

Элементы алгебраической геометрии над булевыми алгебрами с выделенными элементами

А. Н. ШЕВЛЯКОВ

Омский филиал Института математики
им. С. Л. Соболева Сибирского отделения РАН
e-mail: a_shevl@mail.ru

УДК 512.563

Ключевые слова: булевы алгебры, уравнения, геометрическая эквивалентность.

Аннотация

В статье изучаются уравнения над булевыми алгебрами с выделенными элементами. Доказаны критерии принадлежности булевой алгебры с выделенными элементами к классам нётеровых по уравнениям, слабо нётеровых по уравнениям, $\mathbf{q}_\omega$ -компактных и $\mathbf{u}_\omega$ -компактных булевых алгебр. Решена проблема геометрической эквивалентности булевых алгебр с выделенными элементами.

Abstract

A. N. Shevlyakov, Algebraic geometry over Boolean algebras in the language with constants, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 4, pp. 197–218.

We study equations over Boolean algebras with distinguished elements. We prove criteria for when a Boolean algebra is equationally Noetherian, weakly equationally Noetherian, $\mathbf{q}_\omega$ -compact, or $\mathbf{u}_\omega$ -compact. Also we solve the problem of geometric equivalence in the class of Boolean algebras with distinguished elements.

Введение

Для алгебраической системы (алгебры) $\mathcal{A}$ языка $\mathcal{L}$ естественным образом можно определить понятия уравнения (как атомарной формулы языка $\mathcal{L}$) и его решения. В связи с этим возникает проблема описания всех алгебраических множеств (множеств, задаваемых системами уравнений над $\mathcal{A}$) и координатных алгебр над $\mathcal{A}$. Координатные алгебры являются аналогами координатных колец в коммутативной алгебре и определяют алгебраическое множество с точностью до изоморфизма. В работах Э. Ю. Данияровой, А. Г. Мясникова, В. Н. Ремесленникова [1, 2] были доказаны две так называемые объединяющие теоремы, позволяющие решать проблему описания координатных алгебр с помощью семи эквивалентных подходов.

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 4, с. 197–218.

© 2013 Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»

Первая объединяющая теорема описывает класс всех координатных алгебр над заданной алгеброй $\mathcal{A}$, вторая объединяющая теорема описывает координатные алгебры неприводимых алгебраических множеств над $\mathcal{A}$. Единственным ограничением на алгебру $\mathcal{A}$ в объединяющих теоремах является свойство нётеровости по уравнениям (любая система уравнений над $\mathcal{A}$ эквивалентна своей конечной подсистеме).

В [3] были введены несколько обобщений свойства нётеровости по уравнениям: слабо нётеровы по уравнениям, u_ω -компактные и q_ω -компактные алгебры (см. точные определения в разделе 2). Данные классы алгебр обозначаются соответственно $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$. Каждый из классов $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ наследует некоторые свойства класса $\mathbf{N}$ нётеровых по уравнениям алгебр. Например, все алгебраические множества над алгеброй $\mathcal{A} \in \mathbf{N}'$ определяются конечными системами уравнений, для каждой u_ω -компактной алгебры $\mathcal{A}$ справедливы обе объединяющие теоремы, в то время как для каждой q_ω -компактной алгебры справедлива лишь первая из объединяющих теорем.

Таким образом, любое применение объединяющих теорем предполагает предварительное решение следующей проблемы.

Проблема. Определить, в каком из классов $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ содержится заданная алгебра $\mathcal{A}$.

Известно, что классы $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{Q}$, $\mathbf{U}$ попарно различны. Так, в [7] была построена q_ω -компактная, но не нётерова группа. В [4] было показано, что классы $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ алгебр языка $\mathcal{L} = \{f_i^{(1)} \mid i \in \mathbb{N}\}$, состоящего из счётного числа одноместных функций, различны. В [9] была построена серия полурешёток языка $\mathcal{L} = \{\wedge\} \cup \{c_i \mid i \in \mathbb{N}\}$ со счётным множеством константных символов, показывающая несовпадение классов $\mathbf{N}$, $\mathbf{N}'$, $\mathbf{U}$, $\mathbf{Q}$ в указанном многообразии алгебр.

Интересный результат, также имеющий отношение к указанной выше проблеме, был получен в [4]. Для его формулировки нам понадобится следующее определение.

Система уравнений $\mathcal{S}$ над алгеброй $\mathcal{A}$ называется E_k -системой ($k \in \mathbb{N}$), если $\mathcal{S}$ имеет ровно k решений в $\mathcal{A}$, но число решений любой её конечной подсистемы $\mathcal{S}_0 \subseteq \mathcal{S}$ бесконечно.

Теорема [4]. Пусть алгебра $\mathcal{A}$ q_ω -компактна. Тогда для $k \in \{0, 1\}$ не существует E_k -систем над $\mathcal{A}$. Если алгебра $\mathcal{A}$ u_ω -компактна, то ни для какого $k \in \mathbb{N}$ над алгеброй $\mathcal{A}$ не существует E_k -системы.

Существуют классы алгебр, в которых условия приведённой выше теоремы становятся достаточными. Это, например, линейно упорядоченные решётки в расширенном константами языке $\{\wedge, \vee\} \cup \{c_i \mid i \in I\}$ (см. [8]). В данной работе будет доказана достаточность условий теоремы для булевых алгебр языка $\mathcal{L} = \{\vee, \cdot, \bar{}, 0, 1\} \cup \{c_i \mid i \in I\}$, расширенного добавлением произвольного числа константных символов (функциональные символы $\vee$, $\cdot$, $\bar{}$ соответственно обозначают операции объединения, пересечения и взятия дополнения).

Поскольку мы рассматриваем булевы алгебры в расширенном константами языке, то все модели языка $\mathcal{L}$ будем называть $\mathcal{C}$ -алгебрами ($\mathcal{C}$ — подалгебра, порождённая константами).

Приведём основные результаты работы.

Теорема 6.3. *Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ $\mathfrak{q}_\omega$ -компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_0 - и E_1 -систем.*

Теорема 6.4. *Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ $\mathfrak{u}_\omega$ -компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_k -систем ни для какого $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 4.1. *Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.*

Теорема 5.1. *Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ слабо нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$, т. е. любое множество элементов $\{\mathbf{c}_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ имеет точную нижнюю грань в алгебре $\mathcal{B}$ и эта точная нижняя грань принадлежит подалгебре $\mathcal{C}$.*

Заметим, что критерий нётеровости по уравнениям (теорема 4.1) справедлив также для полурешёток языка $\{\wedge\} \cup \{\mathbf{c}_i \mid i \in I\}$, расширенного произвольным числом константных символов (см. [9]).

Рассмотрим ещё одно обобщение понятия нётеровости по уравнениям. Алгебру $\mathcal{A}$ мы будем называть *нётеровой по совместным системам*, если любая совместная система уравнений над $\mathcal{A}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Данное определение не эквивалентно определению нётеровости по уравнениям, поскольку существует пример (см. [9]) полурешётки языка $\{\wedge\} \cup \{\mathbf{c}_i \mid i \in I\}$, нётеровой по совместным системам, для которой существует несовместная система уравнений $\mathcal{S}$, не эквивалентная никакой своей конечной подсистеме (все конечные подсистемы системы уравнений $\mathcal{S}$ имеют решение).

Однако в случае булевых алгебр языка $\mathcal{L}$ справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. *Если булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по совместным системам уравнений, то $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям.*

Раздел 7 посвящён проблеме геометрической эквивалентности булевых алгебр языка $\mathcal{L}$. По определению алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ языка $\mathcal{L}$ геометрически эквивалентны, если для любой системы уравнений $\mathcal{S}$ соответствующие ей координатные алгебры над алгебрами $\mathcal{B}_1$ и $\mathcal{B}_2$ изоморфны. Это означает, что при описании координатных алгебр над алгеброй $\mathcal{B}_1$ автоматически будут описаны координатные алгебры над любой алгеброй $\mathcal{B}_2$, геометрически эквивалентной $\mathcal{B}_1$.

Проблема описания всех алгебр, геометрически эквивалентных заданной алгебре $\mathcal{B}$, была впервые сформулирована Б. И. Плоткиным в [7]. В [6] проблема Плоткина была решена для нётеровых по уравнениям групп. Теорема 7.2 содержит необходимые и достаточные условия геометрической эквивалентности булевых $\mathcal{C}$ -алгебр.

Как следует из [6], проблема геометрической эквивалентности алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ сильно связана с универсальными классами, порождаемыми алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Так, равенство предмногообразий, порождённых алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, эквивалентно их геометрической эквивалентности. Если алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ q_ω -компактны, то равенство их квазимногообразий равносильно геометрической эквивалентности алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Поэтому теорема 7.3 содержит сведения не только о геометрической эквивалентности булевых алгебр, но и утверждения о порождаемых ими универсальных классах.

1. Булевы алгебры

Следуя [5], приведём основные сведения о булевых алгебрах.

Пусть $\mathcal{L}_0 = \{\vee^{(2)}, \cdot^{(2)}, {}^{- (1)}, 0, 1\}$ — язык, состоящий из двух бинарных функциональных символов $\vee, \cdot$, унарного функционального символа ${}^{-}$ и констант $0, 1$. Функции $\vee, \cdot, {}^{-}$ будем называть соответственно *объединением*, *произведением* и *дополнением*. Наряду с символом $\cdot$ для обозначения произведения нескольких элементов ниже будет использоваться символ $\bigwedge$. Например, запись $\bigwedge_{i \in I} b_i$ будет обозначать произведение элементов b_i , нижние индексы которых принадлежат множеству I .

Булевой алгеброй называется алгебраическая система языка $\mathcal{L}_0$, удовлетворяющая следующим аксиомам:

- 1) $a \vee b = b \vee a, ab = ba$ (коммутативность);
- 2) $(a \vee b) \vee c = a \vee (b \vee c), (ab)c = a(bc)$ (ассоциативность);
- 3) $a \vee (bc) = (a \vee b)(a \vee c), a(b \vee c) = ab \vee ac$ (дистрибутивность);
- 4) $a \vee (ab) = a, a(a \vee b) = a$ (правило поглощения);
- 5) $a \vee \bar{a} = 1, a \cdot \bar{a} = 0$ (свойства дополнения).

Из аксиом выводятся следующие тождества, справедливые для любой булевой алгебры:

- 1) $a \vee a = a, aa = a$ (идемпотентность);
- 2) $a \vee 0 = a, a \cdot 1 = a$;
- 3) $a \vee 1 = 1, a \cdot 0 = 0$;
- 4) $\bar{\bar{1}} = 0, \bar{\bar{0}} = 1$;
- 5) $\overline{a \vee b} = \bar{a}\bar{b}, \overline{ab} = \bar{a} \vee \bar{b}$ (законы де Моргана);
- 6) $\bar{\bar{a}} = a$.

На элементах булевой алгебры можно определить частичный порядок:

$$x \leq y \iff xy = x.$$

Булева алгебра $\mathcal{B}$ называется *полной*, если произвольное множество её элементов имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань относительно определённого выше частичного порядка $\leq$. Заметим, что из существования точной нижней грани для всех подмножеств $\{b_i \mid i \in I\} \subseteq \mathcal{B}$ следует существование точной верхней грани для любого подмножества $\{b_i \mid i \in I\}$ и наоборот. Кроме

того, мы будем говорить, что подалгебра $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{B}$ *полна в $\mathcal{B}$* , если произвольное множество элементов алгебры $\mathcal{C}$ имеет точную нижнюю и точную верхнюю грань (рассматриваемые в алгебре $\mathcal{B}$) и эти грани принадлежат $\mathcal{C}$.

Расширим язык $\mathcal{L}_0$ добавлением бесконечного множества констант

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 \cup \{c_i \mid i \in I\}.$$

Булеву алгебру языка $\mathcal{L}$ (булеву алгебру с выделенными элементами) будем называть *$\mathcal{C}$ -алгеброй*, где через $\mathcal{C}$ обозначена подалгебра, порождённая константами $\{c_i \mid i \in I\}$.

2. Основные понятия алгебраической геометрии

В данном разделе мы приводим основные понятия универсальной алгебраической геометрии. Для более детального ознакомления см. [2, 3].

Все приводимые ниже определения могут быть сформулированы для произвольной алгебраической системы в произвольном функциональном языке. Однако для удобства все понятия универсальной алгебраической геометрии будут сразу даны для булевых $\mathcal{C}$ -алгебр.

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечное множество переменных. *Уравнением ($\mathcal{C}$ -уравнением)* над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ называется атомарная формула $\tau(X) = \sigma(X)$ языка $\mathcal{L}$. *Система уравнений* (для краткости, система) — это произвольное множество уравнений.

Замечание 2.1. В этой работе мы рассматриваем только системы, зависящие от конечного числа переменных. Кроме того, в некоторые системы будут входить неравенства $t(X) \leq s(X)$, которые являются сокращённой записью уравнения $t(X)s(X) = t(X)$.

Решения уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$ и системы уравнений $\mathcal{S}$ над алгеброй $\mathcal{B}$ определяются естественным образом и обозначаются соответственно $V_{\mathcal{B}}(\tau(X) = \sigma(X))$, $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$. Если система уравнений не имеет решения, то она называется *несовместной*.

Множество $Y \subseteq \mathcal{B}^n$ называется *алгебраическим над $\mathcal{B}$* , если существует система $\mathcal{S}$, такая что $Y = V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

Радикал $\text{Rad}_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ системы уравнений $\mathcal{S}$ над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ состоит из всех уравнений $\tau(X) = \sigma(X)$, таких что $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{B}}(\tau(X) = \sigma(X))$. Очевидно, что радикал несовместной системы уравнений состоит из всех уравнений над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$.

Две системы уравнений от переменных множества X называются *эквивалентными* над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$, если множества их решений над $\mathcal{B}$ совпадают. Эквивалентность систем уравнений над алгеброй $\mathcal{B}$ будем обозначать с помощью знака $\sim_{\mathcal{B}}$. Если системы уравнений эквивалентны над любой булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй, мы будем использовать символ $\sim$.

Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ называется *нётеровой по уравнениям*, если для каждой системы $\mathcal{S}$ (в том числе и для несовместной) существует конечная подсистема

$\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, эквивалентная $\mathcal{S}$. Класс всех нётеровых по уравнениям булевых $\mathcal{C}$ -алгебр обозначим через $\mathbf{N}$.

Следующие четыре понятия обобщают свойство нётеровости по уравнениям. Булева $\mathcal{C}$ -алгебра называется

- 1) *нётеровой по совместным системам*, если для каждой совместной над $\mathcal{B}$ системы $\mathcal{S}$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, эквивалентная $\mathcal{S}$. Класс всех нётеровых по совместным системам булевых $\mathcal{C}$ -алгебр обозначим через $\mathbf{N}_c$;
- 2) *слабо нётеровой по уравнениям*, если для любой системы $\mathcal{S}$ существует конечная система $\mathcal{S}'$, эквивалентная $\mathcal{S}$ над $\mathcal{B}$ (здесь не требуется, чтобы $\mathcal{S}'$ была подсистемой системы $\mathcal{S}$). Класс всех слабо нётеровых по уравнениям булевых $\mathcal{C}$ -алгебр обозначим через $\mathbf{N}'$;
- 3) *q_ω -компактной*, если для любой системы $\mathcal{S}$ и уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$, такого что $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{B}}(\tau(X) = \sigma(X))$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ со свойством $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}') \subseteq V_{\mathcal{B}}(\tau(X) = \sigma(X))$. Класс всех q_ω -компактных булевых $\mathcal{C}$ -алгебр обозначим через $\mathbf{Q}$;
- 4) *u_ω -компактной*, если для любой системы $\mathcal{S}$ и множества уравнений $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$ ($1 \leq i \leq m$), таких что

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)),$$

существует конечная подсистема $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ со свойством

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)).$$

Класс всех u_ω -компактных булевых $\mathcal{C}$ -алгебр обозначим через $\mathbf{U}$.

Следующий рисунок демонстрирует включения определённых выше классов булевых $\mathcal{C}$ -алгебр. Заметим, что $\mathbf{Q} \cap \mathbf{N}' = \mathbf{N}$ (доказательство см. в [3]).

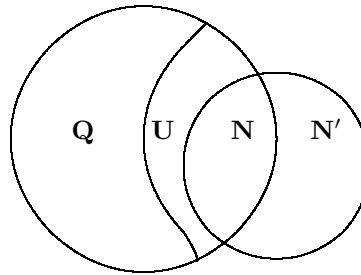


Рис. 1

Для изучения свойств q_ω - и u_ω -компактных булевых $\mathcal{C}$ -алгебр нам понадобится следующее простое утверждение, которое мы приведём без доказательства.

Лемма 2.2. Пусть для системы уравнений $\mathcal{S}$ над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ и произвольных множеств $M_1, M_2, \dots, M_m \subseteq \mathcal{B}^n$ выполнено включение

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcap_{i=1}^m M_i$$

и для каждого множества M_i существует конечная подсистема $\mathcal{S}'_i \subseteq \mathcal{S}$ со свойством $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}'_i) \subseteq M_i$. Тогда для конечной подсистемы $\mathcal{S}' = \bigcup_{i=1}^m \mathcal{S}'_i$ выполнено

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}') \subseteq \bigcap_{i=1}^m M_i.$$

Введём одно из основных определений нашей работы.

Определение 2.3 [4]. Система уравнений $\mathcal{S}$ над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ называется E_k -системой, если $|V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})| = k$, но для любой конечной подсистемы $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ выполнено $|V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}')| = \infty$.

Следующие свойства E_k -системы непосредственно следуют из определения.

Утверждение 2.4. Пусть $\mathcal{B}$ — булева $\mathcal{C}$ -алгебра и $\mathcal{S}$ — система уравнений над $\mathcal{B}$. Тогда если система $\mathcal{S}$ не является E_k -системой, но $|V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})| = k$, то система $\mathcal{S}$ эквивалентна своей конечной подсистеме $\mathcal{S}'$. В частности, если несовместная система $\mathcal{S}$ не является E_0 -системой, то в системе $\mathcal{S}$ существует конечная несовместная подсистема $\mathcal{S}'$.

Следующая теорема содержит необходимое условие ω - и q_ω -компактности.

Теорема 2.5 [4]. Пусть $\mathcal{B}$ — q_ω -компактная булева $\mathcal{C}$ -алгебра. Тогда для $k \in \{0, 1\}$ не существует E_k -систем над $\mathcal{B}$. Пусть $\mathcal{B}$ — ω -компактная булева $\mathcal{C}$ -алгебра. Тогда ни для какого $k \in \mathbb{N}$ не существует E_k -систем над $\mathcal{B}$.

Замечание 2.6. В [4] определение 2.3 и теорема 2.5 были сформулированы для алгебраической системы произвольного функционального языка.

Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — две булевы $\mathcal{C}$ -алгебры, т. е. порождённые константами подалгебры в алгебрах $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ изоморфны друг другу. Булевы $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ называются *геометрически эквивалентными*, если для любой системы $\mathcal{C}$ -уравнений $\mathcal{S}$ выполнено $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

Напомним несколько понятий из теории моделей и универсальной алгебры.

Формула языка $\mathcal{L}$ вида

$$\forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n (\tau_1(X) = \sigma_1(X)) \wedge (\tau_2(X) = \sigma_2(X)) \wedge \dots \wedge (\tau_m(X) = \sigma_m(X)) \rightarrow (\tau(X) = \sigma(X)),$$

где $\tau_i(X), \sigma_i(X), \tau(X), \sigma(X)$ — термы языка $\mathcal{L}$, называется *квазитождеством*. Класс всех булевых $\mathcal{C}$ -алгебр, на которых истинны все квазитождества, истинные на булевой $\mathcal{C}$ -алгебре $\mathcal{B}$, образуют *квазимногообразие* $\text{qvar}(\mathcal{B})$, порождённое булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$.

Предмногообразие $\text{pvar}(\mathcal{B})$, порождённое булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$, — это наименьший класс алгебр, содержащий алгебру $\mathcal{B}$ и замкнутый относительно декартовых степеней и подалгебр.

Для q_ω -компактных алгебр справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.7 [3]. Для любой q_ω -компактной булевой $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}$ справедливо равенство классов

$$\text{qvar}(\mathcal{B}) = \text{pvar}(\mathcal{B}).$$

Следующая теорема была доказана в [6] для групп, но без труда переносится на случай произвольной алгебраической системы. Мы сформулируем её для булевых $\mathcal{C}$ -алгебр.

Теорема 2.8 [6]. Булевы $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда

$$\text{pvar}(\mathcal{B}_1) = \text{pvar}(\mathcal{B}_2).$$

3. Преобразование уравнений над булевыми алгебрами

Пусть $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ — конечный набор переменных. Введём новые переменные $Z = \{z_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$, которые будут индексироваться элементами множества $\{0, 1\}^n$ ($|Z| = 2^n$). Через $\pi_i(\alpha)$ ($1 \leq i \leq n$) будем обозначать проекцию набора α на i -ю координату. Заменим переменные $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ на переменные множества Z по правилу

$$x_i = \bigvee_{\pi_i(\alpha)=1} z_\alpha. \quad (1)$$

Замена переменных, обратная к замене (1), задаётся формулой

$$z_\alpha = x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}, \quad (2)$$

где $\alpha = (a_1, a_2, \dots, a_n)$, $a_i \in \{0, 1\}$ и

$$x_i^{a_i} = \begin{cases} x_i, & \text{если } a_i = 1, \\ \bar{x}_i, & \text{если } a_i = 0. \end{cases} \quad (3)$$

Замечание 3.1. В качестве индексов переменных из множества Z мы будем использовать только греческие буквы $\alpha, \beta, \gamma, \dots$. По этой причине произведения и объединения вида

$$\bigvee_{\alpha \in \{0,1\}^n} z_\alpha, \quad \bigwedge_{\alpha \in \{0,1\}^n} z_\alpha$$

для краткости будем обозначать

$$\bigvee_{\alpha} z_\alpha, \quad \bigwedge_{\alpha} z_\alpha.$$

Используя аксиомы теории булевых алгебр, любое уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ можно представить в виде конечной системы уравнений

$$\mathcal{S}_{\tau=\sigma} = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\} \cup \{z_\alpha z_\beta = 0 \mid \alpha \neq \beta\} \cup \left\{ \bigvee_\alpha z_\alpha = 1 \right\}. \quad (4)$$

Из представления уравнения в виде (4) следует представление произвольной системы в виде

$$\mathcal{S} = \bigcup_\alpha \mathcal{S}_\alpha \cup (6) \cup (7), \quad (5)$$

где $\mathcal{S}_\alpha = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\}$ и

$$\bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\}, \quad (6)$$

$$\left\{ \bigvee_\alpha z_\alpha = 1 \right\}. \quad (7)$$

4. Нётеровы по уравнениям булевы алгебры

Теорема 4.1. Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда подалгебра $\mathcal{C}$, порождённая константами, конечна.

Доказательство. Предположим, что алгебра $\mathcal{C}$ конечна. Тогда существует конечное число различных уравнений вида $z_\alpha \leq \mathbf{c}$, $\mathbf{c} \in \mathcal{C}$. Следовательно, все системы уравнений над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}$ конечны.

Пусть теперь алгебра $\mathcal{C}$ бесконечна. Из теории булевых алгебр следует, что в алгебре $\mathcal{C}$ существует бесконечная цепь элементов

$$\mathbf{c}_1 < \mathbf{c}_2 < \dots < \mathbf{c}_n < \dots$$

Тогда легко проверяется, что бесконечная система уравнений

$$\mathcal{S} = \{x \geq \mathbf{c}_1, x \geq \mathbf{c}_2, \dots, x \geq \mathbf{c}_n, \dots\}$$

не эквивалентна никакой своей конечной подсистеме. $\square$

Теорема 4.2. Если булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по совместным системам уравнений, то $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям.

Доказательство. В соответствии с представлением системы $\mathcal{S}$ в виде (5) достаточно показать, что любая система $\mathcal{S}_\alpha = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\}$ эквивалентна своей конечной подсистеме. Но поскольку каждая система $\mathcal{S}_\alpha$ совместна ($0 \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_\alpha)$), то по условию она эквивалентна своей конечной подсистеме $\mathcal{S}'_\alpha$. Следовательно, система $\mathcal{S}$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\mathcal{S}' = \bigcup_\alpha \mathcal{S}'_\alpha \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \left\{ \bigvee_\alpha z_\alpha = 1 \right\},$$

и поэтому булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ нётерова по уравнениям. $\square$

5. Слабая нётеровость по уравнениям

Теорема 5.1. Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ слабо нётерова по уравнениям тогда и только тогда, когда алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$, т. е. любое множество элементов $\{c_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ имеет точную нижнюю грань в алгебре $\mathcal{B}$ и эта точная нижняя грань принадлежит подалгебре $\mathcal{C}$.

Доказательство. Докажем необходимость. Если множество констант $\{c_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ не имеет точной нижней грани в $\mathcal{B}$ или же его точная нижняя грань принадлежит множеству $\mathcal{B} \setminus \mathcal{C}$, то система $\mathcal{S} = \{x \leq c_j \mid j \in J\}$ имеет ненулевое решение в $\mathcal{B}$.

Поскольку булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ слабо нётерова по уравнениям, то существует система уравнений

$$\mathcal{S}_0 = \{x \leq c'_j \mid j \in J'\} \cup \{\bar{x} \leq c''_j \mid j \in J''\}$$

от одной переменной, которая эквивалентна $\mathcal{S}$. Очевидно, что система $\mathcal{S}_0$ эквивалентна системе из двух уравнений $\{x \leq c'\} \cup \{\bar{x} \leq c''\}$, где

$$c' = \bigwedge_{j \in J'} c'_j, \quad c'' = \bigwedge_{j \in J''} c''_j.$$

Поскольку элемент 0 является решением системы $\mathcal{S}$, то $0 \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_0)$. Следовательно, $c'' = 1$, и уравнение $\bar{x} \leq c''$ становится тривиальным. Таким образом, система $\mathcal{S}_0$ эквивалентна уравнению $x \leq c'$.

Поскольку $c' \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_0)$, то $c' \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$. Следовательно, $c' \leq c_j$ для любого $j \in J$. Так как элемент c' не является точной нижней гранью множества $\{c_j \mid j \in J\}$, то существует элемент $b \in \mathcal{B}$, такой что $c' < b < c_j$ для всех $j \in J$.

Поскольку элемент b не больше всех констант c_j , то по определению системы $\mathcal{S}$ имеем $b \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$. С другой стороны, $b \notin V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}_0)$ (так как $c' < b$). Следовательно, система $\mathcal{S}_0$ не эквивалентна $\mathcal{S}$.

Докажем достаточность. Пусть алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}$ и система $\mathcal{S}$ имеет вид (5).

Обозначим через $c_\alpha \in \mathcal{C}$ точные нижние грани множеств $\{c_i \mid i \in I_\alpha\}$. Получаем, что $\mathcal{S}$ эквивалентна конечной системе

$$\bigcup_{\alpha} \{z_\alpha \leq c_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1 \right\},$$

и поэтому булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ слабо нётерова по уравнениям. $\square$

6. q_ω - и u_ω -компактность булевых алгебр

Через $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ будем обозначать точку, координаты которой p_α являются значениями переменных z_α .

Пусть координаты точки $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ являются элементами булевой $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}$. Произвольным образом линейно упорядочим индексы $\alpha \in \{0, 1\}^n$,

минимальный и максимальный индекс обозначим соответственно через ω , ω' . Определим точку $Q = (q_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ как

$$q_\alpha = \begin{cases} p_\omega, & \text{если } \alpha = \omega, \\ p_\alpha \bigwedge_{\beta < \alpha} \bar{p}_\beta, & \text{если } \alpha \neq \omega. \end{cases} \quad (8)$$

Точку Q будем называть *расщеплением точки P с первой координатой ω* . Расщепление точки обладает следующими свойствами.

Лемма 6.1. Для расщепления

$$Q = (q_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$$

точки

$$P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$$

с первой координатой ω выполнено следующее:

- 1) $q_\omega = p_\omega$;
- 2) $q_\alpha \leq p_\alpha$ для всех $\alpha \in \{0, 1\}^n$;
- 3) $q_\alpha q_\gamma = 0$ при $\alpha \neq \gamma$;
- 4) $\bigvee_\alpha p_\alpha = \bigvee_\alpha q_\alpha$.

Доказательство. Первые два утверждения леммы следуют непосредственно из определения расщепления.

Докажем третье утверждение. Пусть $\alpha, \beta \neq \omega$. Тогда

$$q_\alpha q_\beta = \left(p_\alpha \bigwedge_{\gamma < \alpha} \bar{p}_\gamma \right) \left(p_\beta \bigwedge_{\delta < \beta} \bar{p}_\delta \right).$$

Пусть $\alpha < \beta$ при заданном линейном упорядочении индексов. Тогда произведение $\bigwedge_{\delta < \beta} \bar{p}_\delta$ содержит $\bar{p}_\alpha$, и поэтому

$$q_\alpha q_\beta = \left(p_\alpha \bigwedge_{\gamma < \alpha} \bar{p}_\gamma \right) \left(p_\beta \bar{p}_\alpha \bigwedge_{\substack{\delta < \beta, \\ \delta \neq \alpha}} \bar{p}_\delta \right) = p_\alpha \bar{p}_\alpha \left(\bigwedge_{\gamma < \alpha} \bar{p}_\gamma \bigwedge_{\substack{\delta < \beta, \\ \delta \neq \alpha}} \bar{p}_\delta \right) = 0.$$

Осталось рассмотреть случай, когда ровно одна из координат α, β равна ω . Пусть для определённости $\alpha = \omega$, $\beta \neq \omega$. Тогда

$$q_\alpha q_\beta = p_\omega \left(p_\beta \bar{p}_\alpha \bigwedge_{\substack{\delta < \beta, \\ \delta \neq \alpha}} \bar{p}_\delta \right) = p_\omega \bar{p}_\omega \bigwedge_{\substack{\omega < \delta < \beta, \\ \delta \neq \alpha}} \bar{p}_\delta = 0.$$

Докажем четвёртое утверждение леммы. Пусть индексы ω , ω' являются минимальным и максимальным элементами при заданном линейном упорядочении индексов $\{\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$. Для произвольного γ докажем по индукции равенство

$$\bigvee_{\alpha \leq \gamma} q_\alpha = \bigvee_{\alpha \leq \gamma} p_\alpha. \quad (9)$$

Если $\gamma = \omega$, то имеем истинное равенство $q_\omega = p_\omega$. Допустим, что для всех $\gamma < \delta$ равенство (9) выполнено. Докажем его для $\gamma = \delta$. В самом деле,

$$\begin{aligned} \bigvee_{\alpha \leq \delta} q_\alpha &= \bigvee_{\alpha < \delta} q_\alpha \vee q_\delta = \bigvee_{\alpha < \delta} p_\alpha \vee p_\delta \bigwedge_{\beta < \delta} \bar{p}_\beta = \left(\bigvee_{\alpha < \delta} p_\alpha \vee p_\delta \right) \bigwedge_{\beta < \delta} \left(\bigvee_{\alpha < \delta} p_\alpha \vee \bar{p}_\beta \right) = \\ &= \left(\bigvee_{\alpha \leq \delta} p_\alpha \right) \bigwedge_{\beta < \delta} \left(\bigvee_{\substack{\alpha < \delta, \\ \alpha \neq \beta}} p_\alpha \vee p_\beta \vee \bar{p}_\beta \right) = \left(\bigvee_{\alpha \leq \delta} p_\alpha \right) \bigwedge_{\beta < \delta} \left(\bigvee_{\substack{\alpha < \delta, \\ \alpha \neq \beta}} p_\alpha \vee 1 \right) = \bigvee_{\alpha \leq \delta} p_\alpha. \end{aligned}$$

При $\gamma = \omega'$ равенство (9) доказывает утверждение леммы. $\square$

Из леммы 6.1 мы получаем следующий результат о совместности систем уравнений над булевыми алгебрами.

Лемма 6.2. Если над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй совместна система

$$\mathcal{S}(Z) = \bigcup_{\alpha} \mathcal{S}_\alpha \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1 \right\}, \quad (10)$$

то совместна и система уравнений (5).

Доказательство. Пусть $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ — решение системы (10) и $Q = (q_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ — расщепление точки P с первой координатой ω .

Из третьего пункта леммы 6.1 следует, что $q_\alpha q_\beta = 0$, поэтому точка Q удовлетворяет уравнениям (6).

Поскольку для координат точки P выполнено равенство $\bigvee_{\alpha} p_\alpha = 1$, то по четвёртому пункту леммы 6.1 имеем $\bigvee_{\alpha} q_\alpha = 1$. Следовательно, точка Q удовлетворяет уравнению (7).

Так как по второму утверждению леммы 6.1 $q_\alpha \leq p_\alpha$, то все неравенства систем $\mathcal{S}_\alpha$ для точки Q выполнены.

Таким образом, точка Q является решением системы уравнений (5). $\square$

Теорема 6.3. Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ q_ω -компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_0 - и E_1 -систем.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.5. Докажем достаточность.

Пусть $\mathcal{S}$ — система уравнений (5) над $\mathcal{B}$ и

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}) \quad (11)$$

для некоторого уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}$. Построим конечную подсистему $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ со свойством

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}') \subseteq V_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}). \quad (12)$$

Если система $\mathcal{S}$ несовместна, то по условию существует несовместная подсистема $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, для которой, очевидно, выполнено включение (12).

Пусть теперь система $\mathcal{S}$ совместна и точка $P = (p_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ — её решение. Рассмотрим следующую систему уравнений от переменной x :

$$\mathcal{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}\}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Система $\mathcal{S}_0$ имеет ненулевое решение $x_0 \neq 0$. Если допустить, что $x_0 \leq p_\alpha$, то $x_0 \leq \mathbf{c}$, так как точка P удовлетворяет уравнению $z_\alpha \leq \mathbf{c}$. Поскольку элемент x_0 удовлетворяет системе $\mathcal{S}_0$, то выполнено также $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}$. Однако одновременное выполнение двух неравенств $x_0 \leq \mathbf{c}$ и $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}$ влечёт равенство $x_0 = 0$, что противоречит выбору элемента x_0 .

Таким образом, $x_0 \not\leq p_\alpha$.

Определим точку $Q = (q_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ как

$$q_\beta = \begin{cases} p_\beta, & \text{если } \beta \neq \alpha, \\ p_\beta \vee x_0, & \text{если } \beta = \alpha. \end{cases}$$

Ясно, что точка Q удовлетворяет всем системам $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}$, $\beta \in \{0, 1\}^n$, а также уравнению (7). Через $R = (r_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ обозначим расщепление точки Q с первой координатой α . По лемме 6.2 получаем, что точка R — решение системы $\mathcal{S}$. Поскольку α — первая координата расщепления, то $r_\alpha = q_\alpha$. Имеем

$$r_\alpha \mathbf{c} = (p_\alpha \vee x_0) \mathbf{c} = p_\alpha \mathbf{c} \vee x_0 \mathbf{c} = p_\alpha \vee 0 = p_\alpha.$$

Поскольку $x_0 \not\leq p_\alpha$, то $p_\alpha \neq r_\alpha$. Следовательно, $r_\alpha \not\leq \mathbf{c}$, что противоречит включению (11).

2. Система $\mathcal{S}_0$ имеет единственное решение $x = 0$. Поскольку по условию над $\mathcal{B}$ не существует E_1 -систем, то $\mathcal{S}_0$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\mathcal{S}'_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I'_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}\}, \quad |I'_\alpha| < \infty.$$

Из равенства $V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}'_0) = \{0\}$ следует, что

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot \bigwedge_{i \in I'_\alpha} \mathbf{c}_i = 0 \iff \bigwedge_{i \in I'_\alpha} \mathbf{c}_i \leq \mathbf{c}.$$

Из последнего неравенства следует, что для конечной подсистемы

$$\mathcal{S}' = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I'_\alpha\} \subseteq \mathcal{S}_\alpha \subseteq \mathcal{S}$$

выполнено включение (12).

Мы доказали, что для уравнений вида $z_\alpha \leq \mathbf{c}$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}'$, для которой выполняется включение (12). Пусть теперь уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$, зависящее от переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, удовлетворяет включению

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq V_{\mathcal{B}}(\tau(X) = \sigma(X)).$$

Уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ можно представить в виде системы $\mathcal{S}_{\tau=\sigma}$ вида (4). Поскольку для каждого уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathcal{S}_{\tau=\sigma}$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}'_\alpha \subseteq \mathcal{S}_\alpha$ со свойством

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}'_\alpha) \subseteq V_{\mathcal{B}}(z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha),$$

то по лемме 2.2 для конечной подсистемы $S' = \bigcup_{\alpha} S'_{\alpha} \subseteq S$ выполнено

$$V_B(S') \subseteq V_B(\tau(X) = \sigma(X)).$$

Теорема доказана. $\square$

Теорема 6.4. Булева $\mathcal{C}$ -алгебра $\mathcal{B}$ $\mathfrak{u}_{\omega}$ -компактна тогда и только тогда, когда над $\mathcal{B}$ не существует E_k -систем ни для какого $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Необходимость следует из теоремы 2.5. Докажем достаточность.

Пусть S — система уравнений (5) над $\mathcal{B}$ и

$$V_B(S) \subseteq \bigcup_{\alpha} V_B(z_{\alpha} \leq c_{\alpha}). \quad (13)$$

Построим конечную подсистему $S' \subseteq S$ со свойством

$$V_B(S') \subseteq \bigcup_{\alpha} V_B(z_{\alpha} \leq c_{\alpha}). \quad (14)$$

Если система S несовместна, то по условию существует несовместная подсистема $S' \subseteq S$, для которой, очевидно, выполнено включение (14).

Пусть теперь система S совместна и точка $P = (p_{\beta} \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ — её решение. Рассмотрим следующие системы уравнений ($\alpha \in \{0, 1\}^n$) от переменной x :

$$\tilde{S}_{\alpha} = \{x \leq c_i \mid i \in I_{\alpha}\} \cup \{x \leq \bar{c}_{\alpha}\}.$$

Возможны следующие два случая.

1. Каждая система $\tilde{S}_{\alpha}$ имеет ненулевое решение $\tilde{x}_{\alpha} \neq 0$. Поскольку $\tilde{x}_{\alpha} \leq \bar{c}_{\alpha}$, то $\tilde{x}_{\alpha} c_{\alpha} = 0$. Можно считать, что все системы $\tilde{S}_{\alpha}$ не эквивалентны всем своим конечным подсистемам (в противном случае мы заменяем все такие системы на эквивалентные им конечные подсистемы и продолжаем работать с неизменёнными системами $\tilde{S}_{\alpha}$).

Поскольку над $\mathcal{B}$ не существует E_k -систем ни для какого $k \in \mathbb{N}$, каждая система $\tilde{S}_{\alpha}$ имеет бесконечное множество решений.

Построим точку $Q = (q_{\alpha} \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$, для которой выполнено следующее:

- 1) $q_{\alpha} \in V_B(\tilde{S}_{\alpha}) \setminus \{0\}$;
- 2) $q_{\alpha} q_{\beta} = 0$ ($\alpha \neq \beta$);
- 3) $q_{\alpha} \tilde{x}_{\alpha} \neq 0$.

Построение точки Q будем вести индукцией по числу систем $\tilde{S}_{\alpha}$. Для этого произвольным образом линейно упорядочим множество индексов $\{0, 1\}^n$, пусть ω — минимальный элемент относительно введённого порядка.

База индукции. В случае одной системы $\tilde{S}_{\omega}$ полагаем $q_{\omega} = \tilde{x}_{\omega}$.

Предположение индукции. Предположим, что для систем $\tilde{S}_{\alpha}$, $\omega \leq \alpha < \omega'$, существует точка $Q' = (q'_{\alpha} \mid \omega \leq \alpha < \omega')$ с указанными выше свойствами.

Шаг индукции. Так как система $\tilde{S}_{\omega'}$ имеет бесконечное число решений, то в качестве элемента $\tilde{x}_{\omega'}$ можно выбрать решение системы $\tilde{S}_{\omega'}$, такое что

$$\tilde{x}_{\omega'} \neq \bigvee_{\alpha \in K} q'_\alpha$$

для любого множества индексов $K \subseteq \{\beta \mid \beta < \omega'\}$.

Рассмотрим следующие случаи.

а) $\bigvee_{\alpha < \omega'} q'_\alpha \not\geq \tilde{x}_{\omega'}$. Следовательно, элемент $\tilde{x}_{\omega'} \overline{\bigvee_{\alpha < \omega'} q'_\alpha}$ не равен 0. Точка Q , определяемая как

$$q_\alpha = \begin{cases} q'_\alpha, & \text{если } \alpha < \omega', \\ \tilde{x}_{\omega'} \overline{\bigvee_{\beta < \omega'} q'_\beta}, & \text{если } \alpha = \omega', \end{cases}$$

очевидно, удовлетворяет всем условиям.

б) $\bigvee_{\alpha < \omega'} q'_\alpha > \tilde{x}_{\omega'}$. Без ограничения общности можно считать, что для всех $\alpha < \omega'$ выполнено $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} \neq 0$ (если бы для некоторых q'_α выполнялось равенство $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} = 0$, то мы исключили бы их из объединения $\bigvee_{\alpha < \omega'} q'_\alpha$ и далее рассматривали бы оставшиеся элементы q'_α).

Для некоторого номера $\alpha_0 < \omega'$ выполнено $q'_{\alpha_0} \tilde{x}_{\omega'} < q'_{\alpha_0}$ (если бы для всех α выполнялось $q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'} = q'_\alpha$, то мы бы имели $\bigvee_{\alpha < \omega'} q'_\alpha \leq \tilde{x}_{\omega'}$, что противоречит условию). Из неравенства $q'_{\alpha_0} \tilde{x}_{\omega'} < q'_{\alpha_0}$ следует, что $q'_{\alpha_0} \tilde{x}_{\omega'} \neq 0$. Непосредственно проверяется, что точка Q с координатами

$$q_\alpha = \begin{cases} q'_\alpha, & \text{если } \alpha < \omega', \alpha \neq \alpha_0, \\ q'_{\alpha_0} \tilde{x}_{\omega'}, & \text{если } \alpha = \alpha_0, \\ q'_\alpha \tilde{x}_{\omega'}, & \text{если } \alpha = \omega', \end{cases}$$

удовлетворяет всем условиям.

Итак, точка Q с требуемыми свойствами построена. Заметим, что из неравенства $q_\alpha \leq \bar{c}_\alpha$ следует, что $q_\alpha c_\alpha = 0$ для всех $\alpha \in \{0, 1\}^n$.

Пусть координаты точки $R = (r_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ определены как

$$r_\alpha = \left(p_\alpha \bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta \right) \vee q_\alpha.$$

Поскольку $p_\alpha \in V_B(\mathcal{S})$ и $q_\alpha \in V_B(\mathcal{S}_\alpha)$, то $r_\alpha \in V_B(\mathcal{S}_\alpha)$ (где система $\mathcal{S}_\alpha$ задана формулой (5)) для каждого $\alpha \in \{0, 1\}^n$.

Для $\alpha \neq \gamma$ имеем

$$\begin{aligned} r_\alpha r_\gamma &= \left(p_\alpha \bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta \vee q_\alpha \right) \left(p_\gamma \bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta \vee q_\gamma \right) = \\ &= p_\alpha p_\gamma \bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta \vee p_\alpha \left[\bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta q_\gamma \right] \vee p_\gamma \left[q_\alpha \bigwedge_{\beta} \bar{q}_\beta \right] \vee q_\alpha q_\gamma = 0 \vee 0 \vee 0 \vee 0 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно, точка R удовлетворяет уравнениям (6).

Имеем

$$\begin{aligned} \bigvee_{\alpha} r_{\alpha} &= \bigvee_{\alpha} \left(p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \vee q_{\alpha} \right) = \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \bigvee_{\alpha} p_{\alpha} \bigvee_{\alpha} q_{\alpha} = \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \cdot 1 \bigvee_{\alpha} q_{\alpha} = \\ &= \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \bigvee_{\alpha} q_{\alpha} = \bigwedge_{\beta} \left(\bar{q}_{\beta} \bigvee_{\alpha} q_{\alpha} \right) = \bigwedge_{\beta} (\bar{q}_{\beta} \vee q_{\beta} \vee \bigvee_{\alpha \neq \beta} q_{\alpha}) = \bigwedge_{\beta} 1 = 1. \end{aligned}$$

Таким образом, точка R удовлетворяет уравнению (7), и поэтому $R \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$.

В соответствии с включением (13) существует α , для которого выполняется неравенство $r_{\alpha} \leq c_{\alpha}$. Имеем

$$r_{\alpha} c_{\alpha} = \left(p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \vee q_{\alpha} \right) c_{\alpha} = p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha} \vee 0 = p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha}.$$

Поскольку $r_{\alpha} c_{\alpha} = r_{\alpha}$, имеем равенство

$$p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha} = p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} \vee q_{\alpha}. \quad (15)$$

Так как

$$p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha} \leq p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta},$$

равенство (15) влечёт соотношения

$$\begin{aligned} p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha} &= p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta}, \\ q_{\alpha} &\leq p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha}. \end{aligned} \quad (16)$$

Однако последнее неравенство невозможно, так как выражение $\bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta}$ содержит $\bar{q}_{\alpha}$, и следовательно,

$$q_{\alpha} \left(p_{\alpha} \bigwedge_{\beta} \bar{q}_{\beta} c_{\alpha} \right) = 0 \neq q_{\alpha}.$$

Таким образом, мы получаем, что точка $R \in V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S})$ не удовлетворяет ни одному из неравенств $z_{\alpha} \leq c_{\alpha}$, что противоречит включению (13).

2. Существует такая система $\tilde{\mathcal{S}}_{\beta}$, что $V_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{S}}_{\beta}) = \{0\}$. Поскольку по условию над $\mathcal{B}$ не существует E_1 -систем, то $\tilde{\mathcal{S}}_{\beta}$ эквивалентна своей конечной подсистеме

$$\tilde{\mathcal{S}}'_{\beta} = \{x \leq c_i \mid i \in I'_{\beta}\} \cup \{x \leq \bar{c}_{\beta}\}, \quad |I'_{\beta}| < \infty.$$

Из равенства $V_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{S}}'_{\beta}) = \{0\}$ следует, что

$$\bar{c}_{\beta} \bigwedge_{i \in I'_{\beta}} c_i = 0 \iff \bigwedge_{i \in I'_{\beta}} c_i \leq c_{\beta}.$$

Из последнего неравенства следует, что для конечной подсистемы

$$\mathcal{S}' = \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I'_\beta\} \subseteq \mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}$$

выполнено включение (14).

Рассмотрим теперь случай, когда в правую часть включения (13) входит несколько уравнений $\{z_\alpha \leq \mathbf{c}_{i_\alpha} \mid 1 \leq i \leq n_\alpha\}$, зависящих от общей переменной z_α , и пусть выполняется включение

$$V_B(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} V_B(z_\alpha \leq \mathbf{c}_{i_\alpha}). \quad (17)$$

Построим конечную подсистему $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ со свойством

$$V_B(\mathcal{S}') \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} V_B(z_\alpha \leq \mathbf{c}_{i_\alpha}). \quad (18)$$

Определим вспомогательную систему $\tilde{\mathcal{S}}$ следующим образом. Пусть системы $\mathcal{S}_{i_\alpha}$ ($1 \leq i \leq n_\alpha$) получаются из $\mathcal{S}_\alpha$ заменой переменной z_α на новую переменную z_{i_α} . Тогда

$$\tilde{\mathcal{S}} = \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} \mathcal{S}_{i_\alpha} \cup \bigcup_{\substack{\alpha \neq \beta, \\ i \neq j}} \{z_{i_\alpha} z_{j_\beta} = 0\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} \bigvee_{i=1}^{n_\alpha} z_{i_\alpha} = 1 \right\}.$$

Покажем, что для системы $\tilde{\mathcal{S}}$ выполняется включение

$$V_B(\tilde{\mathcal{S}}) \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_\alpha} V_B(z_{i_\alpha} \leq \mathbf{c}_{i_\alpha}). \quad (19)$$

Предположим противное: существует точка

$$\tilde{P} = (\tilde{p}_{i_\alpha} \mid \alpha \in \{0, 1\}^n, 1 \leq i \leq n_\alpha) \in V_B(\tilde{\mathcal{S}}),$$

такая что

$$\tilde{p}_{i_\alpha} \not\leq \mathbf{c}_{i_\alpha} \quad (20)$$

для всех $\alpha \in \{0, 1\}^n$, $1 \leq i \leq n_\alpha$. Непосредственно проверяется, что точка $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$, где

$$p_\alpha = \bigvee_{i=1}^{n_\alpha} \tilde{p}_{i_\alpha},$$

является решением системы $\mathcal{S}$. Тогда ввиду (17) существуют такие $\beta \in \{0, 1\}^n$ и $1 \leq j \leq n_\beta$, что $p_\beta \leq \mathbf{c}_{j_\beta}$. Из определения координаты p_β получаем, что

$$\tilde{p}_{i_\beta} \leq \mathbf{c}_{j_\beta}$$

для всех $1 \leq i \leq n_\beta$. Однако последнее неравенство противоречит (20).

Таким образом, для системы $\tilde{\mathcal{S}}$ выполняется включение (19), которое имеет вид включения (13). Поэтому для $\tilde{\mathcal{S}}$ справедливы все рассуждения, которые

были приведены выше при доказательстве существования конечной подсистемы $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$, удовлетворяющей включению (14). Следовательно, существует конечная подсистема $\tilde{\mathcal{S}}' \subseteq \mathcal{S}$, такая что

$$V_{\mathcal{B}}(\tilde{\mathcal{S}}') \subseteq \bigcup_{\alpha} \bigcup_{i=1}^{n_{\alpha}} V_{\mathcal{B}}(z_{i\alpha} \leq c_{i\alpha}). \quad (21)$$

Пусть $\mathcal{S}'$ — система уравнений от множества переменных $\{z_{\alpha} \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$, получаемая из $\tilde{\mathcal{S}}'$ заменой всех переменных $z_{i\alpha}$ ($1 \leq i \leq n_{\alpha}$) на z_{α} .

С помощью стандартных рассуждений легко проверяется, что система $\mathcal{S}'$ удовлетворяет включению (18).

Рассмотрим наиболее общий вид уравнений, входящих в правую часть включения (13).

Пусть даны уравнения $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$, $1 \leq i \leq m$, от переменных $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, удовлетворяющие включению

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)). \quad (22)$$

Перейдя к переменным $Z = \{z_{\alpha} \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$, имеем

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\bar{\mathcal{S}}_i), \quad (23)$$

где конечная система $\bar{\mathcal{S}}_i = \{z_{\alpha} \leq c_{\alpha i} \mid \alpha \in \{0, 1\}^n\}$ вида (4) получена из уравнения $\tau_i(X) = \sigma_i(X)$ с помощью замены переменных (1) (здесь мы не включаем в системы $\bar{\mathcal{S}}_i$ уравнения (6), (7), поскольку данные уравнения входят в систему $\mathcal{S}$).

Используя дистрибутивность операции объединения множеств, множество $\bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\bar{\mathcal{S}}_i)$ можно представить в виде конечного пересечения множеств вида

$$M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m) = V_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_1} \leq c_{\alpha_1}) \cup V_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_2} \leq c_{\alpha_2}) \cup \dots \cup V_{\mathcal{B}}(z_{\alpha_m} \leq c_{\alpha_m}).$$

Таким образом, имеем включение

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}) \subseteq \bigcap_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m).$$

Выше было доказано, что для каждого множества $M(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$ существует конечная подсистема $\mathcal{S}'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$. Тогда по лемме 2.2 для системы

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m} \mathcal{S}'(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m)$$

выполнено включение

$$V_{\mathcal{B}}(\mathcal{S}') \subseteq \bigcup_{i=1}^m V_{\mathcal{B}}(\tau_i(X) = \sigma_i(X)).$$

Теорема доказана. $\square$

7. Геометрическая эквивалентность булевых алгебр

Замечание 7.1. Напомним, что согласно определениям проблема геометрической эквивалентности имеет смысл лишь для таких пар булевых алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, у которых подалгебры, порождённые константами, изоморфны друг другу (т. е. $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — $\mathcal{C}$ -алгебры). Таким образом, все булевы алгебры, рассматриваемые в данном разделе, имеют изоморфные друг другу подалгебры констант.

Теорема 7.2. Две булевы $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- 1) любая несовместная над $\mathcal{B}_1$ система уравнений является несовместной над алгеброй $\mathcal{B}_2$ и наоборот;
- 2) точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_j \mid j \in J\} \subseteq \mathcal{C}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$ тогда и только тогда, когда она существует и равна 0 в $\mathcal{B}_2$.

Доказательство. Докажем необходимость. Если булевы $\mathcal{C}$ -алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ геометрически эквивалентны, то для любой системы $\mathcal{C}$ -уравнений $\mathcal{S}$ выполнено $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$. Если система $\mathcal{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_1$, то её радикал совпадает с множеством всех $\mathcal{C}$ -уравнений. Следовательно, радикал $\text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$ также содержит все $\mathcal{C}$ -уравнения и система $\mathcal{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_2$.

Если точная нижняя грань множества $\{\mathbf{c}_j \mid j \in J\}$ существует и равна 0 в $\mathcal{B}_1$, то система $\mathcal{S} = \{x \leq \mathbf{c}_j \mid j \in J\}$ имеет единственное решение $x = 0$ над алгеброй $\mathcal{B}_1$. Следовательно, уравнение $x = 0$ принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})$. Из геометрической эквивалентности булевых $\mathcal{C}$ -алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ следует, что $x = 0 \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$. Поэтому система $\mathcal{S}$ имеет над $\mathcal{B}_2$ единственное решение $x = 0$ и точная нижняя грань множества $\{\mathbf{c}_j \mid j \in J\}$ равна 0 в алгебре $\mathcal{B}_2$.

Докажем достаточность. Пусть $\mathcal{S}$ — система $\mathcal{C}$ -уравнений. Покажем, что для любого уравнения $\tau(X) = \sigma(X) \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})$ выполнено также $\tau(X) = \sigma(X) \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

Приведём систему $\mathcal{S}$ к виду (5). Уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ при этом преобразуется к системе $\mathcal{S}_{\tau=\sigma}$ вида (4). Достаточно доказать, что каждое уравнение $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathcal{S}_{\tau=\sigma}$ принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

Для произвольного уравнения $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$ системы $\mathcal{S}_{\tau=\sigma}$ составим вспомогательную систему уравнений

$$\mathcal{S}_0 = \{x \leq \mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\} \cup \{x \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha\}. \quad (24)$$

Возможны следующие два случая.

1. $V_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}_0) = \{0\}$. Тогда точная нижняя грань множества элементов $\{\mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\} \cup \{\bar{\mathbf{c}}_\alpha\}$ равна 0 в $\mathcal{B}_1$. По второму условию теоремы получаем, что $V_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S}_0) = \{0\}$.

Предположим, что существует точка

$$P = (p_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n) \in V_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S}),$$

такая что $p_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$. Рассмотрим элемент $z_0 = p_\alpha \bar{\mathbf{c}}_\alpha$. Непосредственно проверяется, что z_0 является решением системы (24) над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}_2$. Но

поскольку $p_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$, то $z_0 \neq 0$, что противоречит равенству $V_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S}_0) = \{0\}$. Следовательно, для всех решений $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ системы $\mathcal{S}$ выполнено $p_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$, откуда следует, что $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

2. У системы $\mathcal{S}_0$ существует ненулевое решение $x_0 \in \mathcal{B}_1$. Пусть $P = (p_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ — решение системы $\mathcal{S}$ над булевой $\mathcal{C}$ -алгеброй $\mathcal{B}_1$ (если система $\mathcal{S}$ несовместна над $\mathcal{B}_1$, то по первому условию леммы система $\mathcal{S}$ несовместна и над $\mathcal{B}_2$, следовательно, выполняется равенство $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$). Если допустить, что $x_0 \leq p_\alpha$, то $x_0 \leq \mathbf{c}_\alpha$, так как точка P удовлетворяет уравнению $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$. Поскольку элемент x_0 удовлетворяет системе $\mathcal{S}_0$, выполнено также $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$. Однако одновременное выполнение двух неравенств $x_0 \leq \mathbf{c}_\alpha$ и $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$ влечёт равенство $x_0 = 0$, что противоречит выбору элемента x_0 .

Таким образом, $x_0 \not\leq p_\alpha$.

Построим точку $Q = (q_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ следующим образом:

$$q_\beta = \begin{cases} p_\beta, & \text{если } \beta \neq \alpha, \\ p_\beta \vee x_0, & \text{если } \beta = \alpha. \end{cases}$$

Ясно, что точка Q удовлетворяет всем системам $\mathcal{S}_\beta \subseteq \mathcal{S}$, $\beta \in \{0, 1\}^n$, а также уравнению (7). Через $R = (r_\beta \mid \beta \in \{0, 1\}^n)$ обозначим расщепление точки Q с первой координатой α . С помощью леммы 6.2 получаем, что точка R является решением системы $\mathcal{S}$. Поскольку α является первой координатой расщепления, то $r_\alpha = q_\alpha$. Имеем

$$r_\alpha \mathbf{c}_\alpha = (p_\alpha \vee x_0) \mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \mathbf{c}_\alpha \vee x_0 \mathbf{c}_\alpha = p_\alpha \vee 0 = p_\alpha \neq r_\alpha$$

(здесь $x_0 \mathbf{c}_\alpha = 0$, так как по выбору точки x_0 имеем $x_0 \leq \bar{\mathbf{c}}_\alpha$). Таким образом, $r_\alpha \not\leq \mathbf{c}_\alpha$, и поэтому

$$V_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) \not\subseteq V_{\mathcal{B}_1}(z_\alpha \leq \mathbf{c}),$$

откуда получаем, что $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha \notin \text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})$, что противоречит выбору уравнения $\tau(X) = \sigma(X)$. $\square$

Теорема 7.3. Пусть $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ — булевы $\mathcal{C}$ -алгебры. Справедливы следующие утверждения:

- 1) для любой конечной системы уравнений $\mathcal{S}$ выполнено

$$\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S});$$

- 2) $\text{qvar}(\mathcal{B}_1) = \text{qvar}(\mathcal{B}_2)$;
- 3) если алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ слабо нётеровы по уравнениям, то они геометрически эквивалентны;
- 4) если алгебры $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ q_ω -компактны, то они геометрически эквивалентны.

Доказательство. Для доказательства первого утверждения достаточно показать, что для любой конечной системы вида (5) и уравнения $z_\gamma \leq \mathbf{c} \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})$ выполнено $z_\gamma \leq \mathbf{c} \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

Конечная подсистема $\mathcal{S}_\alpha$ системы $\mathcal{S}$ эквивалентна уравнению $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$, где $\mathbf{c}_\alpha = \bigwedge_{i \in I_\alpha} \mathbf{c}_i$. Следовательно, систему $\mathcal{S}$ можно записать в виде

$$\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha} \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1 \right\}.$$

Если $\bigvee_{\alpha} \mathbf{c}_\alpha < 1$, то система $\mathcal{S}$ несовместна над булевыми $\mathcal{C}$ -алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ и равенство $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$ выполняется.

Пусть теперь $\bigvee_{\alpha} \mathbf{c}_\alpha = 1$. Легко убедиться, что точка $P = (\mathbf{c}_\alpha \mid \alpha \in \{0, 1\}^n)$ является решением системы

$$\bigcup_{\alpha} \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1 \right\}$$

над алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Тогда расщепление Q точки P с первой координатой γ является решением системы $\mathcal{S}$ над алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. Из определения расщепления точки следует, что координата с индексом γ точек P, Q равна $\mathbf{c}_\gamma$. Так как $z_\gamma \leq \mathbf{c} \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S})$, то в алгебре $\mathcal{C}$ выполнено неравенство $\mathbf{c}_\gamma \leq \mathbf{c}$. Следовательно, из неравенства $z_\gamma \leq \mathbf{c}_\gamma$ над булевыми алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ следует, что $z_\gamma \leq \mathbf{c}$. Поэтому $z_\gamma \leq \mathbf{c} \in \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$. Таким образом, $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{S}) = \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\mathcal{S})$.

Докажем второе утверждение. Пусть

$$\varphi: \forall x_1 \forall x_2 \dots \forall x_n$$

$$(\tau_1(X) = \sigma_1(X)) \wedge (\tau_2(X) = \sigma_2(X)) \wedge \dots \wedge (\tau_m(X) = \sigma_m(X)) \rightarrow (\tau(X) = \sigma(X)) -$$

произвольное квазитожество, не являющееся истинным в булевой $\mathcal{C}$ -алгебре $\mathcal{B}_1$. Это означает, что существуют такие элементы $b_1, b_2, \dots, b_n \in \mathcal{B}_1$, что $\tau_i(b_1, b_2, \dots, b_n) = \sigma_i(b_1, b_2, \dots, b_n)$ для всех $1 \leq i \leq m$, но $\tau(b_1, b_2, \dots, b_n) \neq \sigma(b_1, b_2, \dots, b_n)$. Следовательно, уравнение $\tau(X) = \sigma(X)$ не принадлежит радикалу $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(\{\tau_i(X) = \sigma_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\})$. Тогда по доказанному выше первому пункту теоремы мы получаем

$$\tau(X) = \sigma(X) \notin \text{Rad}_{\mathcal{B}_2}(\{\tau_i(X) = \sigma_i(X) \mid 1 \leq i \leq m\}),$$

и поэтому существует набор элементов $b'_1, b'_2, \dots, b'_n \in \mathcal{B}_2$, такой что $\tau_i(b'_1, b'_2, \dots, b'_n) = \sigma_i(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$ для всех $1 \leq i \leq m$, но $\tau(b'_1, b'_2, \dots, b'_n) \neq \sigma(b'_1, b'_2, \dots, b'_n)$. Мы получаем, что выбранное квазитожество φ не является истинным в булевой $\mathcal{C}$ -алгебре $\mathcal{B}_2$. Таким образом, $\text{qvar}(\mathcal{B}_1) = \text{qvar}(\mathcal{B}_2)$.

Докажем третье утверждение. Рассмотрим систему уравнений $\mathcal{S}$ вида (5). Поскольку по теореме 5.1 алгебра $\mathcal{C}$ полна в $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$, то для множеств констант $\{\mathbf{c}_i \mid i \in I_\alpha\}$ существует точная нижняя грань $\mathbf{c}_\alpha \in \mathcal{C}$. Следовательно, системы $\mathcal{S}_\alpha$ эквивалентны над алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ уравнениям $z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha$.

Таким образом, система $\mathcal{S}$ эквивалентна над алгебрами $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$ конечной системе

$$\mathcal{S}' = \bigcup_{\alpha} \{z_\alpha \leq \mathbf{c}_\alpha\} \cup \bigcup_{\alpha \neq \beta} \{z_\alpha z_\beta = 0\} \cup \left\{ \bigvee_{\alpha} z_\alpha = 1 \right\}.$$

Ввиду доказанного выше первого пункта теоремы мы получаем равенство $\text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(S') = \text{Rad}_{\mathcal{B}_1}(S')$, откуда следует геометрическая эквивалентность булевых $\mathcal{C}$ -алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$.

Докажем четвёртое утверждение. Из доказанного выше второго пункта теоремы следует равенство квазимногообразий $\text{qvar}(\mathcal{B}_1) = \text{qvar}(\mathcal{B}_2)$. Из теоремы 2.7 мы получаем равенство предмногообразий $\text{pvar}(\mathcal{B}_1) = \text{pvar}(\mathcal{B}_2)$, из которого с помощью теоремы 2.8 получаем геометрическую эквивалентность булевых $\mathcal{C}$ -алгебр $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2$. $\square$

Литература

- [1] Даниярова Э. Ю., Мясников А. Г., Ремесленников В. Н. Алгебраическая геометрия над алгебраическими системами. II. Основания // *Фундамент. и прикл. мат.* — 2011/2012. — Т. 17, вып. 1. — С. 65—106.
- [2] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Unification theorems in algebraic geometry // *Algebra Discrete Math.* — 2008. — Vol. 1. — P. 80—112.
- [3] Daniyarova E., Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over algebraic structures. III. Equationally Noetherian property and compactness // *Southeast Asian Bull. Math.* — 2011. — Vol. 35. — P. 35—68.
- [4] Kotov M. Equationally Noetherian property and close properties // *Southeast Asian Bull. Math.* — 2011. — Vol. 35. — P. 419—429.
- [5] Monk D. *Handbook of Boolean Algebras*. — Elsevier, 1989.
- [6] Miasnikov A., Remeslennikov V. Algebraic geometry over groups. II. Logical foundations // *J. Algebra*. — 2000. — Vol. 234. — P. 225—276.
- [7] Plotkin B. Algebras with the same (algebraic) geometry // *Proc. Steklov Inst. Math.* — 2003. — Vol. 242. — P. 165—196.
- [8] Shevlyakov A. Algebraic geometry over linear ordered semilattices // *Algebra and Model Theory*. Vol. 8 / A. G. Pinus et al., eds. — Novosibirsk: NSTU, 2011. — P. 116—131.
- [9] Shevlyakov A. Commutative idempotent semigroups at the service of universal algebraic geometry // *Southeast Asian Bull. Math.* — 2011. — Vol. 35. — P. 111—136.