PI-экспоненты некоторых простых алгебр с единицей

С. П. МИЩЕНКО
Ульяновский государственный университет
e-mail: mishchenkosp@mail.ru

О. А. БОГДАНЧУК
Ульяновский государственный университет
e-mail: bogdanchuk_o_a@mail.ru

УДК 512.5

Ключевые слова: тождества, многообразие алгебр, коразмерности, дробный экспоненциальный рост.

Аннотация

В случае нулевой характеристики основного поля построена дискретная серия простых конечномерных алгебр с единицей, последовательность размерностей которых стремится в бесконечность, но PI-экспоненты которых являются дробными различными числами, строго меньшими четырёх.

Abstract

S. P. Mishchenko, O. A. Bogdanchuk, PI-exponents of some simple algebras with unit, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 121—128.

Over a field of characteristic zero we have constructed a discrete series of simple finite-dimensional algebras with unit. Its sequence of dimensions is not bounded, but PI-exponents are different fractional numbers strictly less than 4.

В работе изучаются простые конечномерные неассоциативные алгебры с единицей над полем Φ нулевой характеристики с точки зрения выполняющихся в них тождеств. Все не определяемые в статье понятия можно найти в [9].

Напомним, что многообразием $\mathbf{V}$ алгебр называется класс алгебр, в которых выполняется фиксированный набор тождеств. В случае нулевой характеристики основного поля любое тождественное соотношение эквивалентно системе полилинейных тождеств, поэтому вся информация о многообразии содержится в так называемых полилинейных компонентах $P_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, относительно свободной алгебры этого многообразия. Числовая последовательность $c_n(\mathbf{V})$, $n = 1, 2, \ldots$, размерностей полилинейных компонент в случае многообразия, порождённого конечномерной алгеброй, является экспоненциально ограниченной. В этом случае последовательность $\sqrt[n]{c_n(\mathbf{V})}$ является ограниченной, а следовательно, имеет верхний и нижний пределы

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \varliminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}, \quad \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)},$$

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 121—128.

которые называют нижней и верхней экспонентой многообразия $\mathbf{V}$. Если существует обычный предел, т. е. $\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}) = \overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V})$, то его называют просто экспонентой многообразия $\mathbf{V}$ и обозначают $\mathrm{EXP}(\mathbf{V})$. Экспоненту многообразия, порождённого некоторой алгеброй A, называют также PI-экспонентой алгебры A. Для некоторых конечномерных алгебр PI-экспонента является целой. Это имеет место, например, в случае ассоциативных алгебр [7, 8], алгебр Ли [1, 5], йордановых и альтернативных алгебр [6, 10]. Для многообразия, порождённого трёхмерной простой алгеброй с единицей, PI-экспонента также не может быть дробной [2]. Более того, во всех упомянутых случаях экспонента равна размерности простой алгебры. Первый пример простой алгебры с единицей, PI-экспонента которой строго меньше размерности и является нецелым числом, был найден в [3]. Целью данной работы является обобщение результата последней статьи на случай сколь угодно большой размерности. Отметим, что в построенной серии простых алгебр с единицей, последовательность размерностей которых стремится к бесконечности, алгебры имеют разные дробные PI-экспоненты, ограниченные числом 4.

Построим дискретную серию алгебр с единицей, размерности которых стремятся к бесконечности. Пусть A_m, $m \geqslant 3$, — алгебра размерности m с базисом a_s, $s = -1, 0, \ldots, m-2$. Определим таблицу умножения так, чтобы элемент a_0 был единицей алгебры, т. е. для любого s выполнялись равенства $a_s a_0 = a_0 a_s = a_s$. Если $i, j \neq 0$, положим $a_i a_j = a_{i+j}$ при выполнении неравенств $i \geqslant j$ и $-1 \leqslant i + j \leqslant m-2$. В остальных случаях, т. е. когда $i + j < -1$, или $i + j > m-2$, или $i < j$, произведение $a_i a_j = 0$ равно нулю.

Предложение 1. *Если $m \geqslant 3$, то A_m — простая алгебра с единицей.*

Доказательство. Из определения алгебры получаем, что элемент a_0 — единица алгебры. Докажем, что алгебра является простой. Рассмотрим некоторый ненулевой идеал, и пусть $a = \sum\limits_{i=-1}^{m-2} \beta_i a_i$ — некоторый ненулевой элемент этого идеала. Пусть s — индекс ненулевого коэффициента, причём $\beta_k = 0$ для любого $k > s$. Умножим элемент a слева на a_{-1} $s+1$ раз. В результате получим элемент $\beta_s a_{-1}$. Таким образом, элемент a_{-1}, а следовательно и $a_0 = a_{-1} a_1$, принадлежит идеалу. Так как идеал содержит единицу алгебры a_0, то он совпадает со всей алгеброй. Предложение доказано. □

Отметим, что алгебра A_m является $\mathbb{Z}$-градуированной. Выпишем разложение алгебры в прямую сумму однородных подпространств:

$$A_m = A_m^{(-1)} \oplus A_m^{(0)} \oplus \ldots \oplus A_m^{(m-2)} = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} A_m^{(s)},$$

где при $s = -1, 0, \ldots, m-2$ подпространство $A_m^{(s)} = \langle a_s \rangle$ — одномерная линейная оболочка, натянутая на базисный элемент a_s, а остальные пространства являются нулевыми, т. е. $A_m^{(s)} = 0$, если $s < -1$ или $s > m-2$.

Так как алгебра не является ассоциативной, договоримся в случае левонормированного произведения опускать скобки, т. е. $abc = (ab)c$.

Пусть $\mathbf{V}_m$ — многообразие алгебр, порождённое алгеброй A_m. Как обычно, в относительно свободной алгебре этого многообразия со счётным множеством свободных образующих $\{x_1, x_2, \ldots\}$ обозначим через $P_n(\mathbf{V}_m)$ пространство всех полилинейных элементов от $x_1, \ldots, x_n$ и определим на нём структуру модуля симметрической группы S_n. Напомним, что результат действия перестановки $p \in \mathrm{S}_n$ на полилинейном левонормированном мономе $x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_n} \in P_n(\mathbf{V}_m)$ равен $x_{p(i_1)} x_{p(i_2)} \ldots x_{p(i_n)}$. Размерность пространства $P_n(\mathbf{V}_m)$ обозначим $c_n(\mathbf{V}_m)$ и будем называть n-й коразмерностью многообразия $\mathbf{V}_m$ или алгебры A_m. Так как характеристика основного поля равна нулю, то по теореме Машке этот модуль является вполне приводимым. Пусть

$$\chi_n(\mathbf{V}_m) = \chi\big(P_n(\mathbf{V}_m)\big) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda \;— \tag{1}$$

разложение его характера в целочисленную комбинацию неприводимых характеров χ_λ с кратностями m_λ, где $\lambda \vdash n$ — разбиение числа n. Пусть d_λ — размерность неприводимого модуля, соответствующего разбиению λ. Тогда для коразмерности выполняется равенство

$$c_n(\mathbf{V}_m) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda.$$

Обозначим

$$l_n(\mathbf{V}_m) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

кодлину многообразия $\mathbf{V}_m$.

Договоримся использовать в качестве свободных образующих не только x с индексом, но и другие латинские буквы, например y или z. Обозначим через R_a оператор умножения справа на элемент a; например, $bR_a^3 = baaa$. Кроме того, будем использовать специальный символ (черту, волну) над образующими для обозначения кососимметризации. Например,

$$x_0 \bar{x}_1 \tilde{y}_1 \bar{x}_2 \tilde{y}_2 \tilde{y}_3 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = \sum_{p \in \mathrm{S}_4,\, q \in \mathrm{S}_3} (-1)^p (-1)^q x_0 x_{p(1)} y_{q(1)} x_{p(2)} y_{q(2)} y_{q(3)} x_{p(3)} x_{p(4)},$$

где $(-1)^r$ — чётность перестановки r. В этом случае будем говорить, что элемент содержит два кососимметрических набора: x_1, x_2, x_3, x_4 и y_1, y_2, y_3. Если же образующие в наборах совпадают, то будем говорить об альтернированных наборах образующих, так как в этом случае обычное свойство кососимметризации нарушается. Например, элемент

$$x_0 \bar{x}_1 \tilde{x}_1 \bar{x}_2 \tilde{x}_2 \tilde{x}_3 \bar{x}_3 \bar{x}_4 = \sum_{p \in \mathrm{S}_4,\, q \in \mathrm{S}_3} (-1)^p (-1)^q x_0 x_{p(1)} x_{q(1)} x_{p(2)} x_{q(2)} x_{q(3)} x_{p(3)} x_{p(4)}$$

содержит два альтернированных набора образующих: x_1, x_2, x_3, x_4 и x_1, x_2, x_3, но свойство кососимметризации нарушается, и его знак не изменится, если поменять местами образующие x_1 и x_2. Фраза «проальтернируем элемент $f(x, y, \ldots)$

по паре образующих x и y» означает получение из элемента $f(x,y,\ldots)$ другого элемента, в котором одна из пар образующих x, y помечена специальным символом.

Напомним, что каждому разбиению $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k)$ числа n можно поставить в соответствие диаграмму Юнга, i-я строка которой имеет длину, равную λ_i, $i = 1, 2, \ldots, k$. Поставим в соответствие разбиению на k частей целое число по следующему правилу:

$$\mathrm{wt}(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}(i-2)\lambda_i.$$

Проанализируем ограничения на форму диаграммы Юнга, при которых кратность m_λ в сумме (1) может быть отлична от нуля. Поскольку $\dim A_m = m$, то кососимметризация некоторого элемента по более чем m образующим приводит к тождественному равенству этого элемента нулю. В этом случае, как хорошо известно, если $\lambda_{m+1} \neq 0$, то $m_\lambda = 0$. Кроме того, оказывается, что если кратность отлична от нуля, то первая строка диаграммы Юнга должна быть достаточно длинной. Дадим точную формулировку этого ограничения на форму диаграммы Юнга.

Предложение 2. *Если $m_\lambda \neq 0$ в разложении* (1), *то выполняются неравенства $\lambda_{m+1} = 0$ и $\mathrm{wt}(\lambda) \leqslant m-2$.*

Доказательство. Пусть $m_\lambda \neq 0$, т. е. существует неприводимый ΦS_n-подмодуль в P_n с характером χ_λ, не лежащий в идеале тождеств алгебры A_m. Это означает, что существует полилинейный многочлен $f = f(x_1, \ldots, x_k)$, кососимметричный по наборам переменных в количествах, равных длинам столбцов диаграммы Юнга, соответствующей разбиению $\lambda \vdash n$, и не равный нулю тождественно в многообразии $\mathbf{V}_m$. Значит, существует такая подстановка вместо образующих элемента f базисных элементов алгебры A_m, при которой значение не равно нулю. Понятно, что вместо кососимметрических образующих подставлены разные базисные элементы a_i. Пусть $x_{i_1}, \ldots, x_{i_s}$ — образующие одного кососимметрического набора. Тогда сумма индексов подставленных базисных элементов будет не меньше, чем

$$-1 + 0 + \ldots + s - 2 = \frac{s(s-3)}{2}.$$

Так как алгебра A_m $\mathbb{Z}$-градуированная, то результат подстановки будет принадлежать однородной компоненте $A_m^{(k)}$, где

$$k \geqslant \sum_{i=1}^{\lambda_1} \frac{\lambda_i'(\lambda_i'-3)}{2} = \mathrm{wt}(\lambda),$$

а $\lambda_1', \lambda_2', \ldots, \lambda_{\lambda_1}'$ — длины столбцов диаграммы λ. Если $\mathrm{wt}(\lambda) > m-2$, то $A_m^{(k)} = 0$, и вопреки условию результат подстановки также равен нулю. Таким образом, если $m_\lambda \neq 0$, то выполняется неравенство $\mathrm{wt}(\lambda) \leqslant m-2$. Предложение 2 доказано. $\square$

Для неотрицательных вещественных переменных $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ определим функцию

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m) = \prod_{i=1}^{m} \alpha_i^{-\alpha_i},$$

где по непрерывности справа полагаем $0^0 = 1$ для нулевых значений переменных. Определим T_m — компакт арифметического пространства $\mathbb{R}^m$, заданный условиями

$$\begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_m = 1, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} (i-2) \cdot \alpha_i \leqslant 0, \\ \alpha_1 \geqslant \alpha_2 \geqslant \ldots \geqslant \alpha_m \geqslant 0. \end{cases} \tag{2}$$

Как показано в [11], максимумы этих функций при различных m (мы обозначим их $F(m)$, $m = 3, 4, \ldots$) различны. Более точно, в [11] доказано следующее утверждение.

Предложение 3. *Функция $F(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)$ на компакте T_m достигает максимального значения в точке с ненулевой последней компонентой, $\alpha_m \neq 0$, и при этом второе неравенство условий* (2) *становится равенством. Кроме того,*

$$\lim_{m \to \infty} F(m) = 4$$

и выполняются строгие неравенства

$$3 = F(3) < \ldots < F(m) < F(m+1) < \ldots < 4.$$

Теперь нам потребуются результаты статьи [11], связанные с асимптотикой максимальных размерностей неприводимых S_n-модулей, на форму диаграмм Юнга которых наложено некоторое ограничение. Пусть D_n — множество разбиений, удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = n, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} (i-2) \cdot \lambda_i \leqslant 0, \\ \lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_m \geqslant 0. \end{cases} \tag{3}$$

Обозначим через $\lambda^{(n)}$ разбиение, принадлежащее D_n, такое что размерность соответствующего неприводимого модуля является максимальной, т. е.

$$d_{\lambda^{(n)}} = \max_{\lambda \in D_n} d_\lambda.$$

Тогда, как показано в [11],

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{d_{\lambda^{(n)}}} = F(m).$$

Более того, мы получим такой же результат, если в определении компакта T_m и множества диаграмм D_n второе условие будет равенством, т. е. можно рассматривать только диаграммы с условием $\mathrm{wt}(\lambda) = 0$.

Сформулируем основной результат работы.

Теорема. *PI-экспонента алгебры A_m при $m \geqslant 4$ существует и равна дробному числу $F(m)$, т. е.* $\mathrm{EXP}(\mathbf{V}_m) = F(m)$.

Доказательство. В [4, теорема 1] доказано, что в случае алгебры конечной размерности кодлина порождённого этой алгеброй многообразия полиномиально ограничена. Следовательно, оценки для нижней и верхней экспоненты многообразия $\mathbf{V}_m$ могут быть найдены из анализа размерностей d_λ неприводимых модулей симметрической группы, входящих в разложение модуля $P_n(\mathbf{V}_m)$ в прямую сумму неприводимых подмодулей.

Пусть D_n^* — множество разбиений $\mu \vdash n$, для которых выполняется условие $\mathrm{wt}(\mu) \leqslant m-2$. Обозначим через $\mu^{(n)}$ разбиение, принадлежащее D_n^*, такое что размерность соответствующего неприводимого модуля является максимальной, т. е.

$$d_{\mu^{(n)}} = \max_{\mu \in D_n^*} d_\mu.$$

При фиксированном n множество диаграмм D_n является подмножеством множества диаграмм D_n^*. Понятно, что для любого разбиения $\mu \in D_n^*$ существует такое разбиение $\lambda \in D_n$, что соответствующие этим разбиениям диаграммы Юнга отличаются на ограниченное, не зависящее от n число клеток. Действительно, достаточно удалить не более $m-2$ клеток из строк с номером больше двух и добавить столько же клеток в первую строку. Из элементарных соображений математического анализа следует, что

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_{\mu^{(n)}}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{d_{\lambda^{(n)}}} = F(m).$$

Таким образом, из предложений 2 и 3 следует, что

$$\overline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}_m) \leqslant F(m).$$

Докажем неравенство

$$\underline{\mathrm{EXP}}(\mathbf{V}_m) \geqslant F(m),$$

из которого будет следовать утверждение теоремы. Из результатов статьи [11] вытекает, что достаточно для каждого n и для каждого его разбиения $\nu = (\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_m)$ на m частей (т. е. $\nu_m \neq 0$), доказать, что $m_\nu \neq 0$ в сумме (1). При этом можно ограничиться рассмотрением только тех разбиений, для которых, например, выполняются дополнительные условия $\mathrm{wt}(\nu) = -1$ и $\nu_1 > \nu_2$, так как добавление конечного количества клеток к первой или второй строке не влияет на результат.

Пусть $t_1, t_2, \ldots, t_k$ — высоты первых k столбцов диаграммы Юнга, соответствующей разбиению ν, где $k = \nu_4$, т. е. все остальные столбцы диаграммы имеют высоту не больше 3.

Будем строить элемент относительно свободной алгебры многообразия от m образующих $y, y_0, \ldots, y_{m-2}$ по числу строк диаграммы. Сначала построим элемент

$$g_1 = \bar{y}_0(\bar{y}_1\bar{y})\Big(\bar{y}_2yy\big(\bar{y}_3yyy\ldots(\bar{y}_{m-3}R_y^{m-3}(\bar{y}_{m-2}R_y^{m-1})\ldots)\big)\Big).$$

Заметим, что степень оператора R_y в правой части равна именно $m-1$, а не $m-2$, так как один «лишний» y переходит каждый раз в скобку более высокого уровня и тем самым приводит к ненулевому результату после подстановки. Кроме того, напомним, что опущенные скобки расставлены левонормированным способом. В качестве примера выпишем построенный элемент для случая $m=5$: $\bar{y}_0(\bar{y}\bar{y}_1)\big(\bar{y}_2yy(\bar{y}_3yyyy)\big)$.

Вычислим значение элемента g_1 после подстановки вместо образующих следующих базисных элементов алгебры A_m: $y=a_{-1}$, $y_s=a_s$, $s=0,1,\ldots,m-2$. Появление в последней скобке любого базисного элемента, кроме a_{m-2}, даёт нулевое значение. Если же там стоит элемент a_{m-2}, то значение последней скобки равно a_{-1}, что как раз не позволяет появляться в ненулевом случае в предпоследней скобке никакому базисному элементу, кроме a_{m-3}. И так далее. Непосредственным вычислением убеждаемся, что $\bar{a}_0(\bar{a}_1\bar{a}_{-1})=a_0$. Таким образом, результат подстановки в элемент g_1 равен a_{-1}. Аналогичным образом построим элемент g_2, только вместо $m=t_1$ возьмём t_2 и вместо самой правой образующей y подставим g_1. Значение элемента g_2 после подстановки будет также равно a_{-1}. На следующем шаге построим g_3, в котором вместо самой правой образующей будет g_2, и так далее. В итоге получим элемент g_k. Выпишем теперь элемент

$$g_k=\big(\tilde{R}_{y_0}(\tilde{R}_{y_1}\tilde{R}_y)\big)^{\nu_3-\nu_4}(yR_{y_0}^{\nu_2-\nu_3})R_{y_0}^{\nu_1-\nu_2-1}.$$

Проальтернируем полученный элемент $\nu_2-\nu_3$ раз по парам образующих y_0 из фрагмента $h=(yR_{y_0}^{\nu_2-\nu_3})$ и любой из образующих y, которые расположены левее этого фрагмента. Полученный элемент обозначим g_ν. Можно подсчитать, что полистепень элемента g_ν по образующим $y,y_0,\ldots,y_{m-2}$ равна $(\nu_1,\nu_2,\ldots,\nu_m)$. Кроме того, элемент g_ν содержит ν_2 кососимметрических наборов образующих по количеству, равному высотам столбцов соответствующей диаграммы Юнга.

В качестве примера выпишем в явном элемент g_ν для разбиения $\nu={}$ $=(15,6,4,3,1)$:

$$\bar{\bar{\bar{y}}}_0\big(\bar{\bar{\bar{y}}}_1\bar{\bar{\bar{y}}}\big)\Bigg(\bar{\bar{\bar{y}}}_2yy\Bigg(\bar{\bar{y}}_0(\bar{\bar{y}}\bar{\bar{y}}_1)\Big(\bar{\bar{y}}_2yy\Big(\bar{y}_0(\bar{y}\bar{y}_1)\big(\bar{y}_2yy(\bar{y}_3yy\tilde{\tilde{y}}\tilde{\tilde{\tilde{y}}})\big)\Big)\Big)\Bigg)\Bigg)\big(\tilde{y}_0(\tilde{y}\tilde{y}_1)\big)\big(y\tilde{\tilde{y}}_0\tilde{\tilde{\tilde{y}}}_0\big).$$

Тождество $g_\nu\equiv 0$ не выполняется в алгебре A_m. Действительно, заметим, что замена хотя бы одного элемента a_0 внутри фрагмента h на элемент a_{-1} приводит согласно таблице умножения алгебры A_m к равенству нулю такого слагаемого. Поэтому последние альтернирования по $\nu_2-\nu_3$ парам не повлияли на результат подстановки, она по-прежнему равна a_1. Пусть f_ν зависит от образующих $x_1,x_2,\ldots,x_n$ и является результатом полной линеаризации элемента g_ν. По вышесказанному элемент f_ν является ненулевым элементом пространства $P_n(\mathbf{V}_m)$. Хорошо известно, что в этом случае S_n-модуль $\Phi\mathrm{S}_nf_\nu$ является неприводимым модулем, соответствующим разбиению ν. Таким образом, получаем требуемое, т. е. $m_\nu\neq 0$. Теорема полностью доказана. $\square$

Литература

[1] Зайцев М. В. Целочисленность экспонент роста тождеств конечномерных алгебр Ли // Изв. РАН. Сер. мат. — 2002. — Т. 66, № 3. — С. 23—48.

[2] Зайцев М. В. Тождества конечномерных унитарных алгебр // Алгебра и логика. — 2011. — Т. 55, № 5. — С. 563—594.

[3] Зайцев М. В., Реповш Д. Четырёхмерная простая алгебра с дробной PI-экспонентой // Мат. заметки. — 2014. — Т. 95, № 4. — С. 538—553.

[4] Giambruno A., Mishchenko S., Zaicev M. Algebras with intermediate growth of the codimensions // Adv. Appl. Math. — 2006. — Vol. 37, no. 3. — P. 360—377.

[5] Giambruno A., Regev A., Zaicev M. Simple and semisimple Lie algebras and codimension growth // Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352, no. 4. — P. 1935—1946.

[6] Giambruno A., Shestakov I., Zaicev M. Finite dimensional nonassociative algebras and codimension growth // Adv. Appl. Math. — 2011. — No. 47. — P. 125—139.

[7] Giambruno A., Zaicev M. Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimate // Adv. Math. — 1998. — No. 142. — P. 221—243.

[8] Giambruno A., Zaicev M. On codimension growth of finitely generated associative algebras // Adv. Math. — 1998. — No. 140. — P. 145—155.

[9] Giambruno A., Zaicev M. Polynomial Identities and Asymptotic Methods. — Providence: Amer. Math. Soc., 2005. — (Math. Surveys Monographs; Vol. 122).

[10] Giambruno A., Zaicev M. Codimension growth of special simple Jordan algebras // Trans. Am. Math. Soc. — 2010. — Vol. 362, no. 6. — P. 3107—3123.

[11] Malyusheva O. A., Mishchenko S. P., Verevkin A. B. The Lie algebras varieties series of different fractional exponents // Dokl. Bolg. AN. — 2013. — Vol. 66, no. 3. — P. 321—330.