Оценки порядка роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье интегрируемых функций*

Н. Ю. АНТОНОВ
Институт математики и механики УрО РАН
e-mail: Nikolai.Antonov@imm.uran.ru

УДК 517.518

Ключевые слова: кратные тригонометрические ряды Фурье, оценки порядка роста.

Аннотация

Получены оценки порядка роста последовательностей прямоугольных частичных сумм кратных тригонометрических рядов Фурье функций, интегрируемых на d-мерном торе $[-\pi,\pi]^d$.

Abstract

N. Yu. Antonov, Estimates for the growth order of sequences of multiple rectangular Fourier sums of integrable functions, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 3—15.

Estimates on the growth order of sequences of rectangular partial sums of multiple Fourier series of functions integrable on the d-dimensional torus $[-\pi,\pi]^d$ are obtained.

1. Введение

Пусть $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых и действительных чисел соответственно, $d\in\mathbb{N}$, $\mathbb{T}^d=[-\pi,\pi)^d$ — d-мерный тор, $\varphi\colon[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ — неубывающая функция. Обозначим через $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ множество всех определённых на $\mathbb{T}^d$ измеримых по Лебегу вещественнозначных функций f, удовлетворяющих условию

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}\varphi(|f(\mathbf{t})|)\,d\mathbf{t}<\infty.$$

Пусть $f\in L(\mathbb{T}^d)$, $\mathbf{k}=(k^1,k^2,\ldots,k^d)\in\mathbb{Z}^d$, $\mathbf{x}=(x^1,x^2,\ldots,x^d)\in\mathbb{R}^d$, $\mathbf{kx}=$ $=k^1x^1+k^2x^2+\ldots+k^dx^d$,

*Работа выполнена при финансовой поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (грант НШ-4538.2014.1) и Программы государственной поддержки ведущих университетов РФ (соглашение № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 3—15.

$$\sum_{\mathbf{k}\in\mathbb{Z}^d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}} - \tag{1}$$

кратный тригонометрический ряд Фурье функции f. Пусть $\mathbf{n}=(n^1, n^2, \ldots, n^d)$ — вектор с неотрицательными целочисленными координатами. Обозначим через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы ряда (1)

$$S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}) = \sum_{\mathbf{k}=(k^1,\ldots,k^d):\ |k^j|\leqslant n^j,\ 1\leqslant j\leqslant d} a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\mathbf{x}}.$$

Будем обозначать через $D_n(t)$, $n \in \mathbb{N}$, $t \in \mathbb{T}$, ядро Дирихле порядка n:

$$D_n(t) = \frac{\sin(n+1/2)t}{2\sin(t/2)},$$

через $\mathbf{D}_{\mathbf{n}}(\mathbf{t})$, $\mathbf{n} = (n^1, \ldots, n^d) \in \mathbb{N}^d$, $\mathbf{t} = (t^1, \ldots, t^d) \in \mathbb{T}^d$, — d-мерное прямоугольное ядро Дирихле порядка $\mathbf{n}$:

$$\mathbf{D}_{\mathbf{n}}(\mathbf{t}) = D_{n^1}(t^1) \cdot \ldots \cdot D_{n^d}(t^d).$$

Положим $\ln^+ u = \ln(u+e)$, $u \geqslant 0$.

В случае $d = 1$ хорошо известно [8], что для произвольной функции $f \in L(\mathbb{T})$ для почти всех $x \in \mathbb{T}$ справедлива оценка

$$S_n(f, x) = o(\ln n). \tag{2}$$

К. И. Осколков [6] обобщил соотношение (2) на случай произвольной подпоследовательности последовательности сумм Фурье: для любой последовательности натуральных чисел $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и любой функции $f \in L(\mathbb{T})$

$$S_{n_k}(f, x) = o(\ln k) \quad \text{п. в.} \tag{3}$$

В случае $d = 2$ Г. А. Карагулян [5] получил следующий двумерный аналог оценки (3): для произвольной последовательности $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$, $k \in \mathbb{N}$, и для каждой функции $f \in L\ln^+ L(\mathbb{T}^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln^2 k) \quad \text{п. в.} \tag{4}$$

В [3] получено обобщение оценки (4) на классы $\varphi(L)(\mathbb{T}^2)$, промежуточные между $L\ln^+ L(\mathbb{T}^2)$ и $L(\ln^+ L)^2(\mathbb{T}^2)$: пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — произвольная последовательность двумерных векторов с натуральными координатами, функция $\psi\colon [0, +\infty) \to (0, +\infty)$ не убывает, функция $\ln u/\psi(u)$ также не убывает при достаточно больших u; тогда для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)\psi(L)(\mathbb{T}^2)$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o\left(\frac{\ln^2 k}{\psi(k)}\right) \quad \text{п. в.}$$

В [4] результат [3] обобщён со случая $d = 2$ на случай произвольного $d \geqslant 2$.

Пусть последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2, \ldots, n_k^d)$, представима в виде

$$n_k^j = \alpha_j m_k + O(1), \quad k \in \mathbb{N}, \quad 1 \leqslant j \leqslant d, \tag{5}$$

где $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ — положительные вещественные числа, $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел. Тогда [2] для любой функции f из класса $L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d)$ при почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\ln k). \tag{6}$$

В настоящей работе получены аналоги оценок (4) и (6) для случая, когда $\varphi(L) = L$.

Теорема 1. *Пусть $d \geqslant 2$, $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность d-мерных векторов, удовлетворяющих условию (5), $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ — неубывающая последовательность положительных чисел, такая что ряд*

$$\sum_{m=2}^{\infty} \frac{(\ln m)^{d-2}}{m\lambda_m} \tag{7}$$

сходится. Тогда для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^d)$ для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$ справедлива оценка

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o(\lambda_{m_k} \ln k).$$

В частности (при $\lambda_m = (\ln m)^{d-1}(\ln\ln m)^{1+\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$),

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o\big((\ln m_k)^{d-1}(\ln\ln m_k)^{1+\varepsilon} \ln k\big) \quad \textit{п. в.}$$

Если $d = 2$, то теорему 1 можно распространить со случая, когда последовательность $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию (5), на произвольный случай следующим образом.

Теорема 2. *Пусть $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность двумерных векторов с натуральными координатами, $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$, $\lim\limits_{k\to\infty} \min\{n_k^1, n_k^2\} = \infty$, $\psi\colon [0, +\infty) \to$ $\to [0, +\infty)$ — неубывающая функция, такая что функция $u/\psi(u)$ не убывает и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\psi(k)} < \infty.$$

Тогда для любой функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f, \mathbf{x}) = o\big(\psi\big(\min\{n_k^1, n_k^2\}\big) \ln k\big) \quad \textit{п. в.} \tag{8}$$

2. Доказательство теоремы 1

Для d-мерного вектора $\mathbf{u} = (u^1, u^2, \dots, u^d)$ обозначим

$$\|\mathbf{u}\| = \max\{|u^1|, |u^2|, \dots, |u^d|\},$$

для $u > 0$ через $[u]$ обозначим целую часть числа u.

Положим $a_k = 2^{2^k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Тогда если ряд (7) сходится, то

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\ln a_k)^{d-1}}{\lambda_{a_k}} < \infty. \tag{9}$$

В самом деле,

$$\sum_{m=2}^{\infty}\frac{(\ln m)^{d-2}}{m\lambda_m}=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{m=a_{k-1}}^{a_k-1}\frac{(\ln m)^{d-2}}{m\lambda_m}\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{a_k}}\int\limits_{a_{k-1}}^{a_k}\frac{(\ln u)^{d-2}du}{u}=$$
$$=\frac{1}{d-1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_{a_k}}\big((\ln a_k)^{d-1}-(\ln a_{k-1})^{d-1}\big)\geqslant\frac{1}{2(d-1)}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(\ln a_k)^{d-1}}{\lambda_{a_k}},$$

и (9) доказано.

Далее мы будем использовать идею работы К. Тандори [10]. В процессе доказательства через $C_1, C_2, C_3, \ldots$ будем обозначать положительные константы, зависящие только от размерности d, а также от величин $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\lambda_{a_k}^{-1}$ и

$$\sup_{k\in\mathbb{N}}\left(\max\left\{\frac{\|\mathbf{n}_k\|}{m_k},\ \frac{m_k}{\min\{n_k^j\colon 1\leqslant j\leqslant d\}}\right\}\right),$$

порождаемых последовательностями $\{\lambda_m\}_{m=1}^{\infty}$ и $\{\mathbf{n}_k\}_{k=1}^{\infty}$ соответственно.

Предположим от противного, что заключение теоремы не выполняется, т. е. для некоторой последовательности $\{\lambda_m\}$, такой что ряд (7) сходится, и для некоторой функции $f\in L(\mathbb{T}^d)$

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})\neq o(\lambda_{m_k}\ln k)$$

для всех $\mathbf{x}$ из некоторого множества E положительной меры. Слегка изменив последовательность $\{\lambda_m\}$, можно добиться того, чтобы для неё ряд (7) всё ещё сходился и чтобы для всех $\mathbf{x}\in E$

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x})|}{\lambda_{m_k}\ln k}=+\infty.$$

Отсюда согласно теореме Стейна [9, теорема 1] вытекает существование функции $g\in L(\mathbb{T}^d)$, такой что

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\{1\}}\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(g,\mathbf{x})|}{\lambda_{m_k}\ln k}=+\infty\quad\text{п. в. на } \mathbb{T}^d. \tag{10}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d}|g(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x}=1.$$

Зафиксируем достаточно большое положительное число $M>0$. Положим

$$E_i=\left\{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d\colon \max_{k\colon a_{i-1}<m_k\leqslant a_i}\frac{|S_{\mathbf{n}_k}(g,\mathbf{x})|}{\lambda_{m_k}\ln k}>2M\right\},\quad i\in\mathbb{N};$$
$$\tilde{\alpha}=\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\|\mathbf{n}_k\|+1}{m_k}.$$

Пусть $i \in \mathbb{N}$. Определим функцию f_i следующим образом. Обозначим $N = N_i = [d(\tilde{\alpha} a_i)^{d+1}] + 1$; для $\mathbf{s} = (s^1, \dots, s^d) \in \mathbb{N}^d$, $\|\mathbf{s}\| \leqslant N$, положим

$$\Delta_{\mathbf{s}} = \left\{ \mathbf{x} = (x^1, \dots, x^d) \colon \frac{2\pi(s^j - 1)}{N} < x^j \leqslant \frac{2\pi s^j}{N},\ 1 \leqslant j \leqslant d \right\},$$

обозначим через $\mathbf{c}_{\mathbf{s}}$ центр d-мерного куба $\Delta_{\mathbf{s}}$. Для $\mathbf{x} \in \Delta_{\mathbf{s}}$ положим

$$\begin{cases} f_i(\mathbf{x}) = A_{\mathbf{s}}, & \text{если } \mathbf{x} = \mathbf{c}_{\mathbf{s}}, \\ f_i(\mathbf{x}) = 0, & \text{если } \mathbf{x} \text{ принадлежит } \partial\Delta_{\mathbf{s}} \text{ (границе куба } \Delta_{\mathbf{s}}), \\ f_i(\mathbf{x}) \text{ линейная} & \text{на отрезке } [\mathbf{c}_{\mathbf{s}}, \mathbf{x}] \text{ для каждой точки } \mathbf{x} \in \partial\Delta_{\mathbf{s}}, \end{cases}$$

при этом коэффициенты $A_{\mathbf{s}}$ определяются из соотношения

$$\int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} f_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{11}$$

Мы определили функцию f_i на каждом кубе $\Delta_{\mathbf{s}}$. Поскольку $\mathbb{T}^d = \bigcup\limits_{\mathbf{s}} \Delta_{\mathbf{s}}$, то f_i определена на всём торе $\mathbb{T}^d$.

Перечислим нужные нам свойства функций f_i. Из (11) и того, что на каждом $\Delta_{\mathbf{s}}$ функция f_i сохраняет знак, выводим, что

$$\int\limits_{\mathbb{T}^d} |f_i(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d \colon \|\mathbf{s}\| \leqslant N} \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} |f_i(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} = \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d \colon \|\mathbf{s}\| \leqslant N} \left| \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} f_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| =$$

$$= \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d \colon \|\mathbf{s}\| \leqslant N} \left| \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} g(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} |g(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant 1, \quad i \in \mathbb{N}. \tag{12}$$

Значение интеграла от функции f_i по множеству $\Delta_{\mathbf{s}}$ равно $2^d A_{\mathbf{s}} / \big((d+1)N^d\big)$. Отсюда с учётом (12) получаем

$$\frac{2^d |A_{\mathbf{s}}|}{(d+1)N^d} = \left| \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} f_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} \right| \leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} |f_i(\mathbf{x})|\, d\mathbf{x} \leqslant 1.$$

Следовательно,

$$\max_{\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d} |f_i(\mathbf{x})| \leqslant \max_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d \colon \|\mathbf{s}\| \leqslant N} |A_{\mathbf{s}}| \leqslant 2^{-d}(d+1)N^d \leqslant C_1 {a_i}^{d(d+1)}. \tag{13}$$

Пусть номер k такой, что

$$m_k \leqslant a_i. \tag{14}$$

Тогда

$$|S_{\mathbf{n}_k}(f_i, \mathbf{x}) - S_{\mathbf{n}_k}(g, \mathbf{x})| = |S_{\mathbf{n}_k}(f_i - g, \mathbf{x})| = \left| \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{t} - \mathbf{x}) \big(f_i(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t})\big)\, d\mathbf{t} \right| =$$

$$= \left| \sum_{\mathbf{s} \in \mathbb{N}^d \colon \|\mathbf{s}\| \leqslant N} \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\Delta_{\mathbf{s}}} \mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{t} - \mathbf{x}) \big(f_i(\mathbf{t}) - g(\mathbf{t})\big)\, d\mathbf{t} \right| =$$

$$= \Bigg| \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}^d:\ \|\mathbf{s}\|\leqslant N} \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\Delta_\mathbf{s}} \mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{c}_\mathbf{s}-\mathbf{x})\big(f_i(\mathbf{t})-g(\mathbf{t})\big)\,d\mathbf{t} +$$

$$+ \sum_{\mathbf{s}\in\mathbb{N}^d:\ \|\mathbf{s}\|\leqslant N} \frac{1}{\pi^d} \int\limits_{\Delta_\mathbf{s}} \big(\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{t}-\mathbf{x})-\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{c}_\mathbf{s}-\mathbf{x})\big)\big(f_i(\mathbf{t})-g(\mathbf{t})\big)\,d\mathbf{t}\Bigg|.$$

Каждый из интегралов в первой сумме правой части последнего равенства в силу (11) равен нулю. Оценим интегралы во второй сумме. Так как

$$|\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{u}_1)-\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{u}_2)| \leqslant (d-1)(\|\mathbf{n}_k\|+1)^{d+1}\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\| \leqslant N\|\mathbf{u}_1-\mathbf{u}_2\|$$

для любых $\mathbf{u}_1,\mathbf{u}_2\in\mathbb{T}^d$ и $\|\mathbf{t}-\mathbf{c}_\mathbf{s}\|\leqslant \pi/N$ для $\mathbf{t}\in\Delta_\mathbf{s}$, то

$$\Bigg|\frac{1}{\pi^d}\int\limits_{\Delta_\mathbf{s}} \big(\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{t}-\mathbf{x})-\mathbf{D}_{\mathbf{n}_k}(\mathbf{c}_\mathbf{s}-\mathbf{x})\big)\big(f_i(\mathbf{t})-g(\mathbf{t})\big)\,d\mathbf{t}\Bigg| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi^{d-1}}\int\limits_{\Delta_\mathbf{s}} |f_i(\mathbf{t})-g(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t} \leqslant \frac{2}{\pi^{d-1}}\int\limits_{\Delta_\mathbf{s}} |g(\mathbf{t})|\,d\mathbf{t}.$$

Таким образом, если m_k и i связаны соотношением (14), то

$$|S_{\mathbf{n}_k}(f_i,\mathbf{x})-S_{\mathbf{n}_k}(g,\mathbf{x})| < 1. \tag{15}$$

Как нетрудно убедиться, функция f_i, $i\in\mathbb{N}$, является липшицевой, точнее, удовлетворяет неравенству

$$|f_i(\mathbf{x}_1)-f_i(\mathbf{x}_2)| \leqslant K\|\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\|, \quad \mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\in\mathbb{T}^d,$$

с константой

$$K = K_i = \max_{\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d}|f_i(\mathbf{x})|N\pi^{-1}.$$

Поэтому для любых $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^d$ и $k\in\mathbb{N}$

$$|S_{\mathbf{n}_k}(f_i,\mathbf{x})-f_i(\mathbf{x})| \leqslant \frac{C_2K(\ln\|\mathbf{n}_k\|)^d}{\min\{n_k^j\colon 1\leqslant j\leqslant d\}}$$

(см. [7, теорема 1]). Оценим сверху правую часть последнего неравенства более удобным для нас выражением. Используя (13), имеем

$$K \leqslant \frac{(d+1)N^{d+1}}{2^d\pi} \leqslant C_3{a_i}^{(d+1)^2}.$$

Кроме того,

$$\frac{(\ln\|\mathbf{n}_k\|)^d}{\min\{n_k^j\colon 1\leqslant j\leqslant d\}} \leqslant \frac{C_4\sqrt{\|\mathbf{n}_k\|}}{\min\{n_k^j\colon 1\leqslant j\leqslant d\}} \leqslant \frac{C_4}{\sqrt{m_k}}\sup_{k\in\mathbb{N}}\frac{\sqrt{\|\mathbf{n}_k\|m_k}}{\min\{n_k^j\colon 1\leqslant j\leqslant d\}}.$$

Таким образом,

$$|S_{\mathbf{n}_k}(f_i,\mathbf{x})-f_i(\mathbf{x})| \leqslant \frac{C_5{a_i}^{(d+1)^2}}{\sqrt{m_k}}. \tag{16}$$

Положим
$$\beta = \left[\frac{(d+1)^2+4}{2}\right] + 1. \tag{17}$$
В силу (10)
$$\operatorname{mes}\Biggl(\bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{i=q}^{\infty} E_i\Biggr) = \operatorname{mes}(\mathbb{T}^d).$$
Следовательно, найдётся такой номер γ, $0 \leqslant \gamma < \beta$, что
$$\operatorname{mes}\Biggl(\bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{i=q}^{\infty} E_{\beta i+\gamma}\Biggr) \geqslant \frac{\operatorname{mes}(\mathbb{T}^d)}{\beta} > 0.$$
Для такого γ обозначим
$$\bar{E} = \varlimsup_{i\to\infty} E_{\beta i+\gamma} = \bigcap_{q=1}^{\infty}\bigcup_{i=q}^{\infty} E_{\beta i+\gamma}. \tag{18}$$

Положим
$$F(\mathbf{x}) = \sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \frac{f_l(\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}}, \quad \bar{F}(\mathbf{x}) = \sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \frac{|f_l(\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}}.$$
Используя выпуклость функции $\varphi_d(u) = u(\ln^+ u)^{d-1}$, (13), (12) и (9), имеем
$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi(|F(\mathbf{x})|)\,d\mathbf{x} &\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi\bigl(\bar{F}(\mathbf{x})\bigr)\,d\mathbf{x} = \int\limits_{\mathbb{T}^d} \varphi\Biggl(\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \frac{|f_l(\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}}\Biggr)\,d\mathbf{x} \leqslant \\
&\leqslant C_6 \sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{\varphi(|f_l(\mathbf{x})|)}{\lambda_{a_l}}\,d\mathbf{x} \leqslant \\
&\leqslant C_6 \sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \int\limits_{\mathbb{T}^d} \frac{|f_l(\mathbf{x})|(\ln(C_1 {a_l}^{d(d+1)} + e))^{d-1}}{\lambda_{a_l}}\,d\mathbf{x} \leqslant \\
&\leqslant C_7 \int\limits_{\mathbb{T}^d} |g(\mathbf{x})|\,d\mathbf{x} \sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}} \frac{(\ln a_l)^{d-1}}{\lambda_{a_l}} < +\infty,
\end{aligned}$$
т. е.
$$F, \bar{F} \in \varphi_d(L)(\mathbb{T}^d) = L(\ln^+ L)^{d-1}(\mathbb{T}^d).$$

Покажем, что частичные суммы ряда Фурье функции F не удовлетворяют оценке (6) на множестве, с точностью до множества меры нуль совпадающем с определённым равенством (18) множеством $\bar{E}$; тем самым придём к противоречию с результатом работы [2] и теорема будет доказана.

Пусть $\mathbf{x} \in \bar{E}$. Тогда $\mathbf{x}$ принадлежит бесконечному числу множеств E_l, где номер l имеет вид $l = \beta i + \gamma$, $i \in \mathbb{N}$. Зафиксируем какой-нибудь такой номер l. Обозначим его $\bar{l}$. Пусть номер $\bar{k} \geqslant 2$ такой, что
$$\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar{k}}}(g,\mathbf{x})|}{\lambda_{m_{\bar{k}}} \ln \bar{k}} = \max_{k\colon\, a_{\bar{l}-1} < m_k \leqslant a_{\bar{l}}} \frac{|S_{\mathbf{n}_k}(g,\mathbf{x})|}{\lambda_{m_k} \ln k}.$$

Согласно определению функции F

$$S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(F,\mathbf{x})=\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N}\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}},$$

откуда следует, что

$$\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(F,\mathbf{x})|}{\ln\bar k}\geqslant\Biggl|\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l\geqslant\bar l\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\Biggr|-\Biggl|\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\Biggr|. \quad (19)$$

Оценим каждую из сумм в правой части неравенства (19). Если $l\geqslant\bar l$, то $m_{\bar k}\leqslant l$. Тогда из условия $\mathbf{x}\in E_{\bar l}$ и неравенства (15) получаем

$$|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})|\geqslant|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(g,\mathbf{x})|-|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})-S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(g,\mathbf{x})|\geqslant 2M\lambda_{m_{\bar k}}\ln\bar k-1.$$

Кроме того, можно утверждать, что

$$\operatorname{sign}S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})=\operatorname{sign}S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(g,\mathbf{x}).$$

Таким образом,

$$\Biggl|\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l\geqslant\bar l\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\Biggr|=\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l\geqslant\bar l\}}\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\geqslant\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_{\bar l},\mathbf{x})|}{\lambda_{a_{\bar l}}\ln\bar k}\geqslant$$

$$\geqslant\frac{2M\lambda_{m_{\bar k}}\ln\bar k-1}{\lambda_{a_{\bar l}}\ln\bar k}\geqslant\frac{2M\lambda_{a_{\bar l-1}}}{\lambda_{a_{\bar l}}}-\frac{1}{\lambda_{a_{\bar l}}\ln\bar k}\geqslant M-\frac{1}{\lambda_{a_1}\ln\bar k}. \quad (20)$$

Оценим вторую сумму из правой части (19). Используя (16), имеем

$$\Biggl|\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\Biggr|\leqslant\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})-f_l(\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}+\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{|f_l(\mathbf{x})|}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_8}{\ln\bar k}\max_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}|S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})-f_l(\mathbf{x})|+\frac{\bar F(\mathbf{x})}{\ln\bar k}\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_9}{\ln\bar k}\max_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{\sqrt{m_{\bar k}}}+\frac{\bar F(\mathbf{x})}{\ln\bar k}. \quad (21)$$

Если $l\in\{l=\beta i+\gamma\colon i\in\mathbb{N};\ l<\bar l\}$, то $l\leqslant\bar l-\beta$. Тогда $m_{\bar k}\geqslant\lambda_{a_{\bar l-1}}\geqslant\lambda_{a_{l+\beta-1}}$. Учитывая, что последовательность $\{a_l\}$ обладает свойством $a_{i+1}={a_i}^2$, $i\in\mathbb{N}$, а также (17), имеем

$$\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{\sqrt{m_{\bar k}}}\leqslant\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{\sqrt{a_{\bar l-1}}}=\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{a_{\bar l-2}}\leqslant\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{a_{l+\beta-2}}=\frac{{a_l}^{(d+1)^2}}{{a_l}^{2(\beta-2)}}\leqslant 1.$$

Отсюда и из (21) получаем

$$\Biggl|\sum_{\{l=\beta i+\gamma\colon\, i\in\mathbb{N};\; l<\bar l\}}\frac{S_{\mathbf{n}_{\bar k}}(f_l,\mathbf{x})}{\lambda_{a_l}\ln\bar k}\Biggr|\leqslant\frac{C_9}{\ln\bar k}+\frac{\bar F(\mathbf{x})}{\ln\bar k}. \quad (22)$$

Объединяя (19), (20) и (22), заключаем, что

$$\frac{|S_{\mathbf{n}_{\bar{k}}}(F,\mathbf{x})|}{\ln \bar{k}} \geqslant M - \frac{1}{\lambda_{a_1}\ln \bar{k}} - \frac{C_9}{\ln \bar{k}} - \frac{\bar{F}(\mathbf{x})}{\ln \bar{k}}. \tag{23}$$

Так как $\bar{k}$ может быть сколь угодно большим, а значение $\bar{F}(\mathbf{x})$ конечно для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, то верхняя грань по $\bar{k}$ правой части (23) равна M почти всюду на $\bar{E}$. Значит, последовательность $\{S_{\mathbf{n}_k}(F,\mathbf{x})/\ln k\}_{k=2}^{\infty}$ не стремится к нулю на множестве, с точностью до множества нулевой меры совпадающем с $\bar{E}$. Теорема доказана.

3. Доказательство теоремы 2

Пусть $f \in L(\mathbb{T}^2)$. Рассмотрим сначала случай, когда векторы $\mathbf{n}_k = (n_k^1, n_k^2)$ такие, что

$$n_k^1 \geqslant n_k^2, \quad k \in \mathbb{N}.$$

В этом случае получаемая оценка (8) будет иметь вид

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = o(\psi(n_k^2)\ln k) \quad \text{п. в.} \tag{24}$$

Для произвольных $n^1, n^2 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{x} = (x^1, x^2) \in \mathbb{T}^2$ имеем

$$S_{(n^1,n^2)}(f,\mathbf{x}) = \frac{1}{\pi^2}\int\limits_{\mathbb{T}}\int\limits_{\mathbb{T}} D_{n^1}(u^1 - x^1) D_{n^2}(u^2 - x^2) f(u^1,u^2)\,du^1\,du^2 =$$
$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\sin(n^1+1/2)(u^1-x^1)}{2\sin((u^1-x^1)/2)} \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_{n^2}(u^2-x^2) f(u^1,u^2)\,du^2\right) du^1.$$

Отсюда, используя тригонометрическое тождество

$$\frac{\sin(n+1/2)(u-x)}{2\sin((u-x)/2)} =$$
$$= \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{u-x}{2}(\sin nu\,\cos nx - \cos nu\,\sin nx) + \frac{1}{2}\cos n(u-x),$$

получаем

$$S_{(n^1,n^2)}(f,\mathbf{x}) =$$
$$= \cos n^1x^1 \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\sin n^1u^1 \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_{n^2}(u^2-x^2) f(u^1,u^2)\,du^2\right) du^1 -$$
$$- \sin n^1 x \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\cos n^1u^1 \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_{n^2}(u^2-x^2) f(u^1,u^2)\,du^2\right) du^1 +$$
$$+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos n^1(u^1-x^1) \left(\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} D_{n^2}(u^2-x^2) f(u^1,u^2)\,du^2\right) du^1 =$$

$$
\begin{aligned}
&= \cos n^1x^1 \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\sin n^1u^1\, S_{n^2}(f(u^1,\cdot),x^2)\,du^1 - \\
&- \sin n^1x^1 \cdot \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\cos n^1u^1\, S_{n^2}(f(u^1,\cdot),x^2)\,du^1 + \\
&+ \frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}} \cos n^1(u^1-x^1)\, S_{n^2}(f(u^1,\cdot),x^2)\,du^1,
\end{aligned} \tag{25}
$$

где внешние интегралы понимаются в смысле главного значения, т. е. как предел при $\varepsilon \to +0$ интеграла по множеству $\mathbb{T}\setminus(x^1-\varepsilon, x^1+\varepsilon)$, а $S_{n^2}(f(u^1,\cdot),x^2)$ — это значение в точке x^2 n^2-й частичной суммы (однократного) ряда Фурье функции $f(u^1,\cdot)$ как функции одного переменного при фиксированном u^1.

Из (25) выводим, что для произвольной точки $\mathbf{x}=(x^1,x^2)\in\mathbb{T}^2$

$$
\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{(n_k^1,n_k^2)}(f,\mathbf{x})|}{\psi(n_k^2)\ln(k+1)} &\leqslant \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\frac{\sin n_k^1u^1\, S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)}{\psi(n_k^2)}\,du^1\right|}{\ln(k+1)} + \\
&+ \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left|\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg}\frac{u^1-x^1}{2}\,\frac{\cos n_k^1u^1\, S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)}{\psi(n_k^2)}\,du^1\right|}{\ln(k+1)} + \\
&+ \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{|S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)|}{\psi(n_k^2)}\,du^1}{\ln(k+1)}.
\end{aligned} \tag{26}
$$

Покажем, что каждое из слагаемых в правой части (26) конечно для почти всех $\mathbf{x}\in\mathbb{T}^2$.

Рассмотрим первое слагаемое. Обозначим

$$
F_k(u^1,x^2) = \frac{\sin n_k^1u^1\, S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)}{\psi(n_k^2)}, \quad F(u^1,x^2) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)|}{\psi(n_k^2)}.
$$

Лемма A [1, теорема 2]. *Пусть неубывающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ такая, что последовательность $\{k/\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ не убывает и*

$$
\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k\lambda_k} < \infty.
$$

Тогда для любой $g\in L(\mathbb{T})$

$$
\int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k(g,x)|}{\lambda_k}\,dx \leqslant C\int\limits_{\mathbb{T}} |g(x)|\,dx,
$$

где $C = C_0\sum\limits_{k=1}^\infty (k\lambda_k)^{-1}$, C_0 — абсолютная константа.

Зафиксируем $u^1 \in \mathbb{T}$. Применяя лемму А при $\lambda_k = \psi(k)$, $g = f(u^1, \cdot)$, имеем

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F(u^1, x^2)\, dx^2 = \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot), x^2)|}{\psi(n_k^2)}\, dx^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_k(f(u^1,\cdot), x^2)|}{\psi(k)}\, dx^2 \leqslant C \int\limits_{\mathbb{T}} |f(u^1, x^2)|\, dx^2. \quad (27)$$

Интегрируя (27) по $u^1 \in \mathbb{T}$, получаем

$$\iint\limits_{\mathbb{T}^2} F(u^1, x^2)\, dx^2\, du^1 \leqslant \iint\limits_{\mathbb{T}^2} |f(u^1, x^2)|\, dx^2\, du^1. \quad (28)$$

Так как $f \in L(\mathbb{T}^2)$, то правый, а следовательно, и левый интегралы в последнем неравенстве конечны. Отсюда согласно теореме Фубини получаем, что для почти всех $x^2 \in \mathbb{T}$

$$\int\limits_{\mathbb{T}} F(u^1, x^2)\, du^1 < +\infty. \quad (29)$$

Лемма B [6, доказательство теоремы 1]. *Пусть $h \in L(\mathbb{T})$, $\{h_k\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность определённых на периоде $\mathbb{T}$ измеримых функций, таких что $|h_k(x)| \leqslant |h(x)|$,*

$$\tilde{h}_k(x) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u-x}{2} h_k(u)\, du, \quad k \in \mathbb{N}, \text{ —}$$

функции, тригонометрически сопряжённые к функциям h_k. Тогда функция

$$H(x) = H(\{h_k\}, x) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\tilde{h}_k(x)|}{\ln(k+1)}$$

конечна для почти всех $x \in \mathbb{T}$.

Зафиксируем точку $x^2 \in \mathbb{T}$, удовлетворяющую условию (29). Применим лемму B к функциям $h_k = F_k(\cdot, x^2)$, $k \in \mathbb{N}$, и $h = F(\cdot, x^2)$. Получим

$$H(\{F_k(\cdot, x^2)\}, x^1) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|\widetilde{F}_k(x^1, x^2)|}{\ln(k+1)} =$$
$$= \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\left| \dfrac{1}{2\pi} \displaystyle\int\limits_{\mathbb{T}} \operatorname{ctg} \frac{u^1 - x^1}{2}\, \frac{\sin n_k^1 u^1 \cdot S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot), x^2)\, du^1}{\psi(n_k^2)} \right|}{\ln(k+1)} < \infty \quad \text{п. в.}$$

Отсюда, учитывая, что (29) выполняется для почти всех $x^2 \in \mathbb{T}$, заключаем, что первое слагаемое в правой части (26) конечно для почти всех $(x^1, x^2) \in \mathbb{T}^2$. Конечность почти всюду второго слагаемого в правой части (26) доказывается аналогично.

Рассмотрим третье слагаемое из правой части (26). Заметим, что оно не зависит от x^1. Из неравенства

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{\mathbb{T}} \frac{|S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)|\,du^1}{\psi(n_k^2)}}{\ln(k+1)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|S_{n_k^2}(f(u^1,\cdot),x^2)|}{\psi(n_k^2)}\,du^1 = \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{T}} F(u^1,x^2)\,du^1$$

и оценки (29) получаем, что третье слагаемое в правой части (26) конечно при почти всех $x^2 \in \mathbb{T}$.

Таким образом, все три слагаемые в правой части (26) конечны почти всюду на $\mathbb{T}^2$. Следовательно, левая часть (26) также конечна при почти всех $(x^1,x^2) \in \in \mathbb{T}^2$, т. е.

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = O(\psi(n_k^2)\ln k) \quad \text{п. в.}$$

Для того чтобы завершить доказательство (24), нам осталось показать, что O большое в последней оценке можно заменить на o малое. Для этого можно вместо функции ψ рассмотреть функцию $\tilde{\psi}$, удовлетворяющую условиям теоремы и такую, что $\tilde{\psi}(u) = o\big(\psi(u)\big)$ при $u \to \infty$. Применяя к функции $\tilde{\psi}$ уже доказанную часть теоремы, получаем для почти всех $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2$, что

$$S_{\mathbf{n}_k}(f,\mathbf{x}) = O(\tilde{\psi}(n_k^2)\ln k) = O(\psi(n_k^2)\ln k)\frac{\tilde{\psi}(n_k^2)}{\psi(n_k^2)} = o(\psi(n_k^2)\ln k)$$

при $u \to \infty$, и (24) доказано.

Рассмотрим теперь общий случай. Пусть $\{\mathbf{n}_k\}$ — произвольная последовательность, удовлетворяющая условиям теоремы. Тогда последовательность натуральных чисел $\mathbb{N}$ можно разбить на две подпоследовательности $\{k_i\}_{i=1}^{\infty}$ и $\{l_j\}_{j=1}^{\infty}$, такие что

$$\{k_i\}_{i=1}^{\infty} \cup \{l_j\}_{j=1}^{\infty} = \mathbb{N}$$

и

$$n_{k_i}^1 \geqslant n_{k_i}^2, \quad i \in \mathbb{N}; \quad n_{l_j}^1 < n_{l_j}^2, \quad j \in \mathbb{N}.$$

Тогда, используя (24), получаем

$$0 \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_i}}(f,\mathbf{x})|}{\psi(n_{k_i}^1)\ln k_i} \leqslant \varlimsup_{i\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_{k_i}}(f,\mathbf{x})|}{\psi(n_{k_i}^1)\ln i} = 0 \quad \text{п. в.,} \tag{30}$$

$$0 \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_{l_j}}(f,\mathbf{x})|}{\psi(n_{l_j}^2)\ln l_j} \leqslant \varlimsup_{j\to\infty} \frac{|S_{\mathbf{n}_{l_j}}(f,\mathbf{x})|}{\psi(n_{l_j}^2)\ln j} = 0 \quad \text{п. в.} \tag{31}$$

Из (30) и (31) вытекает (8). Теорема 2 доказана.

Литература

[1] Антонов Н. Ю. Интегрируемость мажорант сумм Фурье и расходимость рядов Фурье функций с ограничениями на интегральный модуль непрерывности // Мат. заметки. — 2004. — Т. 76, № 5. — С. 651—665.

[2] Антонов Н. Ю. О скорости роста последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2005. — Т. 11, № 2. — С. 10—29.

[3] Антонов Н. Ю. О скорости роста последовательностей двойных прямоугольных сумм Фурье функций из классов $\varphi(L)$ // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2012. — Т. 18, № 4. — С. 26—34.

[4] Антонов Н. Ю. Оценки роста произвольных последовательностей кратных прямоугольных сумм Фурье // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2013. — Т. 19, № 2. — С. 26—33.

[5] Карагулян Г. А. Преобразование Гильберта и экспоненциальные интегральные оценки прямоугольных частичных сумм двойных рядов Фурье // Мат. сб. — 1996. — Т. 187, № 3. — С. 55—74.

[6] Осколков К. И. Подпоследовательности сумм Фурье интегрируемых функций // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1985. — Т. 167. — С. 239—260.

[7] Степанец А. И. Оценки отклонений частных сумм Фурье на классах непрерывных периодических функций многих переменных // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — Т. 44, № 5. — С. 1150—1190.

[8] Hardy G. H. On the summability of Fourier series // Proc. London Math. Soc. — 1913. — Vol. 12. — P. 365—372.

[9] Stein E. M. On limits of sequences of operators // Ann. Math. — 1961. — Vol. 74, no. 1. — P. 140—170.

[10] Tandori K. Über einen Zusammenhang zwischen der Grössenordnung der Partialsummen der Fourierreihe und der Integrabilitätseigenschaft der Funktionen // Acta Sci. Math. — 1983. — Vol. 45. — P. 409—413.