

# Инварианты гомотопических классов кривых и графов на двумерных поверхностях

**В. О. МАНТУРОВ**

*Российский университет дружбы народов*  
e-mail: vomanturov@yandex.ru

**Д. А. ФЕДОСЕЕВ**

*Московский государственный университет  
им. М. В. Ломоносова*  
e-mail: denfedex@yandex.ru

УДК 515.162+512.54

**Ключевые слова:** виртуальный узел, гомотопический класс кривой,  $\Theta$ -граф.

## Аннотация

Исследуются алгебраические конструкции, возникающие в связи с изучением кривых на поверхностях и родственных объектов. Доказывается инвариантность построенных групп относительно некоторого класса гомотопий кривых и графов.

## Abstract

*V. O. Manturov, D. A. Fedoseev, Invariants of homotopy classes of curves and graphs on 2-surfaces, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 89–105.*

Algebraic objects arising from the study of curves and graphs on 2-surfaces are studied. Their homotopy invariance is verified.

## 1. Введение

Конечно представленные группы часто выступают в роли инвариантов объектов из маломерной топологии: узлов, а также их обобщений и модификаций — виртуальных узлов, узлов в трёхмерных многообразиях и т. д. Существенным упрощением понятия виртуального узла является понятие плоского узла. Плоский узел представляет собой класс эквивалентности гомотопических классов кривых с точностью до преобразования, называемого стабилизацией. Этот объект, будучи важным источником для построения инвариантов виртуальных узлов, можно трактовать как с алгебраической, так и с топологической точек зрения. Гомотопический класс кривой на поверхности задаётся как класс сопряжённости фундаментальной группы поверхности. Такие объекты были давно классифицированы как алгебраически, так и топологически [5, 6], кроме того,

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 4, с. 89–105.

© 2013 *Центр новых информационных технологий МГУ,*  
*Издательский дом «Открытые системы»*

на них имеют место структуры биварианта Ли (Голдмана—Тураева [4, 7]) геометрической природы. Топологическое изучение таких объектов тесно связано с методами теории узлов: классы изотопии кривых представляют собой классы эквивалентности диаграмм по движениям Рейдемейстера, поэтому к изучению объектов, допускающих алгебраическое трактование, можно применять методы теории узлов. Возникает естественный вопрос, какие ещё группы можно изучать методами теории классических и виртуальных узлов и какие «геометрические структуры» возникают на этих группах.

В работе рассматриваются различные обобщения конструкции, изначально связанной с кривой на поверхности (теорема 1). А именно, формулируются и доказываются теоремы об инвариантных группах для кривой без структуры «источник-сток», для набора кривых на поверхности и для  $\Theta$ -графа. Последний случай особенно важен, поскольку позволяет установить связь между геометрическими преобразованиями и важнейшим преобразованием Титце в частном случае групп с двумя соотношениями.

В разделе 2 вводятся основные понятия, используемые в работе, и доказывается основная теорема 1, описывающая топологическую структуру группы, построенной по данной кривой на двумерной замкнутой ориентируемой поверхности без края и являющейся гомотопическим инвариантом этой кривой.

В разделе 3 рассматривается аналог теоремы 1 для случая, когда на поверхности имеется несколько кривых. Тем самым совершается шаг к изучению большего класса групп, нежели получаемых при помощи одной кривой.

Раздел 4 посвящён изучению групп, являющихся гомотопическим инвариантом кривых (и зацеплений, т. е. наборов кривых) на двумерных ориентируемых поверхностях с краем.

В разделе 5 рассматриваются аналогичные объекты, связанные не с кривой, но с  $\Theta$ -графом на двумерной поверхности.

Раздел 6 описывает связь построенных в первых разделах объектов с теорией узлов и демонстрирует, как методы теории узлов могут быть использованы для изучения групп. В частности, вводится понятие скобки, с помощью которой доказывается одна теорема минимальности для построенных групп.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 13-01-00830 а, гранта РФФИ № 12-01-31432 мол\_а, гранта Правительства РФ по договору № 11.G34.31.0054, гранта РФФИ № 13-01-00664а, гранта программы «Ведущие научные школы РФ» НШ 1410.2012.1, гранта Министерства образования и науки РФ № 14.740.11.0794.

Авторы благодарны И. М. Никонову, Д. П. Ильюто за полезные обсуждения и помощь.

## 2. Основные определения и конструкции

Рассмотрим двумерное связное замкнутое ориентируемое многообразие без края, иными словами, сферу с  $g$  ручками  $S_g$ . Рассмотрим окружность  $S^1$ , по-

гружённую в  $S_g$  со следующими условиями: все точки самопересечения образа двойные и трансверсальные и полученная кривая  $\gamma$  разбивает поверхность на клетки. Иначе можно сказать, что мы рассматриваем четырёхвалентный граф  $\Gamma$ , вложенный в  $S_g$ . Будем изучать такие кривые на фиксированной поверхности  $S_g$  с точностью до гомотопии.

Структура кривой  $\gamma$  может быть изображена при помощи так называемой *хордовой диаграммы*  $G(\gamma)$ . Хордовая диаграмма — это конечный трёхвалентный граф, состоящий из ориентированного цикла, проходящего через все вершины, (окружности диаграммы), и набора рёбер (хорд), которые могут быть ориентированными или нет. Хордовая диаграмма кривой строится следующим образом. Представим кривую  $\gamma$  в виде образа окружности  $S^1$  при отображении  $f$ , являющемся гомеоморфизмом везде, кроме конечного числа точек кривой  $\gamma$ , у которых в точности два прообраза на окружности. Возьмём прообраз кривой при этом отображении в качестве окружности хордовой диаграммы. Соединим хордами точки на окружности с совпадающими образами при отображении  $f$ , получим хордовую диаграмму кривой  $\gamma$  (рис. 1).



Рис. 1. Кривая и её хордовая диаграмма.  
Пунктиром обозначена половинка, отвечающая перекрёстку A

Введём также понятие *половинки* кривой  $\gamma$ . Рассмотрим хордовую диаграмму  $G(\gamma)$ . Половинкой кривой  $\gamma$ , соответствующей перекрёстку  $a$ , называется дуга окружности хордовой диаграммы между концами хорды, отвечающей перекрёстку  $a$ , а также часть  $\gamma$ , являющаяся образом этой дуги. Таким образом, каждый перекрёсток делит кривую  $\gamma$  на две половинки.

Четырёхвалентный граф  $\Gamma$  называется *оснащённым* (иначе говоря, графом с *крестовой структурой* или *A-структурой*), если задано разделение четырёх полурёбер, исходящих из каждой вершины на две пары противоположных полурёбер.

Поскольку все точки самопересечения кривой  $\gamma$  двойные и трансверсальные, соответствующий кривой  $\gamma$  граф  $\Gamma$  является оснащённым, причём отношение противоположности определяется исходя из расположения дуг кривой на поверхности. Будем говорить, что кривая  $\gamma$  допускает *структуру «источник-сток»*, если существует такая ориентация рёбер графа  $\Gamma$ , что в каждой

вершине некоторые два противоположных ребра являются исходящими, а два других — входящими.

## 2.1. Построение инвариантной группы

Рассмотрим кривую  $\gamma$  на поверхности  $S_g$  рода  $g$ , допускающую структуру «источник-сток». Расставим в вершинах соответствующего этой кривой графа  $\Gamma$  (иными словами, в перекрёстках кривой) различные буквы  $a_i$ . Обозначим их множество через  $\mathcal{L}$ . Для каждой связной компоненты, на которые кривая  $\gamma$  разбивает поверхность (многоугольника), запишем формальное соотношение  $a_1 \dots a_n = 1$ , где  $a_1, \dots, a_n$  — буквы, стоящие в вершинах этого многоугольника. Обозначим множество всех таких соотношений для данной кривой через  $\mathcal{R}_\gamma$ . Обозначим группу, заданную копредставлением  $\langle \mathcal{L} \mid \mathcal{R}_\gamma \rangle$  через  $G_\gamma$ . Группа, полученная таким образом, является гомотопическим инвариантом кривой  $\gamma$  в описанном выше классе. Эта группа имеет следующую топологическую структуру.

**Теорема 1 (И. М. Никонов).** Пусть  $\gamma$  — кривая на двумерной ориентируемой замкнутой поверхности  $S_g$ , допускающая структуру «источник-сток», причём дополнение к  $\gamma$  представляет собой объединение клеток. Тогда

$$G_\gamma \cong \pi_1(S_g) / \langle \gamma \rangle,$$

где  $\langle \gamma \rangle$  обозначает нормальное замыкание гомотопического класса кривой  $\gamma$ .

**Замечание 1.** Доказательство теоремы 1 было восстановлено авторами по рассказам её автора, И. М. Никонова. В этой работе мы приводим его целиком, так как основные идеи будут использованы нами при доказательстве различных обобщений этой теоремы.

**Доказательство.** Рассмотрим поверхность  $S_g$  и погружённую в неё кривую  $\gamma$ . Приклеим двумерный диск  $D$  к поверхности, отождествив его границу  $\partial D$  с кривой  $\gamma$ . Рассмотрим полученный комплекс  $\mathcal{S}$ . Его двумерными клетками являются клетки  $\Delta_i$ , на которые поверхность  $S_g$  разбивает кривая  $\gamma$ , а также диск  $D$ ; одномерными — дуги кривой  $\gamma$  от одного перекрёстка до другого. Комплекс  $\mathcal{S} = S_g \cup D$  является объединением двух комплексов: комплекса  $S_g$ , состоящего из поверхности  $S_g$ , разбиваемой кривой на клетки, и комплекса  $D$ , полученного из диска  $D$  отождествлением точек границы  $\partial D$ , соответствующих точкам самопересечения кривой  $\gamma$  при приклеивающем гомеоморфизме.

Комплекс  $D$  гомотопически эквивалентен букету  $\bigvee S^1$  из  $n$  окружностей, где  $n$  — число самопересечений кривой  $\gamma$ . Следовательно, его фундаментальная группа изоморфна свободной группе с  $n$  образующими, которые находятся во взаимно-однозначном соответствии с точками самопересечения кривой  $\gamma$ . Поставим в соответствие каждой точке самопересечения кривой  $\gamma$  (а значит, каждой хорде её хордовой диаграммы) одну из половинок этой кривой, начинающуюся и заканчивающуюся в этой точке. Эти половинки являются петлями на комплексе  $D$ . С точностью до гомотопии можно считать, что все они начинаются

в центре диска  $D$ . Таким образом, фундаментальная группа комплекса  $\mathcal{D}$  изоморфна свободной группе, порождённой половинками кривой  $\gamma$ , где для каждой точки самопересечения (перекрёстка) выбрана половинка. В выборе половинки имеется произвол, который будет ликвидирован следующим образом.

Перейдём к комплексу  $\mathcal{S}_g$ . Кривая  $\gamma$  разбивает поверхность  $S_g$  на связные компоненты  $\Delta_i$ , границами которых выступают многоугольники, рёбра которых — дуги кривой  $\gamma$  между перекрёстками. Всякий многоугольник является гомотопически тривиальной петлей на комплексе  $\mathcal{S}$ , а значит, задаёт соотношение в фундаментальной группе  $\pi_1(\mathcal{S})$ . Выбор половинки кривой для каждого перекрёстка равносильен ориентации соответствующей хорды хордовой диаграммы кривой  $\gamma$  (после ориентации хорд для каждого перекрёстка выбирается та половинка, для которой ориентация кривой согласована с выбранной ориентацией соответствующей хорды). Поскольку кривая  $\gamma$  допускает структуру «источник-сток», существует такая ориентация хорд, что в каждом многоугольнике все хорды ориентированы согласованным образом (иными словами, при обходе многоугольника согласно ориентации кривой все встреченные хорды направлены либо согласно, либо против ориентации кривой). Такой выбор ориентации хорд (а значит, и половинок кривой) ликвидирует произвол.

Для многоугольника  $\delta = \partial\Delta$  с вершинами  $a_j$  и рёбрами  $\alpha_j$  рассмотрим гомотопически эквивалентную ему петлю  $\tilde{\delta}$  с началом в центре диска  $D$ . Эта петля тривиальна на комплексе  $\mathcal{S}$ ,  $\alpha_1 \dots \alpha_k = 1$ . Сомножители в этом выражении — незамкнутые пути. Наша задача — получить эквивалентное условие на языке петель, а именно половинок кривой  $\gamma$ . Для каждой вершины  $a_j$  многоугольника  $\delta$  обозначим половинку кривой  $\gamma$ , выбранную для неё описанным выше способом, через  $a_j^\circ$ . Покажем, что условие  $\alpha_1 \dots \alpha_k = 1$  равносильно соотношению в фундаментальной группе  $a_1^\circ \dots a_k^\circ = 1$ . Поскольку кривая  $\gamma$  допускает структуру «источник-сток», все рёбра многоугольника  $\delta$  ориентированы согласованным образом (либо по, либо против ориентации кривой). Без ограничения общности будем считать, что ребро  $\alpha_j$ , соединяющее вершины  $a_j$  и  $a_{j+1}$ , ориентировано от вершины с номером  $j$  к вершине с номером  $j+1$  (для  $\alpha_k - a_k$  и  $a_1$ , рис. 2).

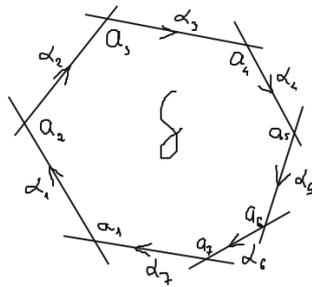


Рис. 2. Многоугольник  $\delta$  и обозначения его сторон и вершин

Без ограничения общности выберем в качестве начальной точки всех петель, которые мы будем строить, вершину  $a_1$ . Половинка  $a_j^\circ$  на комплексе  $\mathcal{S}$  гомотопически эквивалентна петле  $\alpha_1 \dots \alpha_{j-1} a_j^\circ \alpha_{j-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1}$ , поэтому

$$\begin{aligned} a_1^\circ \dots a_k^\circ &\sim a_1^\circ (\alpha_1 a_2^\circ \alpha_1^{-1}) (\alpha_1 \alpha_2 a_3^\circ \alpha_2^{-1} \alpha_1^{-1}) \dots (\alpha_1 \dots \alpha_{k-1} a_k^\circ \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1}) = \\ &= a_1^\circ \alpha_1 a_2^\circ \alpha_2 a_3^\circ \dots a_k^\circ \alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1}. \end{aligned}$$

Важно отметить, что по выбору ориентации образующих они будут входить в произведение в порядке возрастания индексов (в соответствии с возрастанием индексов у рёбер многоугольника). По условию  $\alpha_1 \dots \alpha_k = 1$  мы имеем  $\alpha_{k-1}^{-1} \dots \alpha_1^{-1} = \alpha_k$ , следовательно,

$$a_1^\circ \dots a_k^\circ \sim a_1^\circ \alpha_1 a_2^\circ \alpha_2 a_3^\circ \dots a_k^\circ \alpha_k = \gamma = 1$$

в  $\pi_1(\mathcal{S})$ . Применяя теорему ван Кампена для каждого многоугольника  $\delta_i$ , получаем, что каждый цикл, представленный в виде произведения образующих, эквивалентен многоугольнику, возможно умноженному на некоторую степень кривой  $\gamma$ . Следовательно, поскольку кривая  $\gamma$  тривиальна на комплексе  $\mathcal{S}$ , каждый многоугольник, образованный кривой  $\gamma$  на поверхности  $S_g$ , порождает соотношение  $a_1^\circ \dots a_k^\circ = 1$  в фундаментальной группе комплекса  $\mathcal{S}$ .

Таким образом, по теореме ван Кампена

$$\pi_1(\mathcal{S}) \cong \langle \mathcal{L} \mid \gamma \rangle = G_\gamma.$$

С другой стороны, по определению комплекса  $\mathcal{S}$  его фундаментальная группа изоморфна  $\pi_1(S_g)/\langle \gamma \rangle$ . Следовательно,  $G_\gamma \cong \pi_1(S_g)/\langle \gamma \rangle$ , что и требовалось доказать.  $\square$

## 2.2. Группа $G_\gamma$ и движения Рейдемейстера

Из теоремы 1 следует, что топологическая структура группы  $G_\gamma$  не меняется при гомотопиях кривой, т. е. копредставление группы  $G_\gamma$  — гомотопический инвариант кривой  $\gamma$ . Инвариантность группы может быть доказана и непосредственно, рассмотрением движений Рейдемейстера. Напомним, что *движениями Рейдемейстера* называются локальные трансформации кривой, изображённые на рис. 3, при этом полагается, что прочая часть кривой остаётся неизменной.

Доказательство инвариантности группы  $G_\gamma$  при движениях Рейдемейстера с точностью до изоморфизма заключается в рассмотрении каждого движения  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  и указании отвечающих им преобразований копредставления группы. А именно, движение  $\Omega_1$  отвечает добавлению образующей  $x$  и соотношения  $x = 1$  (соотношение  $A = 1$  преобразуется в соотношение  $Ax = 1$ , рис. 4) или удалению тривиальной образующей.

Движение  $\Omega_2$  отвечает добавлению двух образующих  $x, y$  и соотношения  $ab = 1$  (и соответствующей трансформации соотношений  $AB = 1, C = 1, D = 1$ , рис. 5) или удалению соответствующей пары образующих.

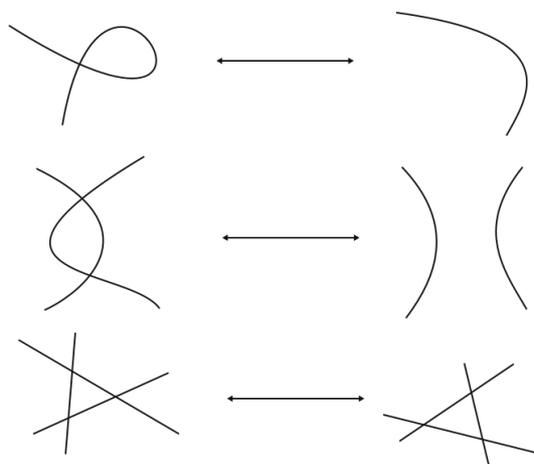


Рис. 3. Движения Рейдемейстера

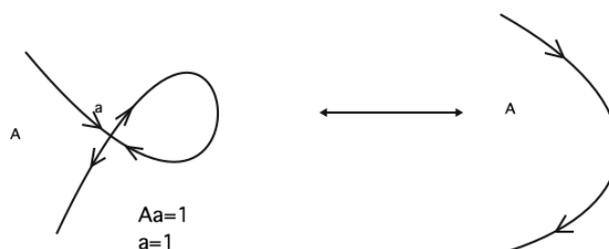


Рис. 4. Случай первого движения

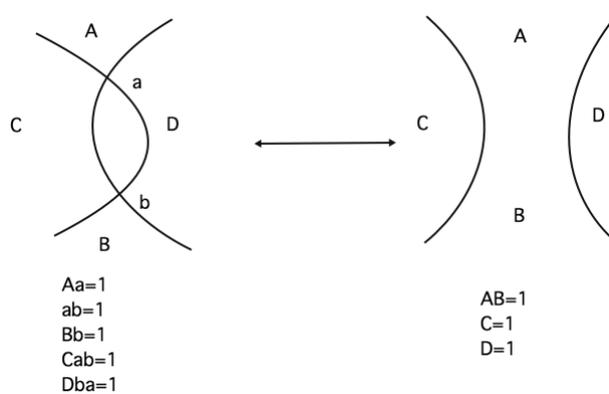


Рис. 5. Случай второго движения

Наконец, движение  $\Omega_3$  отвечает замене образующих  $a, b, c$  на образующие  $a', b', c'$ , причём  $a' = a^{-1}, b' = b^{-1}, c' = c^{-1}$  (рис. 6).

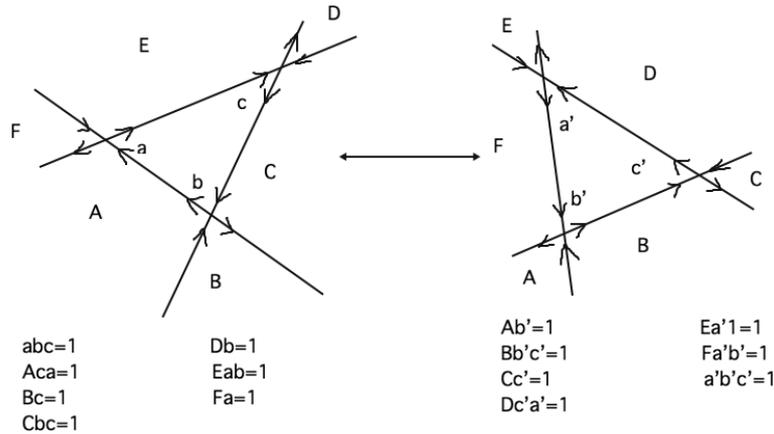


Рис. 6. Случай третьего движения

Легко убедиться, что подобные преобразования копредставления задают изоморфизм групп. Кроме того, они не затрагивают образующих и соотношений, получаемых из многоугольников, не участвующих в соответствующем движении.

Конструкция, описанная в доказательстве теоремы 1, локализует образующие группы в перекрестках кривой. Поскольку гомотопные кривые, которым отвечают изоморфные группы, могут быть связаны цепочкой движений Рейдемейстера, переход между копредставлениями группы также осуществляется при помощи движений Рейдемейстера. Этот факт открывает простор для изучения групп при помощи топологических методов, в частности для построения на группах и их элементах объектов теории узлов.

Таким образом, в разделе 2.2 с использованием методов теории узлов мы доказали инвариантность некоторой хорошо известной группы, соответствующей кривой. Эта инвариантность, разумеется, очевидным образом следует из алгебраических соображений, как только доказана теорема 1. Далее мы будем использовать аналогичные методы для изучения групп, связанных с кривыми, инвариантность которых не столь очевидна. Поскольку одна кривая позволяет получить лишь сравнительно узкий класс групп, дальнейшие разделы настоящей работы посвящены расширению списка групп, получаемых подобным образом, путём рассмотрения иных геометрических объектов: кривых, не допускающих структуры «источник-сток», наборов кривых,  $\Theta$ -графов.

### 2.3. Случай кривых, не допускающих структуры «источник-сток»

Для дальнейшего нам будет полезно понятие *атома*, введённое А. Т. Фоменко (см., например, [3]). Атомом называется пара  $(M, \Gamma)$ , где  $M$  — двумерное замкнутое многообразие без края и  $\Gamma \subset M$  — четырёхвалентный граф, называемый *остовом* атома и делящий  $M$  на чёрные и белые клетки, раскрашенные шахматным образом. Атомы рассматриваются с точностью до естественной комбинаторной эквивалентности — гомеоморфизмов многообразия, переводящих остов в остов, чёрные клетки — в чёрные, а белые — в белые. Атом  $(M, \Gamma)$  называется *ориентируемым*, если поверхность  $M$  ориентируема. Каждый атом (более точно, его класс эквивалентности) может быть полностью восстановлен по следующим комбинаторным данным:

- 1) остов (четырёхвалентный граф);
- 2)  $A$ -структура (делящая четыре полуребра, исходящие из каждой вершины, на две пары, называемые противоположными; отношение противоположности определяется в соответствии с расположением рёбер на поверхности);
- 3)  $B$ -структура (в каждой вершине выделены две пары соседних полурёбер (или двух углов), которые образуют границы чёрных клеток).

Будем говорить, что атом *допускает структуру «источник-сток»*, если его остов допускает структуру «источник-сток» в определённом выше смысле. Заметим, что рассматриваемую ранее кривую  $\gamma$  можно считать остовом некоторого атома  $(S_g, \Gamma)$ .

Пусть теперь кривая  $\gamma$  на поверхности  $M$  устроена так, что ввести структуру «источник-сток» невозможно. В этом случае использовать конструкцию, описанную выше, непосредственно невозможно. Однако и при отсутствии структуры «источник-сток» рассмотренная выше фактор-группа  $\pi_1(M)/\langle \gamma \rangle$  может быть описана способом, аналогичным приведённому выше. Для этого рассмотрим двулистное накрытие кривой  $\gamma$  (графа  $\Gamma$ ), построенное следующим образом (см. [2]). Пусть у кривой  $\gamma$  имеется  $n$  перекрёстков  $X_1, \dots, X_n$ . Эти перекрёстки некоторым образом соединяются между собой. Таким образом, мы имеем граф  $\Gamma$ , погружённый в плоскость. У каждого из перекрёстков  $X_i$  имеется по четыре конца  $X_{i_1}, X_{i_2}, X_{i_3}, X_{i_4}$ , перенумерованных, скажем, по часовой стрелке, при этом перекрёстки соединяются ветвями кривой, которым соответствуют рёбра атома. Пусть ребро  $l_j$  соединяет концы  $X_{j_1 j_2}$  и  $X_{j_3 j_4}$ , где  $j_2, j_4 \in \{1, 2, 3, 4\}$ . Накрывающий объект строится следующим образом. Он содержит  $2n$  перекрёстков  $X'_1, \dots, X'_n, X''_1, \dots, X''_n$ , которые соединяются ветвями. У каждой ветви  $l_j$  исходной диаграммы появляются два образа:  $l_j^1$  и  $l_j^2$ . Каждое из двух рёбер  $l_i$  соединяет конец  $X'_{l_{j_1} l_{j_2}}$  или  $X''_{l_{j_1} l_{j_2}}$  с концом  $X'_{l_{j_3} l_{j_4}}$  или  $X''_{l_{j_3} l_{j_4}}$ . Для каждого ребра  $l_j^1$  нам нужно указать, какие именно концы оно соединяет ( $X'$  или  $X''$ ). Здесь имеется произвол в описании. Дело в том, что до того, как мы начали описывать рёбра, мы не имели естественного упорядочивания вершин: какая из вершин  $X'_i$  и  $X''_i$  «первая», а какая «вторая». Для преодоления этой трудности

рассмотрим остовное дерево  $\Delta$  в графе  $\Gamma$  и скажем, что все рёбра  $l_j^1$ , соответствующие рёбрам этого дерева, соединяют концы  $X'_{j_1j_2}$  с  $X'_{j_3j_4}$  (тем самым рёбра  $l_j^2$  соединяют концы  $X''_{j_1j_2}$  и  $X''_{j_3j_4}$ ). Выбор другого дерева будет соответствовать смене обозначений: в некоторых парах  $X'_j$  и  $X''_j$  поменяются местами. После этого правило соединения оставшихся концов рёбрами  $l_i^1$  и  $l_i^2$  таково. Мы опять позволим себе небольшой произвол: указывая, какие пары концов нужно соединить ребром  $l_i$ , мы не будем говорить, соединяем мы их ребром  $l_i^1$  или ребром  $l_i^2$ . Соответствующая им «симметричная» пара концов, получающаяся заменой  $X' \longleftrightarrow X''$ , будет также соединена ребром, при этом для диаграммы узла не важно, как эти два ребра обозначаются. Также мы не будем следить за тем, как именно на плоскости расположены рёбра  $l_i^\alpha$  — результирующий класс полученного объекта от этого зависеть не будет.

Итак, мы фиксировали остовное дерево  $\Delta \subset \Gamma$ . Каждое ребро  $l_j$ , не принадлежащее этому дереву, задаёт минимальный цикл на подграфе  $\Delta \cup l_j \subset \Gamma$ . Если этот цикл *хороший* (см. далее), соединим ребром  $l_j^1$  концы  $X'_{j_1j_2}$  и  $X'_{j_3j_4}$ , а ребром  $l_j^2$  концы  $X''_{j_1j_2}$  и  $X''_{j_3j_4}$ . В случае плохого цикла соединим ребром  $l_j^1$  концы  $X'_{j_1j_2}$  и  $X''_{j_3j_4}$ , а ребром  $l_j^2$  концы  $X''_{j_1j_2}$  и  $X'_{j_3j_4}$ . Понятия *хорошего* и *плохого* рёбер восходят к ориентирующим и неориентирующим циклам на атоме: хорошим называется ребро, соответствующее ориентируемому циклу. При накрытии атома ориентирующие циклы переходят в циклы, а неориентирующие — в незамкнутые пути (с некоторыми различными концами  $X'_k, X''_k$ ). Определим теперь понятие хорошего ребра (для рёбер, не входящих в  $\Delta$ ), а также понятие ориентирующего цикла, исходя из диаграммы виртуального зацепления. Именно, цикл называется хорошим, если количество его трансверсальных прохождений через классические перекрёстки — вершины атома — чётно. Теперь наша конструкция полностью определена.

Таким образом, по кривой, не допускающей структуры «источник-сток», построен четырёхвалентный граф с искомой структурой, двулистно накрывающий исходную кривую.

Рассмотрим группу  $G_{\tilde{\Gamma}}$ , определённую по графу  $\tilde{\Gamma}$  (или, что эквивалентно, по соответствующей ему кривой  $\tilde{\gamma}$ ), как описано ранее.

**Теорема 2.** Пусть на двумерной замкнутой поверхности  $M$  задана кривая  $\gamma$ , не допускающая структуры «источник-сток». Тогда копредставление группы  $G_{\tilde{\Gamma}}$  является гомотопическим инвариантом кривой  $\gamma$ .

Утверждение немедленно следует из теоремы 1 и конструкции накрывающей кривой  $\tilde{\gamma}$ .

С кривой, не допускающей структуры «источник-сток», связана ещё одна алгебраическая конструкция. Введём некоторую ориентацию дуг кривой  $\gamma$ . Рассмотрим процесс построения группы  $G_\gamma$ , описанный в доказательстве теоремы 1. Поскольку структуры «источник-сток» на кривой  $\gamma$  нет, в многоугольниках  $\delta_i$  могут встречаться рёбра, направленные как согласно, так и против ориентации кривой, т. е. ориентация рёбер многоугольника может быть не согласованной

между рёбрами. Тогда группа, построенная в теореме 1, не будет изоморфна на  $\pi_1(M)/\langle\gamma\rangle$ . Рассмотрим группу  $G_\gamma^\pm$ , которая строится следующим образом. В качестве образующих возьмём множество элементов, находящихся во взаимно-однозначном соответствии с перекрёстками кривой  $\gamma$ . Зададим на кривой  $\gamma$  ориентацию и некоторым образом ориентируем её дуги. Теперь для каждого многоугольника с вершинами (в порядке обхода по часовой стрелке)  $a_{i_1}, \dots, a_{i_k}$ , являющегося границей одной из клеток (компонент связности), на которые кривая  $\gamma$  разбивает поверхность  $S_g$ , зададим соотношение вида  $a_{i_1}^{\varepsilon_1} \dots a_{i_k}^{\varepsilon_k} = 1$ , где  $\varepsilon_j = 1$ , если соответствующее ребро многоугольника имеет ориентацию, совпадающую с ориентацией, индуцированной ориентацией кривой  $\gamma$ , и  $-1$  в противном случае.

Рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 1, доказывают следующую теорему.

**Теорема 3.** Пусть  $\gamma$  — кривая на двумерной замкнутой поверхности  $M$ , не допускающая структуры «источник-сток», причём дополнение к  $\gamma$  представляет собой объединение клеток. Тогда

$$G_\gamma^\pm \cong \pi_1(M)/\langle\gamma\rangle,$$

где  $\langle\gamma\rangle$  обозначает нормальное замыкание гомотопического класса кривой  $\gamma$ .

Из теоремы 3 следует, что копредставление построенной таким образом группы является гомотопическим инвариантом кривой  $\gamma$ . Более того, если кривая  $\gamma$  допускает структуру «источник-сток»,  $G_\gamma^\pm \cong G_\gamma$ .

### 3. Случай зацепления из нескольких компонент

Обобщим результаты предыдущих разделов на случай нескольких кривых. Пусть на поверхности  $S_g$  дан набор из  $k$  замкнутых кривых, причём как самопересечения, так и пересечения разных кривых двойные и трансверсальные. Идеи, аналогичные описанным в предыдущем разделе, могут быть использованы для построения группы, являющейся гомотопическим инвариантом этого набора кривых.

Для набора кривых  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$  введём понятие *обобщённой хордовой диаграммы*  $C(\gamma)$ . Обобщённой хордовой диаграммой называется трёхвалентный граф, состоящий из  $k$  ориентированных циклов, называемых *окружностями* диаграммы, и набора ориентированных (или неориентированных) рёбер (хорд). По данному набору кривых обобщённая хордовая диаграмма строится следующим образом. Возьмём хордовую диаграмму  $C_i$  для каждой из кривых  $\gamma_i$ , а затем соединим «хордами» точки на окружностях разных хордовых диаграмм  $C_i, C_j$ , соответствующих точкам пересечения кривых  $\gamma_i, \gamma_j$  (рис. 7).

Введём также понятие *дольки* набора кривых, являющееся обобщением понятия половинки кривой. Долькой набора кривых  $\gamma$  относительно выделенного перекрёстка кривых  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$  называется объединение дуги одной из окружностей

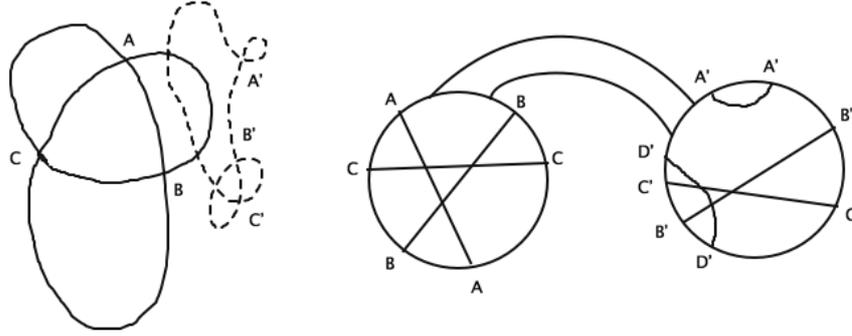


Рис. 7. Обобщённая хордовая диаграмма

обобщённой хордовой диаграммы, соединяющей точки, соответствующие двум перекрёсткам двух кривых  $\gamma_i$  и  $\gamma_j$ , один из которых является выделенным, и дуги второй окружности, соединяющей эти перекрёстки, причём вторая дуга выбирается так, чтобы её ориентация, индуцированная ориентацией окружности, была согласована с ориентацией первой дуги.

Рассмотрим такие наборы кривых  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$  на поверхности  $S_g$  (в дальнейшем будем называть эту конструкцию *диаграммой*), которые допускают введение структуры «источник-сток» и разбивают поверхность на двумерные клетки  $\Delta_i$ . Тогда в качестве образующих искомой группы возьмём все перекрёстки диаграммы  $\gamma$  (сюда входят точки самопересечения  $g_{ii}^l$  каждой кривой и точки их взаимных пересечений  $g_{ij}^l$ ). В качестве соотношений же возьмём, как и раньше, многоугольники на поверхности  $S_g$ , образованные дугами диаграммы  $\gamma$ , т. е. формальные соотношения вида  $g_{i_1 j_1}^l \dots g_{i_k j_k}^l = 1$ . Построена группа  $G_\gamma$ , инвариантная относительно гомотопий диаграммы. Она имеет следующую комбинаторную структуру.

**Теорема 4.** Пусть дана диаграмма из  $k$  кривых  $\gamma = \gamma_1 \cup \dots \cup \gamma_k$ , допускающая структуру «источник-сток» и разбивающая поверхность на двумерные клетки  $\Delta_i$ . Тогда имеет место изоморфизм

$$G_\gamma \cong (\pi_1(S_g) / \langle \gamma_1 \rangle \dots \langle \gamma_k \rangle) * \mathbb{Z} * \dots * \mathbb{Z},$$

где  $\langle \gamma_i \rangle$  обозначает нормальное замыкание гомотопического класса кривой  $\gamma_i$ , а число сомножителей вида  $\mathbb{Z}$  равно  $k - 1$ .

**Доказательство.** Проведём доказательство для случая диаграммы из двух кривых  $\gamma = \gamma_1 \cup \gamma_2$ . Теорема для большего числа кривых доказывается аналогично. Рассмотрим комплекс  $\mathcal{S}$ , полученный приклейкой дисков  $D_i$  к поверхности  $S_g$  при помощи отождествления их границ  $\partial D_i$  с кривыми  $\gamma_i$ . Комплекс  $\mathcal{S}$

является объединением комплексов  $\mathcal{D}_i$  и комплекса  $\mathcal{S}_g$ , определяемых аналогично случаю одной кривой. Двумерными клетками комплекса  $\mathcal{S}$  будут связные компоненты, на которые диаграмма  $\gamma$  разбивает поверхность  $S_g$ , а также диски  $D_i$ , одномерными — дуги кривых  $\gamma_i$ . Рассмотрим комплекс  $\tilde{\mathcal{S}}$ , полученный из комплекса  $\mathcal{S}$  отождествлением центров дисков  $D_i$  между собой при помощи соединения их дугой  $\xi$ .

В отличие от случая одной кривой, у диаграммы имеются перекрёстки двух типов: точки самопересечения одной из кривых и точки пересечения различных кривых. Наша задача — связать образующие группы  $G_\gamma$  с петлями на комплексе  $\tilde{\mathcal{S}}$ , после чего рассуждения, в точности аналогичные доказательству теоремы 1, дадут требуемый результат.

Рассмотрим комплекс  $\tilde{D}$ , являющийся объединением комплексов  $\mathcal{D}_i$  и кривой  $\xi$ . Он гомотопически эквивалентен букету из  $N$  окружностей, где  $N$  — число перекрёстков диаграммы  $\gamma$ . Ориентируем каждую из кривых  $\gamma_i$  и введём на диаграмме  $\gamma$  структуру «источник-сток». Зафиксируем произвольный перекрёсток  $\alpha$  кривых  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ . На обобщённой хордовой диаграмме  $C(\gamma)$  ориентируем хорды и выберем половинки и дольки относительно перекрёстка  $\alpha$ , как описано в доказательстве теоремы 1: хорды ориентируются так, чтобы их ориентация для каждого многоугольника была согласованна, затем выбираются половинки и дольки таким образом, что ориентация входящих в них дуг кривых  $\gamma_i$  была согласована с ориентацией входящих в них хорд. Заметим, что на комплексе  $\tilde{\mathcal{S}}$  всякая долька относительно перекрёстка  $\alpha$  и всякая половинка порождает замкнутую петлю. Применяя рассуждения теоремы 1 и теорему ван Кампена, получаем, что  $\pi_1(\tilde{\mathcal{S}}) \cong G_\gamma$ . С другой стороны,  $\pi_1(\mathcal{S}) \cong \pi_1(S_g)/\langle\gamma_1\rangle\langle\gamma_2\rangle$  и  $\pi_1(\tilde{\mathcal{S}}) \cong \pi_1(\mathcal{S}) * \mathbb{Z}$ . Следовательно,  $G_\gamma \cong (\pi_1(S_g)/\langle\gamma_1\rangle\langle\gamma_2\rangle) * \mathbb{Z}$ , что и требовалось доказать.  $\square$

#### 4. Случай поверхности с краем

Рассмотрим двумерную ориентируемую поверхность  $S$  с краем и кривую, вложенную в неё, как описано в разделе 1 (или набор кривых, как в разделе 2). В этом случае можно рассмотреть конструкцию, аналогичную приведённым выше, со следующим отличием: многоугольники, внутри которых находится край поверхности, не дают никакого соотношения. В самом деле, петля, полученная таким образом, не сможет стянуться в точку по поверхности  $S$ , а потому не будет гомотопически тривиальной на комплексе, полученном приклейкой диска по кривой.

**Теорема 5.** Пусть  $\gamma$  — замкнутая кривая на двумерной ориентированной поверхности  $M$ , быть может с краем. Пусть  $\gamma$  допускает структуру «источник-сток». Тогда

$$G_\gamma \cong \pi_1(M)/\langle\gamma\rangle,$$

где  $\langle\gamma\rangle$  обозначает нормальное замыкание гомотопического класса кривой, а группа  $G_\gamma$  определялась выше.

Доказательство повторяет доказательство теоремы 1. Аналогично формулируются теоремы для набора кривых на поверхности с краем и для кривой, не допускающей структуры «источник-сток».

Таким образом, если у нас есть группа

$$G = \langle a_1, \dots, a_n \mid \mathcal{R} \rangle \cong \pi_1(S_g) / \langle K \rangle,$$

где  $\mathcal{R} = \{r_1, \dots, r_k\}$  — множество соотношений, то из неё мы можем получить любую группу  $\langle a_1, \dots, a_n \mid \mathcal{R}' \rangle$ , где  $\mathcal{R}' \subset \mathcal{R}$  — произвольное подмножество множества соотношений, путём вырезания дырок в поверхности внутри соответствующих многоугольников.

## 5. Случай $\Theta$ -графов

Применённые для построения инварианта гомотопического класса кривой или набора кривых идеи могут быть использованы для построения инвариантов иного класса объектов:  $\Theta$ -графов.

Пусть  $\Gamma$  — граф, все вершины которого имеют валентность 3, и пусть  $f: \Gamma \rightarrow S_g$  — погружение общего положения графа  $\Gamma$  в поверхность  $S_g$  (образ которого представляет собой граф  $\Delta$ , все вершины которого имеют валентность 3 или 4, и при этом дополнение  $S_g \setminus \Delta$  представляет собой объединение клеток).

Определим группу  $G(f)$  следующим образом. Каждой вершине валентности 4 графа  $\Delta$  поставим в соответствие букву  $a_i$  и зададим в этой вершине одну из двух возможных структур «источник-сток» (при этом на рёбрах структуры «источник-сток», происходящие из различных вершин, могут не быть согласованными). Для каждой связной компоненты дополнения  $S_g \setminus \Delta$  рассмотрим край соответствующего диска. Этот край представляет собой путь, обходящий в некотором циклическом порядке вершины графа  $\Delta$ . Не учитывая вершины валентности 3, запишем лишь буквы, соответствующие вершинам валентности 4, причём каждая буква будет появляться в степени +1, если выбранная структура «источник-сток» согласована с обходом, и в степени −1 в противном случае. Группа  $G(f)$  определяется как группа  $\langle a_i \mid R_j \rangle$ , где  $R_j$  — описанные выше соотношения.

**Теорема 6.** *Группа  $G(f)$  является гомотопическим инвариантом вложения графа  $G$ .*

**Доказательство.** Рассмотрим всевозможные типы преобразований графа  $G$  и построим изоморфизм соответствующих групп в каждом из случаев. А именно, рассмотрим следующие элементарные преобразования: замена структуры «источник-сток» в одной из вершин на противоположную, движения Рейдемейстера  $\Omega_1$ — $\Omega_3$ , перенос дуги через трёхвалентную вершину (рис. 8) и «перекручивание» трёхвалентной вершины (рис. 9). Два погружения  $\Theta$ -графа гомотопны тогда и только тогда, когда они связаны цепочкой элементарных преобразований из этого списка.

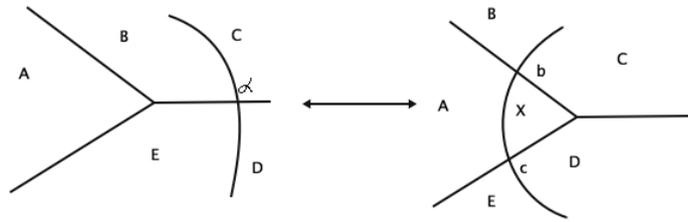


Рис. 8. Прохождение ветви через трёхвалентную вершину

Прежде всего, поскольку при определении группы  $G(f)$  не требовалась согласованность структур «источник-сток», заданных в каждой вершине, возможна замена ориентации в одной из вершин. Искомый изоморфизм для этого случая очевиден: он заключается в отображении  $a \mapsto a^{-1}$ , где  $a$  — образующая, соответствующая рассматриваемой вершине.

Рассмотрим движения Рейдемейстера. Поскольку в них не участвуют вершины валентности 3, проверка этого случая дословно повторяет доказательство теоремы для четырёхвалентных графов (при этом мы можем считать, что структура «источник-сток» выбрана во всех вершинах согласованным образом).

Остаются два движения. Одно из них состоит в прохождении ветви сквозь трёхвалентную вершину (см. рис. 8).

Все соотношения для левого рисунка делятся на пять типов, соответствующих пяти областям, помеченным на рисунке заглавными буквами. Соотношения, соответствующие областям, помеченным одноименными буквами в правой части, отличаются от первых только элементами, затронутыми движением (т. е.  $b, c, \alpha$ ).

В правой части имеется также область, обозначенная  $X$ . Ей соответствует соотношение  $bc^{-1} = 1$ . Таким образом, имеется естественный изоморфизм групп, задаваемый отображением  $\alpha \mapsto b = c$ , при котором все образующие, соответствующие перекрёсткам вне рисунка, переходят в себя.

Наконец, в случае движения, где вершина «перекручивается» (см. рис. 9), добавляется вершина степени четыре, соответствующая которой образующая равна 1 в силу соотношения. Обратное, при удалении четырёхвалентной вершины исчезает тривиальная образующая.  $\square$

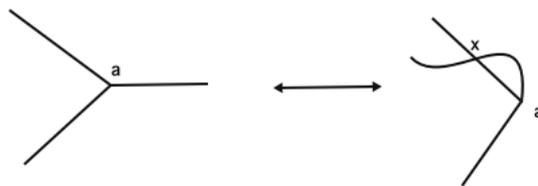


Рис. 9. «Перекручивание» трёхвалентной вершины  $a$

Изучение  $\Theta$ -графов важно по следующей причине. Важнейшим классом групп являются группы трёхмерных многообразий. Если представлять трёхмерное многообразие посредством диаграммы Хегора, то две диаграммы будут задавать одно и то же многообразие, если одна из них получается из другой преобразованием (движением Кирби), с точки зрения теории групп означая замену копредставления  $\langle \dots, a, b \rangle$  с двумя соотношениями  $a, b$  на копредставление с двумя соотношениями  $a, ab$ . Отметим, что такое преобразование является самым важным в теории групп в силу теоремы Титце. В общем случае это движение сложно совместить с движениями Рейдемейстера. Но в случае, когда соотношений два, это можно сделать при помощи  $\Theta$ -графа согласно теореме 6.

В итоге мы получаем совсем другое копредставление известных групп: у рассматриваемого нами копредставления соотношения отвечают перекрёсткам. Кроме того, преобразования копредставлений соответствуют движениям Рейдемейстера, а также другим движениям геометрической природы.

Естественной является задача доказательства общей теоремы о том, что для достаточно широкого класса имеется множество «геометрических» копредставлений, таких что любые два копредставления, соответствующие одной группе, могут быть связаны движениями из определённого списка. В этом случае многие геометрические конструкции могли бы быть использованы для построения инвариантов групп.

В следующем разделе мы продемонстрируем один инвариант гомотопических классов кривых на двумерных поверхностях (который естественным образом можно трактовать как инвариант классов сопряжённости элементов в группах).

## 6. Связь с теорией узлов

Рассмотренные конструкции могут быть непосредственно перенесены в область теории узлов и использованы для построения теории узлов. Напомним, что *узлом* в трёхмерной сфере называется вложение окружности в  $S^3$ . *Диаграммой* узла называется такая проекция узла на плоскость, что все точки самопересечения кривой (называемые перекрёстками) двойные и трансверсальные, причём в каждом перекрёстке введена дополнительная структура, указывающая, какая из ветвей кривой в этом перекрёстке находится выше, а какая ниже. Две диаграммы узла называются эквивалентными, если они могут быть связаны цепочкой преобразований, включающей в себя только изотопии и движения Рейдемейстера  $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$  (см. рис. 3). Класс эквивалентности диаграмм данного узла также будет называться узлом.

*Плоским узлом* называется класс эквивалентности замкнутых кривых на двумерной поверхности  $M$ , все точки самопересечения которых являются двойными и трансверсальными, по *плоским движениям Рейдемейстера*. В отличие от классических узлов, в перекрёстках диаграмм плоских узлов не вводится различие между верхней и нижней дугами.

*Зацеплением (плоским зацеплением)* называется несвязная сумма нескольких узлов (плоских узлов) с двойными трансверсальными точками пересечения.

Доказанные теоремы позволяют, с одной стороны, применять групповые методы для изучения узлов, а с другой — использовать известные из теории узлов конструкции и теоремы для изучения групп.

К числу конструкций, которые можно перевести на язык групп, относится, например, скобка, введённая в [1]. Этот объект позволяет доказывать некоторые теоремы минимальности. В частности, из доказанных выше теорем и свойств скобки (см. [1]) вытекает следующее утверждение.

**Теорема 7.** *Пусть диаграмма некоторого класса сопряжённости кривой на поверхности нечётна и несократима. Тогда любая другая диаграмма содержит её в качестве поддиаграммы.*

Под несократимостью здесь следует понимать отсутствие на диаграмме двугольников, под нечётностью — нечётность цикла, получаемого из классов эквивалентности противоположных полурёбер на диаграмме. Поскольку всякому классу кривой на поверхности соответствует инвариантная группа, эта теорема является одновременно и утверждением о структуре групп.

## Литература

- [1] Ильютко Д. П., Мантуров В. О., Никонов И. М. Чётность в теории узлов и граф-зацепления // СМФН. — 2011. — Т. 41. — С. 3—163.
- [2] Мантуров В. О. Комплекс Хованова для виртуальных узлов // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 4. — С. 127—152.
- [3] Fomenko A. T. The theory of invariants of multidimensional integrable Hamiltonian systems (with arbitrary many degrees of freedom). Molecular table of all integrable systems with two degrees of freedom // Amer. Math. Soc. — 1991. — Vol. 6. — P. 1—35.
- [4] Goldman W. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations // Invent. Math. — 1986. — Vol. 85. — P. 263—302.
- [5] Hass J., Scott P. Shortening curves on surfaces // Topology. — 1994. — Vol. 33, no. 1. — P. 25—43.
- [6] Reinhart B. L. Algorithms for Jordan curves on compact surfaces // Ann. Math. — 1962. — Vol. 75, no. 2. — P. 209—222.
- [7] Turaev V. G. Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces // Ann. Sci. École Norm. Sup. — 1991. — Vol. 24. — P. 635—704.

