Продолжение эндоморфизмов полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$ до эндоморфизмов $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$ для решёточно-упорядоченного коммутативного кольца R с единицей без делителей нуля

О. И. ЦАРЬКОВ
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
e-mail: olegtsts@gmail.com

УДК 512.55+512.64

Ключевые слова: целостные кольца, упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, эндоморфизмы, автоморфизмы.

Аннотация

Пусть R — решёточно-упорядоченное коммутативное кольцо без делителей нуля, $\mathrm{G}_n(R)$ — подполугруппа группы $\mathrm{GL}_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами, $\mathrm{GE}_n^+(R)$ — её подполугруппа, построенная с помощью матриц элементарных преобразований, диагональных матриц и матриц перестановок. В работе описано, при каких условиях можно продолжить произвольный эндоморфизм с $\mathrm{GE}_2^+(R)$ до $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$.

Abstract

O. I. Tsarkov, Extension of endomorphisms of the subsemigroup $\mathrm{GE}_2^+(R)$ *to endomorphisms of* $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$*, where R is a partially-ordered commutative ring without zero divisors*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 155—184.

Let R be a partially ordered commutative ring without zero divisors, $G_n(R)$ be the subsemigroup of $\mathrm{GL}_n(R)$ consisting of matrices with nonnegative elements, and $\mathrm{GE}_n^+(R)$ be its subsemigroup generated by elementary transformation matrices, diagonal matrices, and permutation matrices. In this paper, we describe in which cases endomorphisms of $\mathrm{GE}_2^+(R)$ can be extended to endomorphisms of $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$.

1. Введение

В работе рассматривается проблема классификации эндоморфизмов полугруппы $G_2(R)$, которая состоит из матриц размера 2×2 с неотрицательными (в смысле некоторого отношения порядка на R) элементами. В действительности берутся эндоморфизмы не самой полугруппы $G_2(R)$, а её подполугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R)$, которая в некоторых случаях совпадает с $G_2(R)$, а в некоторых нет (подробнее про описание этой подполугруппы см. в разделе 2).

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 155—184.

Заметим, что существование некоторых типов эндоморфизмов сразу очевидно. Такие автоморфизмы называются «стандартными» и имеют один из следующих видов:

— внутренний: $X \mapsto A \cdot X \cdot A^{-1}$ при $A, A^{-1} \in G_n(R)$,
— полукольцевой: $X = (a_{ij}) \mapsto \big(\varphi(a_{ij})\big)$, где φ — автоморфизм R_+,
— центральный: $X \mapsto \lambda(X) \cdot X$, где $\lambda(X)\colon G_n(R) \to R_+$ — гомоморфизм.

Через R_+ здесь обозначены все неотрицательные элементы кольца R.

Существует ряд работ, в которых было дано описание всех автоморфизмов $G_n(R)$ для различных типов колец R.

В [6] А. В. Михалёв и М. А. Шаталова описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geqslant 2$. В [2] Е. И. Бунина и А. В. Михалёв описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$, если R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geqslant 3$. В [3] были найдены необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны. Е. И. Бунина и П. П. Семёнов в [4] описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка, большего двух, над коммутативными частично упорядоченными кольцами с $1/2$, а в [5] нашли необходимые и достаточные условия для их элементарной эквивалентности. В [1] описываются автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ при условии, что R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с $1/2$, порождаемое своими обратимыми элементами. Во всех работах было существенно, что в кольце R обратима двойка или хотя бы какое-то целое число. В [7] П. П. Семёнов описал автоморфизмы полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ при $n \geqslant 2$. Оказывается, что при $n = 2$ существуют автоморфизмы нестандартного вида, а при $n \geqslant 3$ все автоморфизмы полугруппы $G_n(\mathbb{Z})$ стандартны, т. е. для кольца целых чисел просто являются внутренними (сопряжениями с помощью некоторой матрицы подстановки).

Таким образом, уже для целых чисел в случае $n = 2$ стандартность всех автоморфизмов теряется, поэтому существования и продолжаемости любых автоморфизмов $\mathrm{GE}_2^+(R)$ нет в общем случае. Возникает необходимость в описании автоморфизмов и эндоморфизмов этой полугруппы в зависимости от устройства кольца R. В данной работе объясняется, как перейти от рассмотрения кольца R к кольцу $R[x]$, т. е. как продолжить соответствующие эндоморфизмы.

2. Основные понятия

Обозначение. Пусть R — упорядоченное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля, причём на отношение порядка накладываются следующие условия:

— для любых $a \geqslant 0$ и $b > 0$ если a/b — обратимый элемент, то он неотрицательный (a/b — элемент кольца, который при домножении на b даёт a),
— для каждого $a \in R$ найдутся $a_+ \geqslant 0$ и $a_- \leqslant 0$, такие что $a = a_+ + a_-$.

Обозначение. Будем рассматривать $R[x]$ — кольцо многочленов с коэффициентами из R и независимой переменной x с уже введённым на нём одном из двух отношений порядка:

— полное отношение порядка (его можно ввести, только если отношение порядка на R также полно), при котором неотрицательными считаются те и только те элементы, у которых старший коэффициент неотрицателен (в смысле линейного порядка R),

— частичное отношение порядка, при котором неотрицательными считаются те и только те элементы, у которых все коэффициенты неотрицательны (в смысле порядка R).

В обоих случаях множество неотрицательных элементов обозначим через $R[x]_+$.

Замечание. Будем называть элементы кольца R коэффициентами (так как они являются коэффициентами многочленов из $R[x]$).

Определение 1. Пусть Q — некоторое кольцо (R или $R[x]$). Пусть $\mathbf{P}$ — подполугруппа в $\mathrm{GL}_2(Q)$, порождённая

— диагональными обратимыми неотрицательными матрицами,

— неотрицательными матрицами элементарных преобразований, т. е. матрицами $B_{i,j} = E + \lambda \cdot E_{i,j}$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, $i < j$, $\lambda \in Q$,

— матрицами перестановок.

Эти матрицы будем называть $\mathcal{P}$-матрицами.

Определение 2. Пусть $G_2(Q)$ — подполугруппа $\mathrm{GL}_2(Q)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами (из Q_+).

Замечание. Очевидно, $\mathbf{P} \subset G_2(Q)$, так как порождающие элементы $\mathbf{P}$ принадлежат $G_2(Q)$.

Определение 3. Две матрицы $A, B \in G_n(Q)$ называются *$\mathcal{P}$-эквивалентными*, если существуют матрицы $A_j \in G_n(Q)$, $j = 0, 1, \ldots, k$, $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы P_i, $\bar{P}_i$, Q_i, $\bar{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, 1, \ldots, k$, такие что $P_i A_i \bar{P}_i = Q_i A_{i+1} \bar{Q}_i$ для всех i.

Определение 4. $\mathrm{GE}_2^+(Q)$ — подполугруппа в $G_2(Q)$, порождённая всеми матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$.

Обозначение. Будем говорить, что матрица *приводима*, если её можно привести элементарными преобразованиями над Q к единичной.

Лемма 1. *Если $A \in \mathrm{GE}_2^+(Q)$, то $A = \prod\limits_{k=1}^{n} A_k$, где все матрицы A_k принадлежат $\mathrm{GE}_2^+(Q)$ и приводимы.*

Доказательство. Полугруппа $\mathrm{GE}_2^+(Q)$ порождается матрицами, $\mathcal{P}$-эквивалентными матрицам из $\mathbf{P}$. Значит, $A = \prod\limits_{k=1}^{n} A_k$, где A_k — матрицы, $\mathcal{P}$-эквивалентные матрицам из $\mathbf{P}$. Остаётся проверить, что такие матрицы приводимы.

1. Очевидно, что все матрицы из $\mathbf{P}$ приводимы, так как матрица приводима тогда и только тогда, когда она равна $\prod\limits_{k=1}^{m} X_k \cdot E \cdot \prod\limits_{k=1}^{l} Y_k$, где X_k, Y_k — матрицы

элементарных преобразований (обратных к преобразованиям, приводящим её к единичной), но все матрицы в множестве порождающих элементов $\mathbf{P}$ являются матрицами элементарных преобразований (см. определение 1).

2. Если матрица C приводима, то $\mathcal{P}$-эквивалентная ей матрица D также приводима. Применив определение $\mathcal{P}$-эквивалентности, найдём такие матрицы C_j, $j = 0, 1, \ldots, m$, $C = C_0$, $D = C_m$, и P_i, $\bar{P}_i$, Q_i, $\bar{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, 1, \ldots, m$, что $P_i C_i \bar{P}_i = Q_i C_{i+1} \bar{Q}_i$ для всех i. По индукции проверим, что C_i приводима, имея в качестве базы приводимость $C_0 = C$. Если C_i приводима, то $C_{i+1} = Q_i^{-1} P_i C_i \bar{P}_i \bar{Q}_i^{-1}$, так как, как замечено в пункте 1 этого доказательства, матрицы из $\mathbf{P}$ являются произведениями матриц элементарных преобразований (в частности, P_i, $\bar{P}_i$, Q_i, $\bar{Q}_i$ являются таковыми, что здесь и использовано). Остаётся заметить, что $D = C_m$, значит, D приводима.

Объединяя пункты 1 и 2, получаем требуемое. $\square$

3. Формулировка основных утверждений

Целью работы является следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть $\mathcal{F}$ — отображение, определённое на матрицах*

— $\mathrm{diag}[a, b]$, $a, b \in R_+^*$,
— $B_{1,2}(y)$, $y \in R_+[x]$,
— $B_{2,1}(y)$, $y \in R_+[x]$,
— $S_{(12)}$

таким образом, что выполняются следующие соотношения:

— *образы всех верных соотношений с участием указанных матриц с элементами из R_+,*
— $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big) = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big) \cdot \mathcal{F}(S)$ *для всех* $y \in R_+[x]$,
— $\mathcal{F}^2(S) = E_2$,
— $\mathcal{F}(B_{1,2}\big(yab^{-1})\big) \cdot \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a, b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a, b]) \cdot \mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big)$ *для всех* $y \in R_+[x]$ *и* $a, b \in R_+^*$,
— $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(yba^{-1})\big) \cdot \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a, b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a, b]) \cdot \mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big)$ *для всех* $y \in R_+[x]$ *и* $a, b \in R_+^*$,
— $\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_1)\big)\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_2)\big) = \mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_1 + y_2)\big)$ *для всех* $y_1, y_2 \in R_+[x]$.

Тогда $\mathcal{F}$ доопределяется до эндоморфизма Φ полугруппы $\mathbf{P}$ для кольца $R[x]$, а в случае полного отношения порядка на $R[x]$ и до эндоморфизма полугруппы $\mathrm{GE}_+(R[x])$.

Заметим, что здесь речь идёт о доопределении до эндоморфизма полугруппы $\mathbf{P}$. Однако в некоторых случаях эндоморфизм продолжается и до $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$ и даже до $G_n(R[x])$, поэтому эта теорема играет немаловажную роль в классификации соответствующих эндоморфизмов для кольца $R[x]$.

4. Общие факты о понижающих, нейтральных и повышающих преобразованиях

Перед тем как приступить к рассмотрению преобразований матриц размера 2×2, следует понять, что происходит при преобразовании матриц размера 2×1 и как изначальная матрица связана с результатом применения некоторого количества преобразований к ней.

Определение 5. Будем говорить, что $a \in R$ делится на $c \in R$, если существует такой $b \in R$, что $a = b \cdot c$.

Замечание. Если имеет место делимость, то b, называемое результатом деления (или частным), определяется однозначно при $c \neq 0$, так как из $a = b_1 \cdot c$ и $a = b_2 \cdot c$ следует, что $0 = (b_1 - b_2) \cdot c$, поэтому $b_1 - b_2 = 0$ ввиду отсутствия делителей нуля. Значит, $b_1 = b_2$.

Лемма 2. *Если матрица $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ получена из $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ элементарными преобразованиями над R, то не существует необратимого $c \in R$, такого что λ_1 и λ_2 делятся на него.*

Доказательство. Предположим, что это не так. Если обратить последовательность элементарных преобразований, то получится последовательность преобразований, применение которой к $\left(\begin{smallmatrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{smallmatrix}\right)$ даёт $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$. Очевидно, что свойство, что оба элемента матрицы делятся на c, сохраняется при элементарном преобразовании, поэтому элементы $\left(\begin{smallmatrix}1\\ 0\end{smallmatrix}\right)$ тоже делятся на c, но элемент 1 не может делиться на необратимый элемент c по определению. $\square$

Лемма 3. *Если матрица*

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots \\ C_1 \cdot x^s + \ldots \end{pmatrix}$$

получена из

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots \\ C_2 \cdot x^s + \ldots \end{pmatrix}$$

(*константными*) *элементарными преобразованиями над R и $C_1, C_2 \neq 0$, то C_1 и C_2 отличаются домножением на обратимый элемент R.*

Доказательство. Поскольку преобразования константные, то утверждение сводится к тому, что матрицы $\left(\begin{smallmatrix}0\\ C_1,\end{smallmatrix}\right)$ и $\left(\begin{smallmatrix}0\\ C_2\end{smallmatrix}\right)$ получаются друг из друга элементарными преобразованиями. Как уже было замечено в доказательстве предыдущей леммы, свойство делиться одновременно на число у обоих элементов матрицы сохраняется при элементарном преобразовании. Значит, C_1 и C_2 делятся друг на друга, т. е. существуют такие числа $k, m \in R$, что

$$\begin{cases} C_1 = k \cdot C_2, \\ C_2 = m \cdot C_1. \end{cases}$$

Значит, $C_1 C_2 = km \cdot C_1 C_2$, $C_1 C_2 \cdot (1 - km) = 0$ и $km = 1$. Следовательно, k обратим, что и требовалось. $\square$

Лемма 4. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \dots \\ C_1 \cdot x^s + \dots \end{pmatrix}.$$

Пусть есть некоторая последовательность константных элементарных преобразований, переводящая матрицу

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \dots \\ C_2 \cdot x^s + \dots \end{pmatrix},$$

причём $C_1, C_2 \neq 0$. *Тогда эти две матрицы могут быть получены друг из друга растяжением (домножением слева на диагональную обратимую матрицу) и одним элементарным преобразованием с константным коэффициентом.*

Доказательство. Вторая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b \\ \lambda_3 \cdot a + \lambda_4 \cdot b \end{pmatrix},$$

причём матрица

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

получена из единичной последовательностью тех же самых преобразований, значит, $\binom{\lambda_1}{\lambda_2}$ и $\binom{\lambda_3}{\lambda_4}$ могут быть получены из $\binom{1}{0}$ и $\binom{0}{1}$ соответственно, т. е. они получены из единичных столбцов константными преобразованиями.

Коэффициент при x^s у верхнего элемента второй матрицы равен 0, значит, $\lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot C_1 = 0$, поэтому $\lambda_2 \cdot C_1 = 0$, и следовательно, $\lambda_2 = 0$. По лемме 2 λ_1 не может быть необратимым, иначе λ_1, λ_2 делятся одновременно на один и тот же необратимый элемент, следовательно, λ_1 обратим.

Коэффициент при x^s у нижнего элемента второй матрицы равен C_2, следовательно, $\lambda_3 \cdot 0 + \lambda_4 \cdot C_1 = C_2$, поэтому $\lambda_4 \cdot C_1 = C_2$. Значит, λ_4 обратим по лемме 3.

Таким образом, из первой матрицы можно получить вторую, совершив растяжение

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

с обратимыми коэффициентами и преобразование строк с коэффициентом $\lambda_3 \cdot \lambda_1^{-1}$:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot a \\ \lambda_4 \cdot b \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot a \\ \lambda_3 \cdot a + \lambda_4 \cdot b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \cdot a + \lambda_2 \cdot b \\ \lambda_3 \cdot a + \lambda_4 \cdot b \end{pmatrix}. \qquad \square$$

Замечание. Последнее элементарное преобразование не изменяет степени многочленов, стоящих в матрице, так как $\deg(b) > \deg(a)$.

Лемма 5. *Пусть*

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \\ C_1 \cdot x^s + \ldots & C_3 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix} \in G_n(R[x]).$$

Пусть есть некоторая последовательность константных элементарных преобразований строк, переводящая матрицу

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \in G_n(R[x])$$

(имеющую обратимый определитель) в матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \\ C_2 \cdot x^s + \ldots & C_4 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix} \in G_n(R[x]),$$

причём $C_1, C_2, C_3, C_4 \neq 0$. Тогда эти две матрицы могут быть получены друг из друга положительным растяжением (домножением слева на диагональную обратимую матрицу) и одним элементарным преобразованием с константным коэффициентом.

Если же в результате применения последовательности элементарных преобразований получена матрица

$$\begin{pmatrix} C_2 \cdot x^s + \ldots & C_4 \cdot x^t + \ldots \\ 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix},$$

то эти две матрицы могут быть получены друг из друга одной перестановкой, положительным растяжением и одним элементарным преобразованием с константным коэффициентом.

Доказательство. Вторая часть леммы легко следует из первой. Для доказательства первой заметим, что для столбцов матрицы можно применить предыдущую лемму, получив, что первый столбец второй матрицы получается из первого столбца первой растяжением

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_4 \end{pmatrix}$$

с обратимыми коэффициентами и преобразованием строк с коэффициентом $\lambda_3 \cdot \lambda_1^{-1}$. Поскольку λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 зависят только от преобразований строк, указанных в условии леммы, то такими же преобразованиями второй столбец второй матрицы получается из второго столбца первой. А значит, вторая матрица целиком получается из первой такими преобразованиями.

Остаётся проверить, что растяжение положительно. Поскольку матрица

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

имеет ненулевой определитель, то $a \neq 0$ или $c \neq 0$. Пусть для определённости $a \neq 0$. Из доказательства предыдущей леммы видно, что один из элементов второй матрицы равен $\lambda_1 \cdot a$, значит, он принадлежит $R[x]_+$. Кроме того, $a \in R[x]_+$

по условию, значит, старшие коэффициенты этих многочленов неотрицательны. Их частное равно λ_1 — обратимому элементу R, следовательно, $\lambda_1 \in R_+$ по свойству отношения порядка R.

Также из доказательства предыдущей леммы следует, что один из элементов второй матрицы равен $\lambda_3 \cdot a + \lambda_4 \cdot b$, значит, этот элемент принадлежит $R[x]_+$ и его старший коэффициент положителен в R. В то же время, так как $\deg(b) > \deg(a)$ и λ_3, λ_4 — константы, этот коэффициент равен старшему коэффициенту b (который тоже положителен), умноженному на λ_4, и λ_4 обратим. К тому же получается, что он положителен, т. е. $\lambda_4 \in R_+$, что и завершает доказательство. $\square$

Определение 6. Матрица $A \in G_2(R[x])$ *особая*, если ровно один из её элементов нулевой.

Лемма 6. *Если матрица $A \in G_2(R[x])$* неособая, *то сумма степеней элементов на главной и второстепенной диагоналях совпадают.*

Доказательство. Заметим, что A не может содержать более двух нулевых элементов, иначе её определитель равен 0, что противоречит тому, что $A \in G_2(R[x])$. Рассмотрим разные случаи в зависимости от того, сколько нулей содержит A.

I. A содержит два нуля. Тогда они не могут находиться в одной строке или в одном столбце из-за обратимости матрицы. Значит, они находятся на одной из диагоналей. Произведение ненулевых элементов на другой диагонали с точностью до знака совпадает с определителем A, который обязан быть обратимой константой, значит, эти элементы — константы. Следовательно, степени всех элементов A нулевые и требуемое верно.

II. A содержит ровно один нулевой элемент. Значит, A особая, что неверно.

III. В A нет нулевых элементов. Если при этом произведения элементов на главной и второстепенной диагоналях — константы, то все элементы константные (так как они ненулевые) и требуемое верно. Если на одной из диагоналей произведение элементов неконстантное, то произведение элементов на другой обязано иметь такую же степень ввиду того, что разность этих произведений равна константному определителю. Остаётся заметить, что степень произведения элементов — это сумма их степеней. $\square$

Лемма 7. *Если $A \in G_2(R[x])$ особая, то на диагонали, не содержащей нулевых элементов, стоят константные элементы* (*иными словами, хотя бы три элемента этой матрицы — константы*).

Доказательство. Константный определитель матрицы A по модулю совпадает с произведением элементов на диагонали, на которой нет нулевых элементов, значит, эти элементы — константы. $\square$

Определение 7. *Максимальный столбец* матрицы $A \in G_2(R[x])$ — столбец, в котором находится элемент с максимальной степенью среди всех элементов матрицы.

Замечание. Два столбца могут быть максимальными одновременно.

Лемма 8. *Если оба столбца $A \in G_2(R[x])$ максимальны, то либо все элементы имеют одинаковую степень, либо только два элемента имеют максимальную степень.*

Доказательство. Поскольку оба столбца максимальны, есть по крайней мере два элемента с максимальной степенью. Осталось лишь проверить, что их не может быть ровно три.

В случае когда три элемента имеют одинаковую степень, строго большую степени четвёртого, они имеют степени не меньше 1, откуда по лемме 7 следует, что матрица неособая. Тогда по лемме 6 получаем, что сумма степеней элементов на диагоналях совпадают, чего не может быть в рассматриваемом случае. Получено противоречие, что и требовалось. $\square$

Определение 8. Матрица $A \in G_2(R[x])$ называется *строго степенной*, если степени элементов в максимальном столбце различны, и *нестрого степенной* в противном случае.

Замечание. Если оба столбца максимальны, то по лемме 8 определение корректно.

Определение 9. Элементарное преобразование, применённое к $A \in G_2(R[x])$, называется *понижающим*, если в результате его применения степень хотя бы одного из элементов A уменьшилась, а степени других не увеличились.

Элементарное преобразование называется *нейтральным*, если в результате его применения степени элементов A остались такими же.

Лемма 9. *Если матрица $B \in G_2(R[x])$ получена из $A \in G_2(R[x])$ элементарным преобразованием строк с отрицательным коэффициентом, то это преобразование понижающее или нейтральное.*

Доказательство. Пусть $\lambda \in R[x]$ — коэффициент этого преобразования. Старший коэффициент многочлена λ отрицателен, так как $-\lambda \in R[x]_+$. Без ограничения общности положим, что это преобразование переводит

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

в

$$B = \begin{pmatrix} a + \lambda \cdot c & b + \lambda \cdot d \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Нужно проверить, что ни один из элементов не мог увеличить свою степень при этом преобразовании. Пусть, от противного, существует такой $c \in R[x]_+$, что $\deg(a + \lambda \cdot c) > \deg(a)$. Тогда $\deg(\lambda \cdot c) > \deg(a)$. Значит, старший коэффициент этого многочлена положителен, следовательно, старший коэффициент $\lambda \cdot c$ отрицателен, т. е. старший коэффициент $a + \lambda \cdot c$ отрицателен (так как $\deg(\lambda \cdot c) > \deg(a)$). Получим, что $a + \lambda \cdot c \notin R[x]_+$. Но это противоречит тому, что $B \in G_2(R[x])$, Полученное противоречие завершает доказательство. $\square$

Лемма 10. *Если матрица $B \in G_2(R[x])$ получена из $A \in G_2(R[x])$ понижающим преобразованием строк, то степень одного из элементов в максимальном столбце A уменьшилась при применении этого преобразования.*

Доказательство. Рассмотрим возможные случаи.

I. Матрица A особая. Тогда по лемме 7 степени всех её элементов, кроме, быть может, одного, равны 0. Значит, при применении понижающего преобразования могла уменьшиться степень только одного элемента. Поскольку она уменьшилась, то она была не меньше 1, и следовательно, этот элемент находился в единственном максимальном столбце матрицы (он единственен по лемме 7). Значит, у одного из элементов в максимальном столбце A уменьшилась степень.

II. Матрицы A и B неособые. При элементарном преобразовании строк изменяться могут лишь степени элементов, стоящие в одной из строк. Если при этом в максимальном столбце степени элементов не изменились, то изменилась степень только одного элемента, чего не может быть, так как для матриц A и B выполняется условие леммы 6.

III. Матрица A неособая, а B особая. Пусть рассматриваемое преобразование переводит

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

в

$$B = \begin{pmatrix} a + \lambda \cdot c & b + \lambda \cdot d \\ c & d \end{pmatrix},$$

причём первый столбец матрицы A максимален и, от противного, степени элементов в нём не изменились: $\deg(a + \lambda \cdot c) = \deg(a)$. Если в матрице A хотя бы один из элементов нулевой, то она диагональная (так как неособая) и состоит из констант, но тогда к ней нельзя применить понижающего преобразования. Значит, в ней нет нулевых элементов. В матрице B нулевые элементы есть, следовательно, имеем два подслучая.

1. $a + \lambda \cdot c = 0$. Получаем, что $\deg(a) = \deg(a + \lambda \cdot c) = 0$. По лемме 7, применённой к B, $\deg(b + \lambda \cdot d) = 0$. Рассматриваемое преобразование понижающее, следовательно,

$$\deg(b) > \deg(b + \lambda \cdot d) = 0 = \deg(a).$$

По лемме 6, применённой к A, получаем, что $\deg(b) > \deg(a)$, следовательно, $\deg(d) > \deg(c)$. Значит, первый столбец A не является максимальным. Противоречие.

2. $b + \lambda \cdot d = 0$. По лемме 7, применённой к B, $\deg(a + \lambda \cdot c) = 0$. Так как преобразование не изменило степеней элементов первого столбца A, имеем $\deg(a) = \deg(a + \lambda \cdot c) = 0$. В то же время преобразование является понижающим, следовательно, $\deg(b) > \deg(b + \lambda \cdot d) = 0 = \deg(a)$. Далее, как и в пункте 1, получаем противоречие. $\square$

Лемма 11. *Если матрица $B \in G_2(R[x])$ получена из строго степенной матрицы $A \in G_2(R[x])$ несколькими нейтральными и одним понижающим преобразованием строк, то все эти преобразования имеют один и тот же тип,*

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix},$$

и сумма их коэффициентов имеет старший член, не зависящий от этой последовательности и от B. Тип преобразований также зависит только от A.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

и для определённости a имеет максимальную степень. Тогда, поскольку матрица A строго степенная, $\deg(a) > \deg(c)$. Пусть после совершения нескольких нейтральных преобразований была получена матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Тогда $\deg(a_i) > \deg(c_i)$, и применённое к A_i преобразование вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \lambda & 1 \end{pmatrix}$$

даст матрицу

$$\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i + \lambda \cdot a_i & d_i + \lambda \cdot b_i \end{pmatrix},$$

у которой $\deg(c_i + \lambda \cdot a_i) > \deg(c_i)$, т. е. преобразование не будет нейтральным или понижающим. Поскольку таких в нашей последовательности преобразований нет, то все преобразования имеют тип

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(тип мог получиться другой, если бы максимальный элемент A был другой, но в любом случае типы всех преобразований одинаковы и зависят только от вида A).

Перейдём к доказательству второй части леммы. Заметим, что совершение нескольких однотипных преобразований даст тот же результат, что и совершение преобразования с суммарным коэффициентом, т. е. вторая часть леммы сводится к случаю, когда последовательность преобразований состоит из одного понижающего преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mapsto B = \begin{pmatrix} a + \lambda \cdot c & b + \lambda \cdot d \\ c & d \end{pmatrix},$$

где λ — суммарный коэффициент всех совершенных преобразований. По лемме 10 степень элемента в максимальном столбце уменьшилась при совершении последнего понижающего преобразования, значит, $\deg(a + \lambda \cdot c) < \deg(a)$, т. е. старший коэффициент a равен произведению старших коэффициентов $-\lambda$ и c. Значит, старший коэффициент λ определяется однозначно как число, противоположное по знаку частному старших коэффициентов a и c, независимо от вида B и от последовательности преобразований. Степень старшего члена тоже определяется однозначно как разность степеней a и c. □

Лемма 12. *При условиях леммы* 11 *максимальная степень элемента у B строго меньше, чем у A.*

Доказательство. Рассмотрим два случая.

I. Если максимальный столбец у A только один, то и элемент с максимальной степенью тоже только один, так как A — строго степенная. Согласно доказательству леммы 11 степень максимального элемента в максимальном столбце уменьшилась, а степени других элементов не увеличились (так как преобразования нейтральные или понижающие). Значит, в результате не сохранилось ни одного элемента такой же степени, как у элемента с максимальной степенью в A.

II. Если оба столбца максимальные, то, поскольку матрица A строго степенная, степени двух из её элементов не меньше 1, следовательно, по лемме 7 матрица A неособая. Значит, для неё применима лемма 6, и мы делаем вывод, что $\deg(b) > \deg(d)$ (в обозначениях доказательства леммы 11), так как $\deg(a) > \deg(c)$. Поскольку лемма 10 применима к обоим максимальным столбцам матрицы A, получаем, что после одного преобразования с суммарным коэффициентом $\deg(a + \lambda \cdot c) < \deg(a)$ и $\deg(b + \lambda \cdot d) < \deg(b)$. Так как A строго степенная, то $\deg(c) < \deg(a)$ и $\deg(d) < \deg(b)$. Значит, степени всех элементов

$$B = \begin{pmatrix} a + \lambda \cdot c & b + \lambda \cdot d \\ c & d \end{pmatrix}$$

строго меньше, чем максимальная степень элементов A. □

Лемма 13. *Пусть $A \in G_2(R)$ — неконстантная нестрого степенная матрица. Тогда она неособая. Кроме того, степени элементов в её столбцах совпадают.*

Доказательство. Поскольку матрица неконстантная, то элемент с максимальной степенью имеет степень не меньше 1. Так как она нестрого степенная, то другой элемент в этом же столбце имеет такую же степень не меньше 1. Следовательно, хотя бы два элемента матрицы имеют степень не меньше 1. Значит, по лемме 7 матрица неособая.

Вторая часть леммы следует из леммы 6. □

Лемма 14. *Если матрица $B \in G_2(R[x])$ получена из неконстантной нестрого степенной матрицы $A \in G_2(R[x])$ несколькими нейтральными и одним понижающим преобразованием строк, причём после совершения нейтральных преобразований была получена матрица из $G_2(R[x])$, то коэффициенты всех преобразований константные и матрица B имеет один из двух видов:*

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \\ D_1 \cdot x^s + \ldots & D_2 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} D_1 \cdot x^s + \ldots & D_2 \cdot x^t + \ldots \\ 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix}$$

для некоторых положительных в R констант D_1 и D_2, причём числа s, t зависят только от A и не зависят от последовательности преобразований или B. Кроме того, матрица B строго степенная (т. е. $s \neq 0$ или $t \neq 0$) с максимальной степенью элементов, не большей чем у A.

Доказательство. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

По лемме 13 получаем, что степени элементов в столбцах A одинаковы. Пусть $s = \deg(a) = \deg(c)$, $t = \deg(b) = \deg(d)$. Пусть для определённости первый столбец максимален, т. е. $s \geqslant t$. Пусть после совершения нескольких нейтральных преобразований была получена матрица

$$A_i = \begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix}.$$

Тогда $\deg(a_i) = \deg(c_i) = s$ и преобразование вида

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где $\deg(\lambda) > 0$, применённое к A_i, даст матрицу

$$\begin{pmatrix} a_i + \lambda \cdot c_i & b_i + \lambda \cdot d_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix},$$

у которой $\deg(a_i + \lambda \cdot c_i) > s$. Таким образом, преобразование не будет нейтральным или понижающим. Поскольку таких в нашей последовательности преобразований нет, все преобразования имеют константный коэффициент.

Пусть для определённости после применения понижающего преобразования к результату применения всех нейтральных преобразований

$$A_k = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix} \in G_2(R[x])$$

получилась матрица

$$B = \begin{pmatrix} a_k + \lambda \cdot c_k & b_k + \lambda \cdot d_k \\ c_k & d_k \end{pmatrix}.$$

По лемме 10 степень одного из элементов первого столбца стала меньше s, степень второго осталась равной s. Имеем $\deg(a_k + \lambda \cdot c_k) < s$, следовательно,

$\deg\big((a_k+\lambda\cdot c_k)\cdot d_k\big) < s+t$, и $\deg\big((b_k+\lambda\cdot d_k)\cdot c_k\big) < s+t$ (так как определитель B константный). Значит, так как $\deg(c_k) = s$, получаем, что $\deg(b_k+\lambda\cdot d_k) < t$ или $b_k+\lambda\cdot d_k = 0$ (второе условие не включается в первое при $t = 0$). В любом случае матрица B имеет требуемый вид

$$\begin{pmatrix} 0\cdot x^s+\ldots & 0\cdot x^t+\ldots \\ D_1\cdot x^s+\ldots & D_2\cdot x^t+\ldots \end{pmatrix}.$$

При

$$B = \begin{pmatrix} a_k & b_k \\ c_k+\lambda\cdot a_k & d_k+\lambda\cdot b_k \end{pmatrix}$$

получился бы второй из указанных видов B.

Осталось заметить, что s, t — степени элементов в столбцах A, значит, они не зависят от B и от последовательности элементарных преобразований. Так как A неконстантная, то одно из чисел s, t отлично от нуля, откуда следует, что B строго степенная. Степени элементов B не больше, чем s и t, т. е. не больше, чем степени элементов A. Все требуемые свойства установлены. $\square$

5. Эквивалентные записи соотношений образующих $\mathcal{P}$- и $\mathcal{P}_0$-матриц

Определение 10. Пусть дано отображение $\mathcal{F}$, определённое на матрицах

— $\mathrm{diag}[a,b]$, $a,b\in R_+^*$,
— $B_{1,2}(y)$, $y\in R_+[x]$,
— $B_{2,1}(y)$, $y\in R_+[x]$,
— $S_{(12)}$

таким образом, что выполняются следующие соотношения:

— соотношения, являющиеся образами всех верных соотношений с участием указанных матриц с константными неотрицательными элементами,
— $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big) = \mathcal{F}(S)\cdot\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big)\cdot\mathcal{F}(S)$ для всех $y\in R_+[x]$,
— $\mathcal{F}^2(S) = E_2$,
— $\mathcal{F}\big(B_{1,2}(yab^{-1})\big)\cdot\mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b])\cdot\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big)$ для всех $y\in R_+[x]$ и $a,b\in R_+^*$,
— $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(yba^{-1})\big)\cdot\mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b])\cdot\mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big)$ для всех $y\in R_+[x]$ и $a,b\in R_+^*$,
— $\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_1)\big)\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_2)\big) = \mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_1+y_2)\big)$ для всех $y_1,y_2\in R_+[x]$.

Замечание. Из определения очевидно следует, что ограничение $\mathcal{F}$ на константные матрицы продолжается на подполугруппу в полугруппе $\mathbf{P}$, состоящую из константных матриц.

Определение 11. Матрица называется $\mathcal{P}$-*матрицей*, если она имеет один из следующих видов:

— $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ для любых обратимых $a, b \in R$,

— $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для любых $y \in R[x]_+$,

— $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Определение 12. Матрица называется $\mathcal{P}_0$-*матрицей*, если она имеет один из следующих видов:

— $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ для любых обратимых $a, b \in R$,

— $\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ для любых $y \in R[x]_+$,

— $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$ для любых $y \in R[x]_+$.

Лемма 15. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i и B_j — $\mathcal{P}_0$- или $\mathcal{P}$-матрицы, является верным соотношением. Тогда существуют $\mathcal{P}$-матрицы $C_1, \ldots, C_p, D_1, \ldots, D_q$, такие что

— *справедливо соотношение*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q,$$

— *соотношения*

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

и

$$\mathcal{F}(C_1) \cdot \mathcal{F}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(C_p) = \mathcal{F}(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(D_q)$$

равносильны (*т. е. одновременно выполняются или не выполняются*).

Замечание. Соотношения из леммы 15 назовём образами соотношений

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m$$

и

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q$$

соответственно.

Доказательство. Все $\mathcal{P}_0$-матрицы, кроме матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}, \quad y \in R[x]_+,$$

являются $\mathcal{P}$-матрицами. Каждую матрицу вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix},$$

входящую в соотношение

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

заменим на произведение трёх идущих подряд матриц:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда полученное соотношение будет верным и будет состоять только из $\mathcal{P}$-матриц.

Поскольку

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) \cdot \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right),$$

получаем, что образ нового соотношения равносилен образу изначального, что и требовалось. □

Лемма 16. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i и B_j — $\mathcal{P}_0$- или $\mathcal{P}$-матрицы, является верным соотношением. Тогда существуют $\mathcal{P}_0$-матрицы $C_1, \ldots, C_p, D_1, \ldots, D_q$, такие что

— *справедливо соотношение*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q,$$

— *соотношения*

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

и

$$\mathcal{F}(C_1) \cdot \mathcal{F}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(C_p) = \mathcal{F}(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(D_q)$$

равносильны.

Доказательство. Все $\mathcal{P}$-матрицы, кроме матрицы

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где $y \in R[x]_+$, являются $\mathcal{P}_0$-матрицами.

I. Если в соотношении такая матрица встречается два раза подряд, то эти две матрицы можно убрать из соотношения, так как

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом образ полученного соотношения будет равносилен образу исходного, так как

$$\mathcal{F}^2\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

II. Две матрицы вида

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

в соотношении заменим на

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}.$$

Эти произведения равны, поэтому полученное соотношение будет верно и

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}b & 0\\ 0 & a\end{pmatrix}\right),$$

так как образы всех соотношений с константными матрицами верны, поэтому после замены получится соотношение, равносильное исходному.

III. Две матрицы вида

$$\begin{pmatrix}1 & y\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

в соотношении заменим на

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ y & 1\end{pmatrix}.$$

Эти произведения равны, поэтому полученное соотношение будет верно. Произведения образов этих пар матриц тоже равны, следовательно, образы соотношений будут равносильны.

Повторяя эти три шага в изменении соотношения, получим новое соотношение, в котором все матрицы в правой или левой части, кроме, может быть, первых, являются $\mathcal{P}_0$-матрицами. Матрица

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

не может стоять в середине правой/левой части полученного соотношения, иначе можно было бы применить один из шагов алгоритма преобразования соотношения с ней и с матрицей, которая стоит слева, значит, она может занимать только крайнюю левую позицию в обеих частях соотношения. Если в полученном соотношении больше нет матриц

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix},$$

то требуемое доказано. Если же матрица

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

есть в левом конце одной из частей соотношения, то она есть и в левом конце другой, поскольку это единственная из $\mathcal{P}$- и $\mathcal{P}_0$-матриц с отрицательным определителем и она не может находиться в соотношении в совокупности нечётное число раз. Следовательно, она стоит в начале правой и в начале левой части и на неё можно сократить соотношение, причём образ полученного соотношения будет равносилен образу исходного. □

Лемма 17. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i и B_j — $\mathcal{P}$- или $\mathcal{P}_0$-матрицы, является верным соотношением. Тогда существуют $\mathcal{P}_0$-матрицы $C_1, \ldots, C_p, D_1, \ldots, D_q$, такие что

— *справедливо соотношение*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q,$$

— *в соотношении*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q$$

матрицами вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

для обратимых $a, b \in R_+$ могут быть только C_p и D_q,

— *соотношения*

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

и

$$\mathcal{F}(C_1) \cdot \mathcal{F}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(C_p) = \mathcal{F}(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(D_q)$$

равносильны.

Доказательство. Ввиду леммы 16 можно рассматривать лишь случай, когда в изначальном соотношении все матрицы имеют тип $\mathcal{P}_0$.

Аналогично доказательству леммы 16 рассмотрим алгоритм преобразования левой и правой части соотношения, приводящий к тому, что в обеих частях матрица вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

может стоять только в крайней правой позиции.

I. Если в соотношении встречаются подряд матрицы

$$\begin{pmatrix} a_1 & 0 \\ 0 & b_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_2 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix},$$

то заменим их на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_1 \cdot a_2 & 0 \\ 0 & b_1 \cdot b_2 \end{pmatrix}.$$

При этом, поскольку образы соотношений с константными матрицами являются верными соотношениями, образ полученного после замены соотношения равносилен образу исходного.

II. Если в соотношении встречаются подряд матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых положительных обратимых a, b, заменим их на

$$\begin{pmatrix} 1 & y \cdot a \cdot b^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & y \cdot a \\ 0 & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом новое соотношение будет справедливо, а образ будет равносилен образу исходного, так как

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 1 & y \cdot a \cdot b^{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) = \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}\right) \cdot \mathcal{F}\left(\begin{pmatrix} 1 & y \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

III. Если встречаются подряд матрицы

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

для некоторых положительных обратимых a, b, заменим их на

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y \cdot b \cdot a^{-1} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}.$$

Проверка корректности замены аналогична таковой в случае II.

Повторяя эти три шага, добьёмся того, чтобы в обеих частях соотношения матрицы этого вида могли быть только крайними правыми, что и требовалось. □

Лемма 18. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i и B_j — $\mathcal{P}_0$- или $\mathcal{P}$-матрицы, является верным соотношением. Тогда в нём можно переставлять произведения вида

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

при любых $y_1, y_2 \in R[x]_+$ и заменять их на

$$\begin{pmatrix} 1 & y_1 + y_2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

получая верное соотношение, образ которого равносилен образу исходного.

Замечание. То же верно и для матриц вида

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y & 1 \end{pmatrix}$$

и доказывается аналогично.

Доказательство. Имеем

$$\begin{pmatrix}1 & y_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y_1+y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & y_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

и

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1 & y_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1 & y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)= \\ =\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1 & y_1+y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1 & y_2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1 & y_1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right),$$

откуда и следует требуемое. □

6. Полуинвариант эквивалентных преобразований соотношений образующих $\mathcal{P}_0$-матриц

Лемма 19. *Если $a, b \in R[x]_+$ и старшие члены a, b совпадают, то существуют $c, d \in R[x]_+$, такие что $a - c = b - d$, причём эти разности неотрицательны. Это утверждение верно для обоих рассматриваемых отношений порядка, причём старший член у разностей такой же, как у a и b.*

Доказательство. Рассмотрим отдельно два отношения порядка.

Рассмотрим полное отношение порядка, при котором положительность определяется по старшему коэффициенту. Возможны три случая: либо $a = b$ и подходят $c = 0$, $d = 0$, либо $a - b > 0$ и подходят $c = a - b$, $d = 0$, либо $a - b < 0$ и подходят $c = 0$, $d = b - a$. Во всех рассматриваемых случаях $a - c = b - d$ совпадает с одним из многочленов a или b, откуда следует требуемое утверждение о старших членах.

Рассмотрим частичное отношение порядка, при котором положительные те и только то многочлены, у которых все коэффициенты положительны. Тогда ввиду совпадения старших членов a, b в качестве c, d можно взять соответственно a, b без старшего члена. Разности $a - c = b - d$ будут мономами, состоящими из старших членов a и b, и требуемое будет также верно. □

Определение 13. Характеристическим числом соотношения

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = \ldots$$

назовём максимальную степень элемента матрицы

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k,$$

если A строго степенная, и максимальную степень, увеличенную на $1/2$, если A нестрого степенная.

Замечание. Эквивалентные преобразования соотношений, приведённые выше, не изменяют характеристических чисел, так как эти преобразования не изменяют правой и левой части соотношения. В лемме 16 присутствует сокращение на матрицу

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

стоящую в начале правой и левой части, но при таком сокращении в матрице

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k$$

переставляются строки, поэтому оказывается, что и это не изменяет характеристического числа. Следовательно, доказывая утверждения о полуинвариантах характеристических чисел, можно пользоваться преобразованиями в леммах, приведённых выше, приводя соотношение к любому удобному из описанных видов.

Определение 14. *Левой матрицей уровня* i соотношения

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m$$

назовём матрицу

$$\prod_{d=i}^{k} A_d,$$

если $i \leqslant k$, в противном случае считаем это произведение равным единичной матрице. Аналогично *правой матрицей уровня* i назовём

$$\prod_{d=i}^{m} B_d.$$

Замечание. У матриц любого уровня положительные элементы, так как эти матрицы являются произведениями матриц с положительными элементами.

Лемма 20. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i, B_j — $\mathcal{P}_0$*-матрицы, является верным соотношением, причём характеристическое число этого соотношения натуральное. Тогда существуют* $\mathcal{P}_0$*-матрицы* $C_1, \ldots, C_p, D_1, \ldots, D_q$*, такие что*

— *справедливо соотношение*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q,$$

— *характеристическое число соотношения*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q$$

строго меньше характеристического числа соотношения

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

— *соотношения*

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

и

$$\mathcal{F}(C_1) \cdot \mathcal{F}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(C_p) = \mathcal{F}(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(D_q)$$

равносильны.

Доказательство. Применив лемму 17, перенесём матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

в конец правой и левой частей.

Поскольку характеристическое число соотношения натуральное, то левая и правая матрица первого уровня являются строго степенными. Кроме того, они совпадают.

Заметим, что при $i \neq k$ левая матрица исходного соотношения

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m$$

уровня $i+1$ получается из матрицы уровня i домножением слева на A_i^{-1}, т. е. получается элементарным преобразованием с отрицательным коэффициентом, так как все матрицы A_i, кроме, может быть, последней, имеют вид матриц элементарных преобразований с положительными коэффициентами. Значит, по лемме 9 (она применима, так как матрицы всех уровней лежат в $G_2(R[x])$) эта последовательность, применяемая к матрице первого уровня, состоит только из нейтральных или понижающих преобразований.

Найдём такое минимальное j, что преобразование A_{j-1}^{-1}, применённое к левой матрице уровня $j-1$, понижающее. Тогда левая матрица уровня j получена из матрицы первого уровня последовательностью из нескольких нейтральных и одного понижающего преобразования.

Аналогично найдём такое минимальное l для правой части соотношения, что преобразование B_{l-1}^{-1}, применённое к матрице уровня $l-1$, понижающее. Получим, что правая матрица уровня l получена из матрицы первого уровня последовательностью из нескольких нейтральных и одного понижающего преобразования.

Поскольку левая и правая матрицы первого уровня совпадают, то по лемме 11 тип рассматриваемых преобразований для левой и правой частей одинаковый и старший член их суммарного коэффициента тоже одинаковый. Значит,

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & a_{j-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B_1 \cdot \ldots \cdot B_{l-1} = \begin{pmatrix} 1 & b_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & b_{l-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

или

$$A_1 \cdot \ldots \cdot A_{j-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ a_{j-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_a & 1 \end{pmatrix},$$
$$B_1 \cdot \ldots \cdot B_{l-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \ldots \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ b_{l-1} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ y_b & 1 \end{pmatrix},$$

причём старшие члены y_a и y_b одинаковые. Пусть, для определённости, выполняются первые две последовательности равенств. По лемме 18 можно заменить в соотношении $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{j-1}$ на

$$\begin{pmatrix} 1 & y_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$B_1 \cdot \ldots \cdot B_{l-1}$ на

$$\begin{pmatrix} 1 & y_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

По лемме 19 существуют такие $c, d \in R[x]_+$, что

$$y_a - c = y_b - d \geqslant 0.$$

Тогда по лемме 18 заменим в соотношении

$$\begin{pmatrix} 1 & y_a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на

$$\begin{pmatrix} 1 & y_a - c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

и

$$\begin{pmatrix} 1 & y_b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на

$$\begin{pmatrix} 1 & y_b - d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При этом старшие члены многочленов $y_a - c$, $y_b - d$ такие же, как у y_a, y_b. Значит, после замены выполняется свойство, что верхняя левая и правая матрицы второго уровня получаются из матрицы первого уровня понижающими преобразованиями (так как преобразование с тем же старшим членом, что и понижающее, также является понижающим). Значит, если сократить соотношение на матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & y_a - c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & y_b - d \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

полученное соотношение будет верным, его образ будет равносилен образу исходного.

Матрицы первого уровня этого соотношения являются матрицами второго уровня предыдущего и получены из строго степенных (совпадающих) матриц первого уровня предыдущего соотношения одним понижающим преобразованием. Значит, по лемме 12 степень максимального элемента у матриц первого уровня нового соотношения меньше, т. е. и характеристическое число нового соотношения меньше, что и требовалось. □

Лемма 21. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i, B_j — $\mathcal{P}_0$-матрицы, является верным соотношением, причём характеристическое число соотношения не целое и не равно $1/2$. Тогда существуют $\mathcal{P}_0$-матрицы $C_1, \ldots, C_p, D_1, \ldots, D_q$, такие что

— *справедливо соотношение*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q,$$

— *характеристическое число*

$$C_1 \cdot C_2 \cdot \ldots \cdot C_p = D_1 \cdot \ldots \cdot D_q$$

строго меньше характеристического числа

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

— *соотношения*

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

и

$$\mathcal{F}(C_1) \cdot \mathcal{F}(C_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(C_p) = \mathcal{F}(D_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(D_q)$$

равносильны.

Доказательство. Аналогично доказательству леммы 20, применив лемму 17, перенесём матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

в конец правой и левой частей соотношения.

Поскольку характеристическое число не целое и не равно $1/2$, то правая и левая матрицы первого уровня (они совпадают) неконстантные и нестрого степенные.

Заметим, что при $i \neq k$ левая матрица исходного соотношения уровня $i+1$ получается из матрицы уровня i домножением слева на A_i^{-1}, т. е. получается элементарным преобразованием с отрицательным коэффициентом, так как все матрицы A_i, кроме, может быть, последней, имеют вид матриц элементарных преобразований с положительными коэффициентами. Значит, по лемме 9 эта последовательность, применяемая к матрице первого уровня, состоит только из нейтральных или понижающих преобразований.

Найдём такое минимальное j, что преобразование A_{j-1}^{-1}, применённое к левой матрице уровня $j-1$, понижающее. Тогда левая матрица уровня j получена из матрицы первого уровня последовательностью из нескольких нейтральных и одного понижающего преобразования.

Аналогично найдём такое минимальное l для правой части соотношения, что преобразование B_{l-1}^{-1}, применённое к матрице уровня $l-1$, понижающее. Значит, правая матрица уровня l получена из матрицы первого уровня последовательностью из нескольких нейтральных и одного понижающего преобразования.

Поскольку левая и правая матрицы первого уровня совпадают и являются неконстантными нестрого степенными, то по лемме 14 все преобразования

$$A_1, \ldots, A_{j-1}, B_1, \ldots, B_{l-1}$$

имеют константные коэффициенты, а левая матрица уровня j и правая уровня l имеют вид

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \\ C_1 \cdot x^s + \ldots & C_3 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} C_1 \cdot x^s + \ldots & C_3 \cdot x^t + \ldots \\ 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \\ C_2 \cdot x^s + \ldots & C_4 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix} \text{ или } \begin{pmatrix} C_2 \cdot x^s + \ldots & C_4 \cdot x^t + \ldots \\ 0 \cdot x^s + \ldots & 0 \cdot x^t + \ldots \end{pmatrix}$$

соответственно (с одними и теми же s и t), причём эти матрицы получаются из матрицы первого уровня константными элементарными преобразованиями, следовательно, получаются друг из друга константными элементарными преобразованиями. Значит, по лемме 5 аналогично тому, как это делалось в доказательстве леммы 20, в исходном соотношении можно убрать матрицы $B_1 \cdot \ldots \cdot B_{l-1}$ и заменить $A_1 \cdot \ldots \cdot A_{j-1}$ на

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

или на

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

где a, b — положительные обратимые элементы R, c — константа. По свойству отношения порядка на R, найдутся такие $c_+ \in R_+$, $c_- \in R_-$, что $c = c_+ + c_-$. Заменим матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & c \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

на произведение

$$\begin{pmatrix} 1 & c_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & c_+ \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

и перенесём матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & c_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

из левой части в правую с заменой знака:

$$\begin{pmatrix} 1 & -c_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получено некоторое новое соотношение, которое является верным, причём его образ равносилен образу исходного, так как заменялись только константные $\mathcal{P}$- и $\mathcal{P}_0$-матрицы, а образы верных соотношений с константными матрицами являются верными соотношениями по определению $\mathcal{F}$.

Согласно лемме 14 матрицы первого уровня нового соотношения строго степенные и имеют степени, не превосходящие максимальной степени элемента матрицы первого уровня старого соотношения. Даже с учётом того, что мы перенесли матрицу

$$\begin{pmatrix} 1 & c_- \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

в другую часть, матрицы первого уровня нового соотношения остались строго степенными и их элементы не меняли степеней при перенесении матрицы, так как это преобразование нейтрально действует на матрицы первого уровня, что видно из замечания к доказательству леммы 4. Тогда характеристическое число нового соотношения целое и не может быть больше, чем у старого, так как максимальная степень элемента в матрицах первого уровня не больше, чем у исходного соотношения. Кроме того, характеристическое число не может остаться таким же, так как у старого соотношения оно не целое, а у полученного целое. Значит, оно уменьшилось.

Для завершения доказательства остаётся применить лемму 16, чтобы привести соотношение к виду $\mathcal{P}_0$, как и требуется. $\square$

Лемма 22. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m,$$

где A_i, B_j — $\mathcal{P}_0$-матрицы, является верным соотношением, причём характеристическое число соотношения равно $1/2$. Тогда соотношение

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

верно.

Доказательство. Применив лемму 17, перенесём матрицы вида

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$$

в конец правой и левой частей. Положим, что такие матрицы есть в конце каждой из частей (если нет, допишем единичную матрицу в соответствующей части равенства).

Если характеристическое число соотношения равно $1/2$, то левая и правая матрицы первого уровня константные. Переходя от них к матрицам старших уровней, совершая элементарные преобразования с отрицательными коэффициентами, мы не можем получить неконстантную матрицу ни на каком шаге. Иначе, если бы неконстантная матрица была получена из константной (у которой нет нулевых строк) неконстантным отрицательным преобразованием, она не была бы положительной, что неверно, так как матрицы всех уровней положительны. Значит, все матрицы в соотношении константные, но тогда требуемое верно по определению $\mathcal{F}$. □

Теорема 2. *Пусть*

$$A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_k = B_1 \cdot \ldots \cdot B_m$$

где A_i, B_j — $\mathcal{P}$-матрицы, является верным соотношением. Тогда соотношение

$$\mathcal{F}(A_1) \cdot \mathcal{F}(A_2) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_k) = \mathcal{F}(B_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(B_m)$$

выполняется.

Доказательство. Сначала используем лемму 16, сводя утверждение к $\mathcal{P}_0$-соотношениям. Далее, используя леммы 20 и 21, сводим задачу к случаю $\mathcal{P}_0$-соотношения с характеристическим числом $1/2$, после чего останется применить лемму 22. □

Теорема 3. *Пусть $\mathcal{F}$ — отображение, определённое на матрицах*
- $\mathrm{diag}[a,b]$, $a,b \in R_+^*$,
- $B_{1,2}(y)$, $y \in R_+[x]$,
- $B_{2,1}(y)$, $y \in R_+[x]$,
- $S_{(12)}$

таким образом, что выполняются следующие соотношения:
- *образы всех верных соотношений с участием указанных матриц с константными неотрицательными элементами,*
- $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big) = \mathcal{F}(S) \cdot \mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big) \cdot \mathcal{F}(S)$ *для всех* $y \in R_+[x]$,
- $\mathcal{F}^2(S) = E_2$,
- $\mathcal{F}\big(B_{1,2}(yab^{-1})\big)\cdot\mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b])\cdot\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y)\big)$ *для всех* $y \in R_+[x]$ *и* $a,b \in R_+^*$,
- $\mathcal{F}\big(B_{2,1}(yba^{-1})\big)\cdot\mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b]) = \mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b])\cdot\mathcal{F}\big(B_{2,1}(y)\big)$ *для всех* $y \in R_+[x]$ *и* $a,b \in R_+^*$,
- $\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_1)\big)\mathcal{F}\big(B_{1,2}(y_2)\big) = \mathcal{F}\big(B_{1,2}\big(y_1+y_2\big)\big)$ *для всех* $y_1, y_2 \in R_+[x]$.

Тогда $\mathcal{F}$ доопределяется до эндоморфизма Φ полугруппы $\mathbf{P}$ для кольца $R[x]$.

Доказательство. Распространим $\mathcal{F}$ на $\mathbf{P}$ следующим образом: рассмотрим любой элемент $A \in \mathbf{P}$ и представим его в виде произведения

$$A = A_1 \cdot A_2 \cdot \ldots \cdot A_n,$$

где каждая A_i — одна из матриц $B_{1,2}(x)$, S, $\mathrm{diag}[a,b]$. Тогда определим

$$\mathcal{F}(A) := \mathcal{F}(A_1) \cdot \ldots \cdot \mathcal{F}(A_n).$$

Теорема 2 обеспечивает корректность такого определения. □

7. Некоторые следствия и дополнительные утверждения

Теорема 4. *Пусть отображение* $\mathcal{F}_0\colon R_+[x_1,x_2,x_3,\ldots] \to R_+[x_1,x_2,x_3,\ldots]$ *обладает следующими свойствами*:

— $\mathcal{F}_0$ *аддитивно,*
— $\mathcal{F}_0(A\cdot a)=\mathcal{F}_0(A)\cdot a$, *где* $A\in R_+[x_1,x_2,x_3,\ldots]$, $a\in R_+^*$,
— $\mathcal{F}_0$ *действует тождественно на элементах* R.

Определим по нему $\mathcal{F}$ *на порождающих* $\mathbf{P}$ *матрицах следующим образом*:

— $\mathcal{F}(S)=S$,
— $\mathcal{F}\bigl(B_{1,2}(y)\bigr)=B_{1,2}\bigl(\mathcal{F}_0(y)\bigr)$,
— $\mathcal{F}\bigl(B_{2,1}(y)\bigr)=B_{2,1}\bigl(\mathcal{F}_0(y)\bigr)$,
— $\mathcal{F}(\mathrm{diag}[a,b])=\mathrm{diag}[a,b]$.

Тогда $\mathcal{F}$ *доопределяется до эндоморфизма полугруппы* $\mathbf{P}$.

Доказательство. Чтобы применить теорему 3, нужно проверить ряд свойств:

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&0\\\mathcal{F}_0(y)&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y)\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&\mathcal{F}_0(y)\\1&0\end{pmatrix}=$$
$$=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&yab^{-1}\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y)ab^{-1}\\1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y)\\0&1\end{pmatrix}=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&y\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Аналогично доказывается, что

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&0\\yba^{-1}&1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right)=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}a&0\\0&b\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&0\\y&1\end{pmatrix}\right),$$

$$\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&y_1\\0&1\end{pmatrix}\right)\cdot\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&y_2\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y_1)\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y_2)\\0&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&\mathcal{F}_0(y_1+y_2)\\0&1\end{pmatrix}=\mathcal{F}\left(\begin{pmatrix}1&y_1+y_2\\0&1\end{pmatrix}\right).$$

Все свойства установлены, значит, по теореме 3 требуемое верно. □

Теорема 5. *Пусть выполняются условия теоремы 4 и, кроме того,* R *— линейно упорядоченное поле и на* $R[x]$ *введено полное отношение порядка* (*знак* *определяется по старшему коэффициенту). Тогда Φ доопределяется до эндоморфизма полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$ и даже до автоморфизма $G_2(\mathbb{R}[x])$.*

Доказательство. Это утверждение верно в силу теоремы 3 и факта о совпадении полугрупп $\mathrm{GE}_2^+(\mathbb{R}[x])$ и $G_2(\mathbb{R}[x])$ с полугруппой $\mathbf{P}$ в случае, когда R — поле и отношения порядка на $R[x]$ полное. Этот факт не доказывается в данной статье, но он представляется довольно очевидным. □

Теорема 6. *Пусть мы находимся в условиях теоремы 4, причём $\mathcal{F}_0$ действует на многочлены, удваивая их коэффициент при мономе x и не меняя остальных коэффициентов. Кроме того, пусть R — линейно упорядоченное коммутативное кольцо без делителей нуля и на $R[x]$ введено частичное отношение порядка. Тогда $\mathcal{F}$ не доопределяется до эндоморфизма полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$.*

Доказательство. Предположим от противного, что $\mathcal{F}$ доопределяется до эндоморфизма полугруппы $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$. Пусть

$$A=\begin{pmatrix}2+2x+3x^2+3x^3+3x^4+2x^5+2x^6+x^7 & 1+2x+3x^2+2x^3+2x^4+x^5\\ 1+2x+2x^2+2x^3+2x^4+2x^5+x^6+x^7 & 1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&x\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&x^2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\x^2&1\end{pmatrix}.$$

A — матрица из полугруппы $\mathbf{P}$. Рассмотрим $\mathcal{P}$-эквивалентную ей матрицу

$$B=A\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1+x^3+x^4+x^5+2x^6+x^7 & 1+2x+3x^2+2x^3+2x^4+x^5\\ x+x^4+x^5+x^6+x^7 & 1+x+2x^2+2x^3+x^4+x^5\end{pmatrix}.$$

Очевидно, $B\in\mathrm{GE}_2^+(R[x])$.

Если бы $\mathcal{F}$ продолжался до автоморфизма $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$, то образ B был бы матрицей

$$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&2x\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\2x&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&x^2\\0&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\x^2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\-1&1\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1+3x^2+8x^3-2x^4-4x^5+8x^6+8x^7 & 1+4x+6x^2+4x^3+8x^4+8x^5\\ 2x+6x^3+x^4-4x^5+4x^6+8x^7 & 1+2x+5x^2+4x^3+4x^4+8x^5\end{pmatrix}.$$

Это верно, так как должно выполняться свойство

$$\Phi(B)\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}=\Phi(A).$$

Но полученная матрица не лежит даже в $G_2(R[x])$, так как имеет неположительные элементы. Противоречие. Значит, эндоморфизм не продолжается до $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$. □

Замечание. Теоремы 5 и 6 показывают, что невозможно ни доказать, ни опровергнуть, что $\mathcal{F}$ в условиях теоремы 3 продолжается до эндоморфизма $\mathrm{GE}_2^+(R[x])$, не предполагая ничего дополнительно.

Замечание. Заметим, что эндоморфизм, описанный в теореме 4 при немультипликативном $\mathcal{F}_0$, не является стандартным, так как выше приведён пример такого эндоморфизма, не продолжаемого до эндоморфизма $G_n(R[x])$, что было бы невозможно, если бы он был стандартным.

Автор выражает благодарность своему научному руководителю профессору Е. И. Буниной за постановку задачи, постоянное внимание к работе и помощь в улучшении изложения материала.

Литература

[1] Бунина Е. И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Мат. заметки. — 2011. — Т. 91, № 1. — С. 3—12.

[2] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2005. — Т. 11, вып. 2. — С. 3—23.

[3] Бунина Е. И., Михалёв А. В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фундамент. и прикл. мат. — 2006. — Т. 12, вып. 2. — С. 39—53.

[4] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 2. — С. 69—100.

[5] Бунина Е. И., Семёнов П. П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фундамент. и прикл. мат. — 2008. — Т. 14, вып. 4. — С. 75—85.

[6] Михалёв А. В., Шаталова М. А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Мат. сб. — 1970. — Т. 81, № 4. — С. 600—609.

[7] Семёнов П. П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Мат. сб. — 2012. — Т. 203, № 9. — С. 117—132.

[8] Царьков О. И. Эндоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ над частично упорядоченным коммутативным кольцом без делителей нуля с 1/2 // Фундамент. и прикл. мат. — 2013. — Т. 18, вып. 1. — С. 181—204.