \sum_{h \in \Pi_1^l} \mu_h \bigl(f(gh) - \bar{f}(gh)\bigr) \Bigr| \leqslant \sum_{h \in \Pi_1^l} \mu_h \|f - \bar{f}\|_1 = \|f - \bar{f}\| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (1)$$

Вспоминая стандартные свойства инвариантного интегрирования (см. [3]), ограничим третье слагаемое:

$$\Bigl\| \int\limits_G (\bar{f} - f) \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_1 \leqslant \|\bar{f} - f\|_1 | \int\limits_G \mathrm{d}\mu_G | \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

Для оценки (2) напомним, что в конечномерном пространстве любые две нормы эквивалентны, значит, существует такое $C > 0$, что $\|f\|_1 \leqslant C\|f\|_2$. В конечномерном подмодуле, порождённом $\bar{f}$, верна теорема, доказанная в разделе 1 и утверждающая, что

$$P^l \bar{f} \underset{l \to \infty}{\to} \int\limits_G \bar{f} \mathrm{d}\mu_g.$$

Значит, существует такое m, что для любого $l \geqslant m$ выполняется

$$\Bigl\| P^l \bar{f} - \int\limits_G \bar{f} \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_1 \leqslant C \Bigl\| P^l \bar{f} - \int\limits_G \bar{f} \mathrm{d}\mu_G \Bigr\|_2 \leqslant C \frac{\varepsilon}{3C} \leqslant \frac{\varepsilon}{3}. \quad (2)$$

Складывая полученные оценки, получим что для любого $\varepsilon > 0$ существует m, такое что для любого $l \geqslant m$ выполняется

$$\left\| P^l f - \int\limits_G f \mathrm{d}\mu_G \right\|_1 \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

Доказательство теоремы 2. Пусть унитарное представление

$$\rho_E \colon G \to \mathrm{End}_{\mathbb{C}} W$$

в линейном пространстве $W = \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ действует на нём сопряжениями: $\rho_E(h) \times a = \rho(h^{-1}) a \rho(h)$. Тогда по теореме из раздела 1

$$\lim_{l\to\infty} \rho_E(P^l) \times a = \lim_{l\to\infty} \sum_{h\in\Pi_1} \mu_h \rho(h^{-1}) a \rho(h) = a_1,$$

где a_1 — проекция вектора a на собственное относительно оператора P подпространство W_1 с собственным значением 1. Для любых $a_1 \in W_1$ и $h \in \Pi$ по лемме 1 верно равенство $\rho(h^{-1}) a \rho(h) = a_1$. Так как Π порождает плотную подгруппу в G, а ρ_E является неприводимым представлением, то по теореме плотности $\rho(\Pi)$ порождают всё пространство $\mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$, значит, и для любого $\rho(h) \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}} V$ верно равенство $\rho(h^{-1}) a \rho(h) = a_1$. Получается, что подпространство W_1 совпадает с централизатором представления ρ, и по лемме о централизаторе $V_1 = \mathbb{C} \cdot \mathbb{1}$, т. е.

$$\lim_{l\to\infty} \rho_E(P^l) = \frac{1}{n} \operatorname{Tr}(a) \cdot \mathbb{1}. \qquad \square$$

Замечание 3. Как было отмечено в [2], коммутаторный гамильтониан представляет особый интерес в случае группы $G = \mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$. Хорошо известно, что практически любые два вращения относительно различных осей порождают плотную подгруппу в $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$. На самом деле почти любые два элемента группы $\mathrm{SU}(2, \mathbb{C})$ порождают в ней плотную подгруппу. В связи с этим отметим более общий результат [4]: для произвольной связной вещественной группы Ли G размерности n существует локально компактная открытая окрестность единицы W, такая что $n + 1$ случайно выбранных элементов $g_0, \ldots, g_n$ порождают плотную в G подгруппу с вероятностью 1.

Литература

[1] Герасимова О. В. Спектр коммутаторного гамильтониана водородоподобен // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 2008. — № 6. — С. 71—74.

[2] Герасимова О. В. Спектр коммутаторного гамильтониана сродни энергетическим уровням атома водорода // Успехи мат. наук. — 2009. — Т. 64, № 4. — С. 177—178.

[3] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. — М.: Наука, 1984.

[4] Winkelmann J. Dense random finitely generated subgroups of Lie groups. — `arXiv:math/0309129` [math.GR].