Автоморфизм-инвариантные модули*

А. А. ТУГАНБАЕВ
Российский экономический университет
им. Г. В. Плеханова
e-mail: tuganbaev@gmail.com

УДК 512.55

Ключевые слова: автоморфизм-инвариантный модуль, автоморфизм-продолжаемый модуль, псевдоинъективный модуль, квазиинъективный модуль.

Аннотация

Доказано, что все автоморфизм-инвариантные несингулярные правые A-модули являются инъективными в точности тогда, когда фактор-кольцо $A/G(A_A)$ кольца A по правому радикалу Голди $G(A_A)$ строго полупервично справа.

Abstract

A. A. Tuganbaev, Automorphism-invariant modules, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 129—135.

It is proved that all automorphism-invariant nonsingular right A-modules are injective if and only if the factor ring $A/G(A_A)$ of the ring A with respect to the right Goldie radical $G(A_A)$ is right strongly semiprime.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с ненулевой единицей, а модули унитарными. Модуль M называется *инъективным относительно модуля* X или X-*инъективным*, если для любого подмодуля X_1 в X каждый гомоморфизм $X_1 \to M$ продолжается до гомоморфизма $X \to M$. Модуль называется *инъективным*, если он инъективен относительно любого модуля. Модуль называется *квазиинъективным* или *самоинъективным*, если он инъективен относительно себя. Хорошо известно, что модуль M квазиинъективен в точности тогда, когда $f(M) \subseteq M$ для любого эндоморфизма f инъективной оболочки модуля M (см. [9] или [15, 17.11]. Ясно, что каждый инъективный модуль квазиинъективен. Каждая конечная циклическая группа является квазиинъективным неинъективным модулем над кольцом целых чисел.

Замечание 1. Пусть A — кольцо и $G(A_A)$ — его правый радикал Голди. В теореме 3.4 из [10] доказано, что все несингулярные квазиинъективные правые A-модули инъективны в точности тогда, когда $A/G(A_A)$ — строго полупервичное справа кольцо.

*Автор поддержан Российским фондом фундаментальных исследований.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 129—135.

Модуль называется *автоморфизм-инвариантным*, если он замкнут относительно автоморфизмов своей инъективной оболочки. Автоморфизм-инвариантные модули изучались в [1, 2, 4—6, 11, 12]. Модуль M называется *псевдоинъективным*, если для любого подмодуля X в M каждый мономорфизм $X \to M$ продолжается до эндоморфизма модуля M (о псевдоинъективных модулях см., например, [5, 8, 13]).

Замечание 2. В [5, теорема 16] доказано, что модуль M является автоморфизм-инвариантным модулем в точности тогда, когда M — псевдоинъективный модуль. Ясно, что каждый квазиинъективный модуль является автоморфизм-инвариантным (псевдоинъективным). Пусть F — поле порядка 2, A — конечная пятимерная алгебра над полем F, образованная всеми (3×3)-матрицами вида

$$\begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ 0 & f_{22} & 0 \\ 0 & 0 & f_{33} \end{pmatrix},$$

где $f_{ij} \in F$. В [12] показано, что $e_{11}A = e_{11}F + e_{12}F + e_{13}F$ — автоморфизм-инвариантный модуль, не являющийся квазиинъективным. Нетрудно проверить, что $e_{11}A$ — несингулярный циклический правый A-модуль.

Замечание 3. В [11, теорема 18] доказано, что если A — полупервичное правое кольцо Голди, то все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули инъективны.

В связи с замечаниями 1 и 3 мы докажем теорему 4, являющуюся первым основным результатом данной работы.

Теорема 4. *Пусть A — кольцо и $G(A_A)$ — его правый радикал Голди. Равносильны следующие условия*:

1) *все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули инъективны*;
2) *$A/G(A_A)$ — строго полупервичное справа кольцо.*

В связи с теоремой 4 заметим, что по замечанию 2 несингулярные автоморфизм-инвариантные модули не обязательно квазиинъективны. Кроме того, в [5, теорема 8] доказано, что автоморфизм-инвариантное справа несингулярное справа первичное кольцо инъективно справа. Поэтому мы докажем теорему 5, являющуюся вторым основным результатом данной работы.

Теорема 5. *Если A — первичное кольцо, то все несингулярные автоморфизм-инвариантные правые A-модули квазиинъективны.*

Доказательство теорем 4 и 5 разбито на ряд утверждений, некоторые из которых представляют самостоятельный интерес. Приведём необходимые определения и обозначения.

Кольцо A называется *строго полупервичным справа* [7], если каждый идеал X кольца A, являющийся существенным правым идеалом, содержит конечное подмножество Y с нулевым правым аннулятором $\mathrm{r}(Y)$. Кольцо A называется *полупервичным*, если A не имеет ненулевых нильпотентных идеалов. Кольцо называется *первичным*, если произведение двух любых его ненулевых идеалов не равно нулю. Модуль M называется *конечномерным*, если M не содержит бесконечных прямых сумм ненулевых подмодулей. Кольцо A называется *правым кольцом Голди*, если A — конечномерное справа кольцо с условием максимальности для правых аннуляторов.

Пусть A — кольцо, M — правый A-модуль, являющийся подмодулем модуля E. Если $M \cap E_1 \neq 0$ для любого ненулевого подмодуля E_1 в E, то M называется *существенным* подмодулем в E и говорят, что E — *существенное расширение* модуля M. Если E — инъективный модуль и M — существенный подмодуль в E, то E называется *инъективной оболочкой* модуля M. Инъективная оболочка единственна с точностью до изоморфизма. Для любого подмножества X модуля M_A через $\mathrm{r}(X)$ обозначается правый аннулятор $\{a \in A \mid Xa = 0\}$ множества X в кольце A. Через $\mathrm{Sing}(M)$ обозначается *сингулярный подмодуль* модуля M, т. е. $\mathrm{Sing}(M)$ — подмодуль в M, состоящий из всех таких элементов $m \in M$, что $\mathrm{r}(m)$ — существенный правый идеал кольца A. Модуль M называется *несингулярным* (*сингулярным*), если $\mathrm{Sing}(M) = 0$ (соответственно $\mathrm{Sing}(M) = M$). Подмодуль X модуля M называется *замкнутым* в M, если $X = X'$ для каждого подмодуля X' в M, являющегося существенным расширением модуля X. Через $\mathrm{G}(M)$ обозначается пересечение всех таких подмодулей X модуля M, что фактор-модуль M/X несингулярен. Модуль $\mathrm{G}(M)$ называется *радикалом Голди* модуля M. Хорошо известно, что $\mathrm{G}(M)$ — вполне инвариантный подмодуль в M, фактор-модуль $M/\mathrm{G}(M)$ несингулярен и $\mathrm{G}(M)$ — существенное расширение сингулярного подмодуля $\mathrm{Sing}(M)$ модуля M. Модуль M называется *равномерным*, если любые два его ненулевых подмодуля имеют ненулевое пересечение, т. е. M не имеет собственных замкнутых подмодулей. Модуль M называется *бесквадратным*, если M не имеет ненулевых подмодулей вида $X \oplus Y$ с условием $X \cong Y$.

Замечание 6. Модуль M называется *автоморфизм-продолжаемым*, если каждый автоморфизм произвольного подмодуля модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M. Каждый автоморфизм-инвариантный модуль является автоморфизм-продолжаемым [1, лемма 3]. Кольцо целых чисел $\mathbb{Z}$ — автоморфизм-продолжаемый модуль, не являющийся автоморфизм-инвариантным.

Другие используемые в работе определения и базовые результаты содержатся, например, в [14, 15].

Лемма 7 [1, лемма 7]. *Пусть M — автоморфизм-продолжаемый A-модуль и* $M = \bigoplus_{i \in I} M_i$.

1. *Если все M_i — квазиинъективные модули, то модуль M квазиинъективный.*
2. *Если все M_i — псевдоинъективные равномерные модули, то модуль M квазиинъективный.*

Лемма 8 [5, теорема 3, теорема 6]. *Пусть M — несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль. Тогда существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — квазиинъективный несингулярный модуль, Y — бесквадратный несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль, модули X и Y инъективны относительно друг друга, любая сумма замкнутых подмодулей модуля Y является автоморфизм-инвариантным модулем, $\mathrm{Hom}(X,Y) = \mathrm{Hom}(Y,X) = 0$ и $\mathrm{Hom}(Y_1,Y_2) = 0$ для любых подмодулей Y_1 и Y_2 в Y с условием $Y_1 \cap Y_2 = 0$.*

Лемма 9 [11, теорема 2]. *Модуль M является автоморфизм-инвариантным в точности тогда, когда любой изоморфизм между двумя существенными подмодулями модуля M продолжается до эндоморфизма модуля M.*

Лемма 10. *Пусть A — кольцо и Y — несингулярный правый A-модуль.*

1. *Для любого ненулевого элемента $y \in Y$ существует ненулевой правый идеал B кольца A, изоморфный подмодулю циклического модуля yA.*
2. *Если $\{y_i\}_{i\in Y}$, $|I| \geqslant 2$, — такое подмножество модуля Y, что $\mathrm{Hom}(Y_i,Y_j)=0$ для любых подмодулей $Y_i \subseteq y_iA$ и $Y_j \subseteq y_jA$ для всех $i \neq j$, то найдётся такое множество $\{B_i\}_{i\in I}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что для любого i правый A-модуль B_i изоморфен подмодулю в y_iA и $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. Так как $y_A \cong A_A/\mathrm{r}(y)$ и модуль yA несингулярный, то правый идеал $\mathrm{r}(y)$ не является существенным. Поэтому найдётся такой ненулевой правый идеал B, что $B \cap \mathrm{r}(y) = 0$. Кроме того, $yA \cong A_A/\mathrm{r}(y)$. Поэтому yA содержит ненулевой подмодуль, изоморфный модулю B_A.

Докажем утверждение 2. В I зафиксируем несовпадающие индексы i и j. По первому утверждению существуют такие ненулевые правые идеалы B_i и B_j кольца A, что y_iA содержит ненулевой подмодуль Y_i, изоморфный правому A-модулю B_i, и y_jA содержит ненулевой подмодуль Y_j, изоморфный правому A-модулю B_j. По условию $\mathrm{Hom}(Y_i,Y_j) = 0$. Тогда $\mathrm{Hom}(B_i,B_j) = 0$, поскольку $B_i \cong Y_i$ и $B_j \cong Y_j$. Для любого элемента $b_j \in B_j$ правило $x \to b_jx$, $x \in B_i$, задаёт гомоморфизм из B_i в B_j. Так как $\mathrm{Hom}(B_i,B_j) = 0$, то $b_jB_i = 0$, откуда следует, что $B_iB_j = 0$. □

Теорема 11. *Пусть A — кольцо и Y — несингулярный бесквадратный автоморфизм-инвариантный правый A-модуль.*

1. *Если Y является существенным расширением прямой суммы равномерных модулей, то Y — существенное расширение квазиинъективного модуля, являющегося прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.*
2. *Если Y — конечномерный модуль, то Y — существенное расширение квазиинъективного модуля, являющегося конечной прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.*
3. *Если модуль Y не является конечномерным, то существует такое бесконечное множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что $B_iB_j = 0$ для всех $i \neq j$.*

4. *Если A — конечное подпрямое произведение первичных колец, то Y — конечномерный модуль, являющийся существенным расширением квазиинъективного модуля $Y_1\oplus\ldots\oplus Y_n$, где все Y_i — квазиинъективные равномерные модули.*
5. *Если кольцо A строго полупервично справа, то Y — инъективный модуль.*
6. *Если фактор-кольцо $A/\mathrm{G}(A_A)$ строго полупервично справа, то Y — инъективный модуль.*
7. *Если кольцо A первично, то Y — квазиинъективный равномерный модуль.*

Доказательство. Докажем утверждение 1. По условию Y — существенное расширение прямой суммы равномерных модулей Y_i, $i\in I$. Каждый равномерный модуль Y_i является существенным подмодулем некоторого замкнутого равномерного подмодуля M_i модуля M. Обозначим $M=\sum\limits_{i\in I}M_i$. Тогда $M=\bigoplus\limits_{i\in I}M_i$ и Y — существенное расширение модуля M. По лемме 8 M — автоморфизм-инвариантный модуль. Кроме того, M — прямая сумма равномерных модулей. По утверждению 2 леммы 7 и замечанию 2 модуль M квазиинъективный. Все равномерные прямые слагаемые M_i квазиинъективного модуля M тоже квазиинъективны.

Докажем утверждение 2. Конечномерный модуль Y является существенным расширением конечной прямой суммы равномерных модулей. По первому утверждению Y — существенное расширение квазиинъективного модуля, являющегося конечной прямой суммой равномерных квазиинъективных модулей.

Докажем утверждение 3. Так как модуль Y не является конечномерным, то Y содержит бесконечную прямую сумму $\bigoplus\limits_{i=1}^{\infty}y_iA$ ненулевых циклических подмодулей. Для любых несовпадающих натуральных чисел i, j и произвольных подмодулей $Y_i\subseteq y_iA$, $Y_j\subseteq y_jA$ имеем $Y_i\cap Y_j\subseteq y_iA\cap y_jA=0$, откуда по лемме 8 получаем, что $\mathrm{Hom}(Y_i,Y_j)=0$. По утверждению 2 леммы 10 найдётся такое множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что для любого натурального числа i правый A-модуль B_i изоморфен подмодулю в y_iA и $B_iB_j=0$ для всех $i\neq j$.

Докажем утверждение 4. По второму утверждению достаточно доказать, что Y — конечномерный модуль. Допустим противное. По утверждению 3 существует такое бесконечное множество $\{B_i\}_{i=1}^{\infty}$ ненулевых правых идеалов кольца A, что $B_iB_j=0$ для всех $i\neq j$. Так как A — конечное подпрямое произведение первичных колец, то существует такое конечное множество $\{P_k\}\sum\limits_{k=1}^{n}$ первичных идеалов кольца A, что $P_1\cap\ldots\cap P_n=0$. Так как $B_i\neq 0$ для всех i и $P_1\cap\ldots\cap P_n=0$, то для любого натурального числа i найдётся такой первичный идеал $P_{\alpha(i)}\in\{P_i\}_{i=1}^{n}$, что B_i не содержится в $P_{\alpha(i)}$. Так как $P_{\alpha(i)}$ — первичный идеал и $B_iB_j=0\subseteq P_{\alpha(i)}$ для всех $j\neq i$, то B_j содержится в $P_{\alpha(i)}$ для всех $j\neq i$. Кроме того, B_j не содержится в $P_{\alpha(j)}$. Отсюда следует, что все идеалы $P_{\alpha(i)}$ различны. Это противоречит тому, что $\{P_k\}\sum\limits_{k=1}^{n}$ — конечное множество.

Докажем утверждение 5. Так как кольцо A строго полупервично справа, то A — конечное подпрямое произведение первичных колец [7, теорема 1]. По утверждению 4 Y — существенное расширение некоторого квазиинъективного модуля Y'. По замечанию 1 все несингулярные квазиинъективные правые A-модули инъективны. Поэтому Y' — инъективный существенный подмодуль модуля Y. Тогда $Y = Y'$ и модуль Y инъективный.

Докажем утверждение 6. Так как модуль Y несингулярный, то $\mathrm{G}(Y) = 0$. Тогда $Y\mathrm{G}(A_A) \subseteq \mathrm{G}(M) = 0$. Поэтому Y естественным образом является правым $A/\mathrm{G}(A_A)$-модулем. Непосредственно проверяется, что Y — несингулярный бесквадратный $A/\mathrm{G}(A_A)$-модуль. С помощью леммы 9 проверяется, что Y — автоморфизм-инвариантный $A/\mathrm{G}(A_A)$-модуль. Так как фактор-кольцо $A/\mathrm{G}(A_A)$ строго полупервично справа, то по утверждению 5 Y — инъективный $A/\mathrm{G}(A_A)$-модуль. Поэтому Y — квазиинъективный A-модуль. По замечанию 1 Y — инъективный A-модуль.

Докажем утверждение 7. Допустим, что модуль Y равномерный. Так как Y — автоморфизм-инвариантный модуль, то по замечанию 2 модуль Y псевдоинъективный. По утверждению 2 леммы 7 псевдоинъективный равномерный модуль Y квазиинъективен.

Допустим, что модуль Y неравномерный. Тогда существуют такие ненулевые элементы $y_1, y_2 \in Y$, что $y_1A \cap y_2A = 0$. По лемме 8 $\mathrm{Hom}(Y_1, Y_2) = 0 = \mathrm{Hom}(Y_2, Y_1)$ для любых подмодулей $Y_1 \subseteq y_1A$ и $Y_2 \subseteq y_2A$. По утверждению 2 леммы 10 найдутся такие ненулевые правые идеалы B_1 и B_2 кольца A, что $B_1B_2 = 0$. Так как кольцо A первично, получено противоречие. □

Следствие 12. *Пусть A — кольцо и M — несингулярный автоморфизм-инвариантный правый A-модуль. Если фактор-кольцо $A/\mathrm{G}(A_A)$ строго полупервично справа, то M — инъективный модуль.*

Доказательство. По лемме 8 существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — квазиинъективный модуль, Y — бесквадратный несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль. По утверждению 6 теоремы 11 Y — инъективный модуль. По замечанию 1 модуль X инъективный. Тогда $M = X \oplus Y$ — инъективный модуль. □

Окончание доказательства теоремы 4. Импликация $2 \Longrightarrow 1$ вытекает из следствия 12. Импликация $1 \Longrightarrow 2$ вытекает из того, что каждый квазиинъективный модуль является автоморфизм-инвариантным. □

Окончание доказательства теоремы 5. Пусть A — первичное кольцо и M — несингулярный автоморфизм-инвариантный правый A-модуль. По лемме 8 существует такое прямое разложение $M = X \oplus Y$, что X — квазиинъективный модуль, Y — бесквадратный несингулярный автоморфизм-инвариантный модуль и модули X, Y инъективны относительно друг друга. По утверждению 7 теоремы 11 Y — квазиинъективный модуль. Доказано, что $M = X \oplus Y$, где модули X и Y квазиинъективны и инъективны относительно друг друга. По утверждению 1 леммы 7 и замечанию 6 модуль M квазиинъективен. □

Литература

[1] Туганбаев А. А. Автоморфизмы подмодулей и их продолжение // Дискрет. мат. — 2013. — Т. 25, № 1. — С. 144—151.

[2] Туганбаев А. А. Характеристические подмодули инъективных модулей // Дискрет. мат. — 2013. — Т. 25, № 2. — С. 85—90.

[3] Alahmadi A., Er N., Jain S. K. Modules which are invariant under monomorphisms of their injective hulls // J. Austral. Math. Soc. — 2005. — Vol. 79, no. 3. — P. 2265—2271.

[4] Dickson S. E., Fuller K. R. Algebras for which every indecomposable right module is invariant in its injectve envelope // Pacific J. Math. — 1969. — Vol. 31, no. 3. — P. 655—658.

[5] Er N., Singh S., Srivastava A. K. Rings and modules which are stable under automorphisms of their injectve hulls // J. Algebra. — 2013. — Vol. 379. — P. 223—229.

[6] Guil Asensio P. A., Srivastava A. K. Automorphism-invariant modules satisfy the exchange property // J. Algebra. — 2013. — Vol. 388. — P. 101—106.

[7] Handelman D. Strongly semiprime rings // Pacific J. Math. — 1975. — Vol. 60, no. 1. — P. 115—122.

[8] Jain S. K., Singh S. Quasi-injective and pseudo-injective modules // Can. Math. Bull. — 1975. — Vol. 18, no. 3. — P. 359—366.

[9] Johnson R. E., Wong F. T. Quasi-injective modules and irreducible rings // J. London Math. Soc. — 1961. — Vol. 36. — P. 260—268.

[10] Kutami M., Oshiro K. Strongly semiprime rings and nonsingular quasi-injective modules // Osaka J. Math. — 1980. — Vol. 17. — P. 41—50.

[11] Lee T. K., Zhou Y. Modules which are invariant under automorphisms of their injective hulls // J. Algebra Appl. — 2013. — Vol. 6, no. 2.

[12] Singh S., Srivastava A. K. Rings of invariant module type and automorphism-invariant modules // Ring Theory and Its Applications (volume in honor of T. Y. Lam). — Providence: Amer. Math. Soc., 2014. — (Contemp. Math.).

[13] Teply M. L. Pseudo-injective modules which are not quasiinjective // Proc. Am. Math. Soc. — 1975. — Vol. 49, no. 2. — P. 305—310.

[14] Tuganbaev A. Semidistributive Modules and Rings. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1998.

[15] Wisbauer R. Foundations of Module and Ring Theory. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.