О ручных и диких автоморфизмах алгебр*

Ч. К. ГУПТА
Университет Манитобы, Канада
e-mail: cgupta@cc.umanitoba.ca

В. М. ЛЕВЧУК
Сибирский федеральный университет
e-mail: vlevchuk@sfu-kras.ru

Ю. Ю. УШАКОВ
Сибирский федеральный университет
e-mail: yuron@akadem.ru

УДК 512.552

Ключевые слова: дикий автоморфизм, свободная ассоциативная алгебра, алгебра многочленов, монический автоморфизм.

Аннотация

Многочлены без свободных членов образуют идеал R как в алгебре B_n многочленов от n переменных над полем F, так и в свободной ассоциативной алгебре A_n ранга n над F — алгебре многочленов от некоммутирующих переменных. Известные понятия диких автоморфизмов алгебр A_n и B_n переносятся на R; их изучение в статье сводится к моническим автоморфизмам алгебры R, т. е. автоморфизмам, тождественным на всех факторах R^k/R^{k+1}. В частности, это позволяет исследовать детальнее свойства известных автоморфизмов Аника и Нагаты. При $n = 3$ исследуется гипотеза: верно ли, что при любом $k > 1$ автоморфизм Аника действует по модулю R^k как ручной автоморфизм?

Abstract

C. K. Gupta, V. M. Levchuk, Yu. Yu. Ushakov, On tame and wild automorphisms of algebras, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 79—88.

Let B_n be a polynomial algebra of n variables over a field F. Considering a free associative algebra A_n of rank n over F as a polynomial algebra of noncommuting variables, we choose the ideal R of all polynomials with a zero absolute term in B_n and A_n. The well-known concept of wild automorphisms of the algebras A_n and B_n is transferred to R; the study of wild automorphisms is reduced to monic automorphisms of the algebra R, i.e., those identical on each factor R^k/R^{k+1}. In particular, this enables us to study the properties of the known Nagata and Anik automorphisms in detail. For $n = 3$ we investigate the hypothesis that the Anik automorphism is tame modulo R^k for every given integer $k > 1$.

*Второй и третий авторы поддержаны Российским фондом фундаментальных исследований (проект № 12-01-00968-а).

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 79—88.

Введение

Традиционно для различных алгебраических систем естественно выделяют «стандартные» автоморфизмы и изучают вопросы существования и описания нестандартных автоморфизмов. Это иллюстрируют известные исследования автоморфизмов классических линейных групп, алгебр и групп Шевалле [1, 3, 19], свободных и относительно свободных нильпотентных алгебр Ли над полями нулевой характеристики [13, 15], а в связи с [4, вопрос 3.3] — свободной ассоциативной алгебры A_n (с единицей) ранга n над полем.

Для алгебры A_n естественно определяются элементарные автоморфизмы; порождённые ими автоморфизмы называют *ручными*, а остальные автоморфизмы — *дикими*. Трудным оказывается даже вопрос, когда группа $\mathrm{Aut}\, A_n$ совпадает с подгруппой всех ручных автоморфизмов A_n. Как правило, исследования используют метод свободных дифференцирований Фокса и матрицы Якоби [5, 17]. Критерии обратимости эндоморфизма алгебры A_n исследовались в [8, 14, 21]. С другой стороны, П. М. Кон [13] доказал, что ручными являются все автоморфизмы свободной алгебры Ли над полем характеристики 0 с m свободными порождающими.

Проблему нахождения минимального порождающего множества группы автоморфизмов относительно свободной нильпотентной ступени $c \geqslant 2$ алгебры Ли с $m \geqslant c$ свободными порождающими над полем характеристики 0 исследовали В. Дренский и Ч. К. Гупта [15] (см. также [2]).

Ещё к началу 1970-х годов А. Г. Чернякевич доказала [11], что все автоморфизмы алгебры A_2 ручные; (см. также случай основного поля комплексных чисел [7]). В эти же годы для алгебр A_n ($n \geqslant 3$) выявился первый «подозрительный» автоморфизм, называемый в [12] *автоморфизмом Аника*. Лишь в начале 2000-х годов И. П. Шестаков и У. У. Умирбаев доказали, что он дикий, когда $n = 3$ и основное поле F характеристики 0 (см. [9, 22]); его естественные продолжения на алгебры A_n ранга $n > 3$ оказались ручными [23].

В статье мы исследуем новый подход к изучению автоморфизмов алгебры A_n, рассматривая её как алгебру многочленов $F\langle x_1, x_2, \ldots, x_n\rangle$ от некоммутативных переменных; алгебру многочленов $F[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ от тех же, но коммутирующих переменных обозначают через B_n. Многочлены с нулевым свободным членом образуют идеал, обозначаемый через R. Ограничения на R автоморфизмов Аника и Нагаты [20] при $n = 3$ дают дикие автоморфизмы; они являются моническими автоморфизмами (см. раздел 2.

Переход к R позволяет исследовать детальнее свойства автоморфизмов Аника и Нагаты. В разделе 2 подробнее рассматривается автоморфизм Аника. Ясно, что степени R^k ($k > 1$) являются характеристическими идеалами в R. В терминах элементарных автоморфизмов (по аналогии с алгеброй A_n) определяются ручные и дикие автоморфизмы идеала R, его степеней и фактор-алгебр R/R^k.

Лемма 1 сводит вопрос 3.3 из [4] к аналогичному вопросу для R и показывает, что все автоморфизмы алгебры R ручные по модулю R^2. При условии квадратичной замкнутости основного поля теорема 1 разделяет ручные и дикие автоморфизмы фактор-алгебры R/R^4.

Высказанная гипотеза о том, что дикий автоморфизм Аника совпадает с ручным автоморфизмом по модулю R^k для любого наперёд заданного натурального числа $k > 1$, подтверждается для $k \leqslant 17$ (предложение 1).

1. Редукция вопроса о диких автоморфизмах

Пусть A_n — свободная ассоциативная алгебра над полем F со свободными порождающими $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Любой её эндоморфизм характеризуется действием на свободных порождающих. Если эндоморфизм φ переводит x_i в $f_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при всех i, то пишем $\varphi = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$. Автоморфизмы вида

$$(x_1, \ldots, x_{s-1}, \alpha x_s + f(x_1, \ldots, x_{s-1}, x_{s+1}, \ldots, x_n), x_{s+1}, \ldots, x_n) \qquad (1)$$

для фиксированных (произвольно) $\alpha \in F \setminus \{0\}$ и $1 \leqslant s \leqslant n$ называют элементарными. Все элементарные автоморфизмы порождают в $\operatorname{Aut} A_n$ подгруппу, обозначаемую через $\operatorname{TAut} A_n$; все её элементы называют *ручными автоморфизмами*. Остальные автоморфизмы называют дикими.

Оказывается, изучение группы автоморфизмов $\operatorname{Aut} A_n$ сводится к изучению $\operatorname{Aut} R$. Заметим, что каждый автоморфизм φ алгебры A_n однозначно определяет константы $c_i \in F$, такие что

$$\varphi(x_i) = c_i \mod R, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

С другой стороны, константы $c_i \in F$ определяют автоморфизм

$$(x_1 - c_1, x_2 - c_2, \ldots, x_n - c_n),$$

его назовём *автоморфизмом-сдвигом* алгебры A_n. Умножая на него φ, получаем автоморфизм, индуцирующий автоморфизм $\bar{\varphi}$ идеала R. Следующая лемма, получаемая стандартными средствами, сводит вопрос 3.3 к аналогичному вопросу для R.

Лемма 1. *Автоморфизм φ алгебры A_n является диким тогда и только тогда, когда диким является автоморфизм $\bar{\varphi}$ идеала R. Автоморфизм φ с точностью до умножения на ручной автоморфизм действует тождественно по модулю R^2. Автоморфизм идеала R дикий, если он индуцирует дикий автоморфизм какой-либо фактор-алгебры R/R^k $(k > 1)$. Кроме того,*

$$\overline{\operatorname{Aut} A_n} = \operatorname{Aut} R, \quad \bigcap_{k=1}^{\infty} R^k = 0.$$

Доказательство. Первое утверждение следует из замечания перед теоремой. Любой автоморфизм φ алгебры A_n умножением на однозначно определённый ручной автоморфизм-сдвиг переводится в автоморфизм, индуцирующий автоморфизм $\bar{\varphi}$ идеала R. Поскольку алгебру A_n порождают идеал R и единица, то любой автоморфизм идеала R однозначно продолжается до автоморфизма всей алгебры A_n. Ясно, что пересечение степеней идеала R нулевое.

Алгебра R/R^2 как линейное пространство имеет базис $x_1, x_2, \ldots, x_n$, следовательно, все её автоморфизмы представляют собой невырожденные линейные преобразования: $\operatorname{Aut} R/R^2 \simeq \mathrm{GL}_n(F)$. Любая матрица раскладывается в произведение элементарных и диагональных матриц, которые при этом изоморфизме соответствуют элементарным автоморфизмам. Любой автоморфизм алгебры A_n домножением на сдвиг переводится в автоморфизм, сохраняющий идеал R, а тот в свою очередь домножением на линейные автоморфизмы переводится в автоморфизм, действующий тождественно по модулю R^2. Отсюда получаем, что

$$\operatorname{TAut} R/R^2 = \operatorname{Aut} R/R^2 \simeq \mathrm{GL}_n(F)$$

(см. также [18, предложение 1])

Как следует из определений, элементарные автоморфизмы алгебры R/R^k индуцируются элементарными автоморфизмами идеала R. Следовательно, каждый ручной автоморфизм алгебры R/R^k индуцируется ручным автоморфизмом идеала R и, наоборот, автоморфизм идеала R, индуцирующий дикий автоморфизм идеала R/R^k, сам является диким. $\square$

Доказанная лемма сводит изучение вопроса о диких автоморфизмах алгебры A_n к изучению аналогичных вопросов для алгебр R и R/R^k и показывает, что фактор-алгебра R/R^2 не имеет диких автоморфизмов.

Исследуем подробнее автоморфизмы свободных нильпотентных алгебр R/R^k при $k = 3, 4$. Выделим эндоморфизмы алгебры R вида

$$\begin{aligned}
\Bigg(& x_1 + \sum_{i,j=2}^{n} (\alpha_{ij} x_1 x_i x_j + \beta_{ij} x_i x_1 x_j + \gamma_{ij} x_i x_j x_1), \\
& x_2 + \sum_{i=3}^{n} (\alpha_i x_1 x_2 x_i + \alpha_i' x_2 x_1 x_i + \beta_i x_1 x_i x_2 + \beta_i' x_2 x_i x_1 + \gamma_i x_i x_1 x_2 + \gamma_i' x_i x_2 x_1) \\
& + \delta_1 x_1^2 x_2 + \delta_2 x_1 x_2 x_1 + \delta_3 x_2 x_1^2, \\
& x_3 + \alpha x_1 x_2 x_3 + \alpha' x_1 x_3 x_2 + \beta x_2 x_1 x_3 + \beta' x_2 x_3 x_1 + \gamma x_3 x_1 x_2 + \gamma' x_3 x_2 x_1, \\
& x_4, \ldots, x_n \Bigg),
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\left(x_1 + \sum_{i=2}^{n} (\alpha_i x_1 x_i + \beta_i x_i x_1), x_2 + \alpha x_2 x_1 + \beta x_1 x_2, x_3, \ldots, x_n \right) \tag{3}$$

для произвольных констант

$$\alpha_{ij},\ \alpha_i,\ \alpha_i',\ \beta_{ij},\ \beta_i,\ \beta_i',\ \gamma_{ij},\ \gamma_i,\ \gamma_i',\ \delta_i,\ \alpha,\ \alpha',\ \beta,\ \beta',\ \gamma,\ \gamma' \in F. \tag{4}$$

Теорема 1. *Всякий автоморфизм алгебры R с точностью до умножения на ручной автоморфизм совпадает по модулю R^3 с эндоморфизмом вида* (3). *Когда* *из любого элемента поля F извлекается квадратный корень, всякий автоморфизм φ алгебры R, тождественный по модулю R^3, с точностью до умножения на ручной автоморфизм совпадает по модулю R^4 с эндоморфизмом вида* (2).

Для доказательства потребуются некоторые замечания и лемма.

Пусть G_s при $1 < s < k$ есть подгруппа в $\mathrm{Aut}(R/R^k)$ автоморфизмов, тождественных по модулю R^s/R^k. Каждый фактор G_s/G_{s+1} есть коммутативная группа. Это позволяет определить на факторах операцию сложения как индуцированную умножением. Как и в [18], когда в F возможно извлечение корней степени $s-1$, для любого $a \in F$ определим на G_s преобразование λ_a, индуцирующее операцию умножения на константу на факторе G_s/G_{s+1}. В этом случае множество G_s/G_{s+1} относительно введённых операций является векторным пространством. Обозначая его через V_s, получаем индуцированное отображение $\pi_s\colon G_s \to V_s$. Множество $\pi_s(\mathrm{TAut}(R/R^k) \cap G_s)$ образует в V_s подпространство, которое обозначаем через TV_s.

Выберем подмножества Ω_s в G_s, и пусть $\Omega = \bigcup\limits_{i=2}^{k-1} \Omega_s$. Далее используем введённый в [18] (подробнее см. [10]) алгоритм преобразования любого автоморфизма φ алгебры R/R^k; его назовём *k-Ω-алгоритмом*. Алгоритм умножает φ на ручные автоморфизмы $\lambda_a(\omega)$, $a \in F$, $\omega \in \Omega$ и либо приводит φ к тождественному автоморфизму, либо останавливается. При этом k-Ω-алгоритм приводит любой ручной автоморфизм к тождественному, если $\pi_s(\Omega_s)$ — база в TV_s для всех s.

В следующей лемме, используемой для построения баз подпространств TV_s, через Ω обозначаем подмножество в $\mathrm{TAut}(R/R^k)$, содержащее элементарные автоморфизмы $(x_1 + m, x_2, \ldots, x_n)$ для всевозможных мономов m с коэффициентом 1 степени не выше k от переменных $x_2, \ldots, x_n$, причём автоморфизмы $t^{-1}\varphi t$, $\lambda_r(\varphi) \cdot \varphi$ и $[\lambda_r(\varphi), \psi]$ редуцируются k-Ω-алгоритмом до тождественных для любых $\varphi, \psi \in \Omega$ и элементарного автоморфизма $t = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i + rx_j, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ с $r \in F$.

Лемма 2. *Если корни степеней $s = 2, 3, \ldots, k-2$ извлекаются из любого элемента основного поля F, то всякий ручной автоморфизм алгебры R/R^k редуцируется k-Ω-алгоритмом к тождественному автоморфизму.*

Доказательство леммы приводится в [10, лемма 1.1.1]. □

Доказательство теоремы 1. Выберем следующие ручные автоморфизмы алгебры R/R^4:

$$t_1 = (x_1, x_2 + x_1, x_3, \ldots, x_n), \quad t_2 = (x_3, x_2 + x_3, x_1 + x_3, x_4, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_1 = (x_1 + x_2^2, x_2, \ldots, x_n), \quad \varphi_2 = (x_1 + x_2x_3, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_3 = (x_1 - x_1x_3 + x_2x_3, x_2 + x_2x_3 - x_1x_3, x_3, \ldots, x_n) = t_1^{-1}\varphi_2 t_1,$$
$$\tilde{\varphi}_3 = (x_1 - x_3x_1 + x_3x_2, x_2 + x_3x_2 - x_3x_1, x_3, \ldots, x_n),$$
$$\varphi_4 = (x_1 - x_2x_1 - x_2x_3 - x_3x_1 - x_3^2, x_2 - x_2x_1 - x_2x_3 - x_3x_1 - x_3^2,$$
$$x_3 + x_2x_1 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_3^2, x_4, \ldots, x_n) = t_2^{-1}\varphi_2 t_2.$$

Множество Ω_2 составляем из автоморфизмов, сопряжённых с φ_i или $\tilde{\varphi}_3$ перестановкой переменных:

— $n(n-1)$ автоморфизмов, сопряжённых с φ_1;
— $n(n-1)(n-2)$ автоморфизмов, сопряжённых с φ_2;
— $2n(n-2)$ автоморфизмов, сопряжённых с φ_3 или с $\tilde{\varphi}_3$;
— n автоморфизмов, сопряжённых с φ_4.

Так, $n(n-2)$ автоморфизмов φ, сопряжённых с φ_3, получаем по правилу

$$\varphi(x_k) = x_k - x_kx_i - x_jx_i, \quad \varphi(x_j) = x_j + x_kx_i + x_jx_i, \quad \varphi(x_l) = x_l \ \ (l \neq k, j),$$

где $1 \leqslant i \leqslant n$, $k = 1$ при $i > 1$ и $k = 2$ при $i = 1$, $1 \leqslant j \leqslant n$, $j \neq i, k$. Все n автоморфизмов φ, сопряжённых с φ_4, получаем перестановками x_1 и x_i.

Все выбранные n^3-3n автоморфизмов индуцируют в пространстве V_2 линейно независимое множество. В самом деле, мономы x_i^2 содержатся в i-х компонентах только сопряжённых с φ_4 автоморфизмов. Мономы x_ix_j содержатся в k-х компонентах $(k \neq i, j)$ только сопряжённых с φ_1, φ_2 автоморфизмов. Наконец, мономы x_ix_j, $j \neq i$, содержатся в i-х компонентах автоморфизмов, сопряжённых с φ_3. Нетрудно показать, что любой автоморфизм, сопряжённый с φ_3 или φ_4 с помощью произвольной подстановки переменных, совпадает по модулю G_3 с произведением перечисленных автоморфизмов.

Для построения множества Ω_3 полагаем

$$\sigma_1 = (x_1 + x_2x_2x_2, x_2, \ldots, x_n), \quad \sigma_2 = (x_1 + x_2x_3x_3, x_2, \ldots, x_n),$$
$$\sigma_3 = (x_1 + x_2x_3x_4, x_2, \ldots, x_n), \quad t_3 = (x_1, x_2 + x_1, x_3 + x_1, x_4 + x_1, \ldots, x_n),$$
$$\sigma_4 = t_1^{-1}\sigma_2t_1, \quad \sigma_5 = t_1^{-1}\sigma_3t_1, \quad \sigma_6 = t_2^{-1}\sigma_3t_2, \quad \sigma_7 = t_3^{-1}\sigma_3t_3.$$

Заменой в σ_i мономов $x_ix_jx_k$ на $x_kx_ix_j$ и на $x_jx_kx_i$ получаем автоморфизмы σ_i' и σ_i''. В частности,

$$\sigma_2' = (x_1 + x_3x_2x_3, x_2, \ldots, x_n), \quad \sigma_2'' = (x_1 + x_3x_3x_2, x_2, \ldots, x_n).$$

Множество Ω_3 при $n > 3$ составляют автоморфизмы, сопряжённые (как и выше) с σ_i, σ_i' или σ_i'' перестановкой второго порядка на переменных:

— $n(n-1)^3$ автоморфизмов, сопряжённых с σ_1, σ_2, σ_2', σ_2'', σ_3;
— $3n(n-2)$ автоморфизмов, сопряжённых с σ_4, σ_4', σ_4'';
— $3n(n-1)(n-3)$ автоморфизмов, сопряжённых с σ_5, σ_5', σ_5'';
— $3n(n-1)$ автоморфизмов, сопряжённых с σ_6, σ_6', σ_6'';
— n автоморфизмов, сопряжённых с σ_7.

Автоморфизмы, сопряжённые подстановкой τ с σ_5, определяются индексами i, j, k, l по формуле $\tau^{-1}\sigma_5\tau$ для $x_i = \tau(x_1)$, $x_j = \tau(x_2)$, $x_k = \tau(x_3)$, $x_l = \tau(x_4)$ (остальные переменные остаются на месте). Здесь $1 \leqslant i, j \leqslant n$, $k \neq i$ — минимальное число из множества $\{1, 2, 3\}$ и $1 \leqslant l \leqslant n$, $l \neq i, j, k$.

Автоморфизмы, сопряжённые с σ_6, определяются двумя индексами $1 \leqslant i \neq \neq j \leqslant n$ по формуле $\tau^{-1}\sigma_6\tau$ для $\tau(x_3) = x_i$, $\tau(x_4) = x_j$ (остальные элементы остаются на месте). Автоморфизмы, отличные от σ_7, сопряжённые с σ_7, определяются формулой $\tau^{-1}\sigma_7\tau$ для циклической подстановки $\tau = (x_1, x_i)$, $1 < i \leqslant n$.

При $n = 3$ множество Ω_3 состоит из 54 элементов. По определению его составляют

1) 9 элементов, сопряжённых подстановкой переменных с σ_4, σ_4', σ_4'';
2) 24 автоморфизма, сопряжённых подстановками с σ_1, σ_2, σ_2', σ_2'';
3) по 3 элемента, сопряжённых подстановками с автоморфизмами

$$\sigma_8 = (x_1, x_2 - x_1, x_3)(x_1 + x_2x_2x_3, x_2, x_3)(x_1, x_2 + x_1, x_3), \quad \sigma_8', \quad \sigma_8'';$$

4) любые 12 автоморфизмов вида $[\omega_1, \omega_2]$, где $\omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$, ω_1 сопряжён с φ_1 и ω_2 сопряжён с φ_3 или φ_4, выбираемые так, чтобы множество $\pi_3(\Omega_3)$ было линейно независимым.

Аналогично случаю Ω_2, нетрудно показать, что в V_3 автоморфизмы из Ω_3 индуцируют линейно независимое подмножество, а автоморфизмы, сопряжённые с помощью произвольной подстановки переменных с

$$\sigma_1,\ \sigma_2,\ \sigma_2',\ \sigma_2'',\ \sigma_3,\ \sigma_4,\ \sigma_4',\ \sigma_4'',\ \sigma_5,\ \sigma_5',\ \sigma_5'',\ \sigma_6,\ \sigma_6',\ \sigma_6'',\ \sigma_7,$$

совпадают с произведением автоморфизмов из Ω_3.

Оказывается, доказательство того, что $\pi_2(\Omega_2)$ — это база в TV_2 и $\pi_3(\Omega_3)$ — база в TV_3, сводится к проверке условия леммы 2 при $n \leqslant 8$. В самом деле, каждый из выбранных выше автоморфизмов вместе со своим обратным автоморфизмом действуют нетождественно не более чем на четырёх элементах. Поэтому автоморфизмы $t^{-1}\varphi t$, $\lambda_r(\varphi) \cdot \varphi$ и $[\lambda_r(\varphi), \psi]$ из леммы 1 могут быть преобразованы с помощью сопряжения подстановкой так, чтобы они действовали только на переменных x_i, $1 \leqslant i \leqslant 8$.

Пусть $n \leqslant 8$. Коэффициенты c_i при мономах второй и третьей степени названных автоморфизмов из леммы 2 являются многочленами от параметра r с целыми коэффициентами. Это позволяет осуществить проверку условий леммы 2 с помощью системы компьютерной алгебры.

По лемме 1 каждый автоморфизм алгебры R редуцируется к автоморфизму φ, тождественному по модулю R^2. Умножением на подходящие автоморфизмы, сопряжённые подстановкой переменных с $\lambda_a(\varphi_4)$ $(a \in F)$, в автоморфизме φ удаётся исключить мономы x_i^2, входящие в i-е компоненты автоморфизма. Умножением на автоморфизмы, сопряжённые подстановкой с $\lambda_a(\varphi_3)$, мономы x_ix_j в i-х компонентах автоморфизма переводятся в аналогичные мономы в первой и второй компоненте автоморфизма. Таким образом приходим к автоморфизму, действующему по модулю R^3 так же, как эндоморфизм вида (3). Аналогично автоморфизм, тождественный по модулю R^3, редуцируется к автоморфизму, действующему по модулю R^4 как эндоморфизм вида (2). Теорема доказана. □

Следствие 1. *Эндоморфизмы* (3) *и* (2) *индуцируют дикие автоморфизмы свободных нильпотентных алгебр* R/R^3 *и* R/R^4 *соответственно, если хотя бы одна из входящих в них констант* (4) *не равна нулю.*

Доказательство. Пусть W_2 и W_3 — подпространства в V_2 и в W_3, натянутые на образы под действием π_2 и π_3 всех эндоморфизмов (3) и (2) соответственно при всех возможных значениях констант. Из теоремы 1 следует, что пространства V_2 и V_3 разложимы в прямые суммы:

$$V_2 = W_2 \oplus TV_2, \quad V_3 = W_3 \oplus TV_3.$$

Тем самым доказательство следствия завершено. □

2. Автоморфизмы Аника и Нагаты, монические автоморфизмы

Отметим, что также хорошо известен вопрос о диких автоморфизмах алгебры B_n многочленов над полем F от коммутирующих переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$; её ручные автоморфизмы определяют по аналогии с алгеброй A_n.

М. Нагата [20] выявил для алгебры B_3 подозрительный автоморфизм

$$\sigma = (x + (x^2 - yz)z,\, y + 2(x^2 - yz)x + (x^2 - yz)^2 z, z).$$

Автоморфизмом Аника алгебры A_3 называют [12] её автоморфизм

$$\delta = (x + z(xz - zy), y + (xz - zy)z, z).$$

Лишь в начале 2000-х годов было окончательно доказано, что автоморфизмы Нагаты и Аника являются дикими [9, 22].

Заметим, что эти автоморфизмы могут естественным образом рассматриваться как автоморфизмы алгебр A_n и B_n соответственно при $n \geqslant 3$. Однако при добавлении новых переменных x_j ($j > 3$) автоморфизмы Нагаты и Аника (с тривиальным действием $\delta(x_j) = x_j$ и $\sigma(x_j) = x_j$) становятся ручными [23]. Поэтому они являются стабильно ручными в терминологии [23].

Идеал R в алгебрах A_n и B_n инвариантен относительно автоморфизмов Аника и Нагаты соответственно. Это позволяет сохранять для их ограничений на R обозначения и термины. Переход к R позволяет более детально исследовать некоторые свойства автоморфизмов Аника и Нагаты; при $n = 3$ они являются дикими автоморфизмами алгебры R по лемме 1 и [9, 22].

Автоморфизмы Аника и Нагаты идеала R являются моническими автоморфизмами в смысле определения Р. Дюбиша и С. Перлиса [16]: автоморфизм (аналогично эндоморфизм) ассоциативного кольца или алгебры A называется *моническим*, если он индуцирует тождественное отображение на каждом факторе A^m/A^{m+1}. Такие автоморфизмы наряду со стандартными они использовали при описании автоморфизмов нильпотентной алгебры $\mathrm{NT}(n, F)$ всех $(n \times n)$-матриц над полем F с нулями на главной диагонали и над ней. Это понятие естественно переносится с помощью факторов нижнего центрального ряда на кольца Ли и группы и применялось, в частности, к присоединённой группе кольца $\mathrm{NT}(n, F)$ (она изоморфна унитреугольной группе $\mathrm{UT}(n, F)$) и к его ассоциированному кольцу Ли.

Автоморфизм алгебры Ли или группы A называется *гиперцентральным высоты* m, если он действует тождественного по модулю m-го гиперцентра $\mathcal{Z}_m(A) \neq A$, а по модулю $(m-1)$-го гиперцентра не является даже внутренним. В [6] показано, что если A — унипотентная подгруппа группы Шевалле, то гиперцентральные автоморфизмы небольших высот, в сущности, исчерпывают основные нестандартные автоморфизмы A; они порождают всю группу автоморфизмов вместе со стандартными автоморфизмами. Аналогичное описание автоморфизмов допускает ниль-подалгебра алгебры Шевалле.

Для автоморфизма Аника авторы исследуют следующую гипотезу: для любого $k > 1$ автоморфизм Аника идеала R алгебры A_3 совпадает с ручным автоморфизмом по модулю R^k.

Частичное подтверждение гипотезы даёт следующее утверждение.

Предложение 1. *Автоморфизм Аника с точностью до умножения на ручной автоморфизм действует в R тождественно по модулю R^{17}.*

Доказательство. Следующие автоморфизмы δ_k, $k = 5, 7, \ldots, 17$,

$$
\begin{aligned}
&\delta_3 = \delta,\\
&\delta_5 = \delta_3 t_2^{-1}(x - zyz, y, z) t_2 (x + zyz + z^2 y, y, z)(x, y - xz^2 - zxz, z),\\
&\delta_7 = \delta_5 t_2^{-1}(x + z^2 yz^2 + z^3 yz, y, z) t_2 (x, y + zxz^3 + 2z^2 xz^2 + z^3 xz, z),\\
&\delta_9 = \delta_7 t_2^{-1}(x - z^2 yz^4 - 2z^3 yz^3 - z^4 yz^2, y, z) t_2,\\
&\delta_{11} = \delta_9 t_2^{-1}(x - z^3 yz^5 - 3z^4 yz^4 - 3z^5 yz^3 - z^6 yz^2, y, z) t_2 \times\\
&\quad \times (x - z^3 yz^5 + 3z^4 yz^4 + 3z^5 yz^3 + z^6 yz^2, y, z) \times\\
&\quad \times (x, y - z^2 xz^6 - 3z^3 xz^5 - 3z^4 xz^4 - z^5 xz^3, z),\\
&\delta_{13} = \delta_{11}(x - z^4 yz^6 - 4z^5 yz^5 - 6z^6 yz^4 - 4z^7 yz^3 - z^8 yz^2, y, z) \times\\
&\quad \times (x, y + z^3 xz^7 + 4z^4 xz^6 + 6z^5 xz^5 + 4z^6 xz^4 + z^7 xz^3), z),\\
&\delta_{15} = \delta_{13} t_2^{-1}(x + z^4 yz^8 + 4z^5 yz^7 + 6z^6 yz^6 + 4z^7 yz^5 + z^8 yz^4, y, z) t_2 \times\\
&\quad \times (x, y + z^4 xz^8 + 5z^5 xz^7 + 10z^6 xz^6 + 10z^7 x^5 + 5z^8 xz^4 + z^9 xz^3, z),\\
&\delta_{17} = \delta_{15} t_2^{-1}(x - z^6 yz^8 - 5z^7 yz^7 - 10z^8 yz^6 - 10z^9 yz^5 -\\
&\quad - 5z^{10} yz^4 - z^1 1 yz^3, y, z) t_2 (x, y + z^4 xz^{10} + 5z^5 xz^9 +\\
&\quad + 9z^6 xz^8 + 5z^7 xz^7 + 5z^8 xz^6 + 9z^9 xz^5 + 5z^{10} xz^4 + z^{11} xz^3, z),
\end{aligned}
$$

действующие тождественно по модулю R^k, очевидно, получаются из δ умножением на ручной автоморфизм. □

Литература

[1] Автоморфизмы классических групп: Сб. переводов / Под ред. Ю. И. Мерзлякова. — М.: Мир, 1976.

[2] Артамонов В. А. Нильпотентность, проективность, свобода // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1971. — № 5. — С. 50—53.

[3] Бунина Е. И. Автоморфизмы групп Шевалле некоторых типов над локальными кольцами // Успехи мат. наук. — 2007. — Т. 62, № 5. — С. 143—144.

[4] Коуровская тетрадь (нерешённые задачи теории групп). — Новосибирск: НГУ, 2010.

[5] Кроуэл Р., Фокс Р. Теория узлов. — М.: Мир, 1967.

[6] Левчук В. М. Автоморфизмы унипотентных подгрупп групп Шевалле // Алгебра и логика. — 1990. — Т. 29, № 2. — С. 141—161; 1990. — Т. 29, № 3. — С. 315—338.

[7] Макар-Лиманов Л. Г. Об автоморфизмах свободной алгебры с двумя образующими // Функц. анализ и его прил. — 1970. — Т. 4, № 3. — Р. 107—108.

[8] Романьков В. А. Теорема об обратной функции для свободных ассоциативных алгебр // Сиб. мат. журн. — 2004. — Т. 45, № 5. — С. 1178—1183.

[9] Умирбаев У. У. Определяющие соотношения группы ручных автоморфизмов алгебры многочленов и дикие автоморфизмы свободных ассоциативных алгебр // Докл. РАН. — 2006. — Т. 407, № 3. — С. 319—324.

[10] Ушаков Ю. Ю. Автоморфизмы свободных алгебр и функции на группах лиева типа ранга 1: Дис.. . . канд. физ.-мат. наук. — Красноярск, 2013.

[11] Chernyakiewicz A. G. Automorphisms of a free associative algebra of rank 2 // Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — Vol. 160. — P. 393—401; 1972. — Vol. 171. — P. 309—315.

[12] Cohn P. M. Free Rings and Their Relations. — London: Academic Press, 1985.

[13] Cohn P. M. Subalgebras of free associative algebras // Proc. London Math. Soc. — 1964. — Vol. 3, no. 14. — P. 618—632.

[14] Dicks W., Lewin J. A Jacobian conjecture for free associative algebras // Commun. Algebra. — 1982. — Vol. 10, no. 12. — P. 1285—1306.

[15] Drensky V., Gupta Ch. K. Automorphisms of free nilpotent Lie algebras // Can. J. Math. — 1990. — Vol. 42, no. 2. — P. 259—279.

[16] Dubish R., Perlis S. On total nilpotent algebras // Am. J. Math. — 1951. — Vol. 73, no. 3. — P. 439—452.

[17] Gupta N. Free Group Rings. — Providence: Amer. Math. Soc. — (Contemp. Math.; Vol. 66).

[18] Gupta C. K., Levchuk V. M., Ushakov Yu. Yu. Hypercentral and monic automorphisms of classical algebras, rings and groups // J. SFU. Maths & Phys. — 2008. — Vol. 4, no. 1. — P. 380—390.

[19] Hahn A. J., James D. G., Weisfeiler B. Homomorphisms of algebraic and classical groups: a survey // Can. Math. Soc. Conf. Proc. — 1984. — Vol. 4. — P. 249—296.

[20] Nagata M. On automorphism group of $k[x,y]$ // Lectures in Mathematics. No. 5. — Tokyo: Dept. of Maths of Kyoto Univ., 1972.

[21] Schofield A. H. Representation of Rings over Skew Fields. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1985. — (London Math. Soc. Lect. Note Ser.).

[22] Shestakov I. P., Umirbaev U. U. The Nagata automorphism is wild // Proc. Nat. Acad. Sci. USA. — 2003. — Vol. 100, no. 22. — P. 12561—12563.

[23] Smith M. K. Stably tame automorphisms // J. Pure Appl. Algebra. — 1989. — Vol. 58. — P. 209—212.