Максимизации функции с непрерывным по Липшицу градиентом

М. В. БАЛАШОВ
Московский физико-технический институт
e-mail: balashov73@mail.ru

УДК 519.8

Ключевые слова: гильбертово пространство, сильно выпуклое множество с радиусом r, проксимально гладкое множество с константой R, непрерывный по Липшицу градиент, метод проекции градиента.

Аннотация

В работе рассматриваются (вообще говоря, невыпуклые) функции, имеющие непрерывный по Липшицу градиент. Доказывается, что лебеговы множества таких функций являются проксимально гладкими множествами, и получена оценка константы проксимальной гладкости. Показано, что задача максимизации такой функции на сильно выпуклом множестве имеет единственное решение, если радиус сильной выпуклости этого множества достаточно мал. Предложен проекционный алгоритм (типа метода проекции градиента в задаче минимизации выпуклой функции на выпуклом множестве) решения задачи на максимум такой функции. Алгоритм сходится со скоростью геометрической прогрессии.

Abstract

M. V. Balashov, Maximization of a function with Lipschitz continuous gradient, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 17—25.

In the present paper, we consider (nonconvex in the general case) functions that have Lipschitz continuous gradient. We prove that the level sets of such functions are proximally smooth and obtain an estimate for the constant of proximal smoothness. We prove that the problem of maximization of such function on a strongly convex set has a unique solution if the radius of strong convexity of the set is sufficiently small. The projection algorithm (similar to the gradient projection algorithm for minimization of a convex function on a convex set) for solving the problem of maximization of such a function is proposed. The algorithm converges with the rate of geometric progression.

1. Введение и основные обозначения

Задача максимизации выпуклой функции существенно отличается от задачи минимизации. В отличие от задач на минимум, задача на максимум выпуклой функции может иметь несколько локальных решений. При этом локальные условия перехода к точкам глобального максимума в общем случае отсутствуют.

В настоящей работе делается попытка выявить класс задач, в которых максимум функции на выпуклом замкнутом множестве единственный и может быть

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 17—25.

найден эффективным алгоритмом. При этом для наших целей мы вообще откажемся от выпуклости функции. Вместо свойства выпуклости мы потребуем определённую гладкость градиента функции.

Мы будем рассматривать задачи в вещественном гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\max_{x\in A} f(x), \tag{1.1}$$

где $f\colon \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ — непрерывная функция, $A\subset\mathcal{H}$ — выпуклое замкнутое ограниченное подмножество.

Известно [3, § 2.3], что для выпуклой функции в $\mathbb{R}^n$ решение задачи (1.1) достигается в крайней точке множества A. Существуют некоторые критерии максимума [8], но каких-либо алгоритмов достаточно общего характера для решения такой задачи автору не известно.

Введём необходимые определения и обозначения. Для векторов $p,x\in\mathcal{H}$ обозначим через (p,x) *скалярное произведение*. Пусть

$$B_r(a)=\{x\in\mathcal{H}\mid \|x-a\|\leqslant r\}.$$

Для множества $A\subset\mathcal{H}$ через ∂A, $\operatorname{int}A$, $\operatorname{cl}A$ будем обозначать соответственно *границу*, *внутренность* и *замыкание* множества A. *Функцию расстояния* от точки $x\in\mathcal{H}$ до множества A определим по формуле

$$\varrho_A(x)=\inf_{a\in A}\|x-a\|.$$

Метрической проекцией точки $x\in E$ на множество A называется множество

$$P_Ax=\{a\in A\mid \|x-a\|=\varrho_A(x)\}.$$

Для множеств $A,B\subset\mathcal{H}$ *расстоянием в метрике Хаусдорфа* называется число

$$h(A,B)=\inf\{r>0\mid A\subset B+B_r(0),\ B\subset A+B_r(0)\}=\\ =\max\Big\{\sup_{a\in A}\varrho_B(a),\ \sup_{b\in B}\varrho_A(b)\Big\}.$$

Нормальным конусом к выпуклому замкнутому подмножеству $A\subset\mathcal{H}$ в точке $a\in A$ называется множество

$$N(A,a)=\{p\in\mathcal{H}\mid (p,a)\geqslant(p,x)\ \text{для всех}\ x\in A\}.$$

Множество $A\subset\mathcal{H}$ называется *сильно выпуклым с радиусом* R [3, определение 4.3.1], если найдётся множество $X\subset\mathcal{H}$, такое что $A=\bigcap_{x\in X}B_R(x)$.

Предложение 1.1 [3, теоремы 4.1.3, 4.2.7]. *Пусть $A\subset\mathcal{H}$ — сильно выпуклое множество с радиусом $r>0$. Это эквивалентно тому, что для любых $a\in\partial A$, $p\in N(A,a)$, $\|p\|=1$, выполнено включение*

$$A\subset B_r(a-rp).$$

Для множества $A \subset \mathcal{H}$ и числа $R > 0$ определим

$$U_A(R) = \{x \in \mathcal{H} \mid \varrho_A(x) < R\}.$$

Будем говорить, что подмножество $A \subset E$ удовлетворяет *опорному условию с константой* $R > 0$, если для любой точки $x \in U_A(R) \setminus A$, такой что $P_A x \neq \varnothing$ и $a \in P_A x$, выполняется равенство

$$A \cap \operatorname{int} B_R\left(a + R\frac{x-a}{\|x-a\|}\right) = \varnothing. \tag{1.2}$$

Множество $A \subset \mathcal{H}$ будем называть *проксимально гладким с константой* R [7, 9], если функция расстояния $\varrho_A(x)$ непрерывно дифференцируема на множестве $U_A(R) \setminus A$.

Предложение 1.2 [1, теорема 2.4; 5, теорема 6.2; 6, утверждение 2.6; 7, теорема 4.1]. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — замкнутое подмножество и $R > 0$. Следующие условия эквивалентны.*

1. *Множество A удовлетворяет опорному условию с константой R.*
2. *Множество A проксимально гладкое с константой R.*
3. *Метрическая проекция $P_A x$ одноточечная и непрерывная для всех точек $x \in U_A(R) \setminus A$.*

Предложение 1.3 [4, теорема 2.2]. *Пусть $A \subset \mathcal{H}$ — сильно выпуклое множество с константой $r > 0$. Тогда для любых двух точек $x_0, x_1 \in \mathcal{H}$, таких что $\varrho_A(x_i) \geqslant \varrho_i > 0$, $i = 0, 1$, выполнено неравенство*

$$\|a_0 - a_1\| \leqslant \frac{r}{\sqrt{(r+\varrho_1)(r+\varrho_0)}}\|x_0 - x_1\|, \quad a_i = P_A x_i, \quad i = 0, 1.$$

Будем говорить, что функция $f\colon \mathcal{H} \supset U \to \mathbb{R}$ имеет *непрерывный по Липшицу* (или просто *липшицев*) *градиент с константой* $C > 0$ *на множестве* U, если для любых точек $x_0, x_1 \in U$

$$\|f'(x_0) - f'(x_1)\| \leqslant C \cdot \|x_0 - x_1\|.$$

Для функции $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ и числа α определим нижнее лебегово множество

$$\mathcal{L}_f(\alpha) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \leqslant \alpha\}$$

и верхнее лебегово множество

$$\mathcal{U}_f(\alpha) = \{x \in \mathcal{H} \mid f(x) \geqslant \alpha\}.$$

Для непрерывной функции f выполнено

$$\mathcal{L}_f(\alpha) = \operatorname{cl}\big(\mathcal{H} \setminus \mathcal{U}_f(\alpha)\big), \quad \mathcal{U}_f(\alpha) = \operatorname{cl}\big(\mathcal{H} \setminus \mathcal{L}_f(\alpha)\big).$$

2. Проксимальная гладкость множеств уровня функции с непрерывным по Липшицу градиентом

Лемма 2.1. *Пусть функция $f\colon \mathcal{H}\to\mathbb{R}$ имеет липшицев градиент на выпуклом множестве $U\subset\mathcal{H}$ с константой $C>0$. Тогда для любой точки $x\in U$ выполнено неравенство*

$$f(x_0)+(f'(x_0),x-x_0)-\frac{C}{2}\|x-x_0\|^2\leqslant \\ \leqslant f(x)\leqslant f(x_0)+(f'(x_0),x-x_0)+\frac{C}{2}\|x-x_0\|^2. \quad (2.1)$$

Доказательство. Имеем

$$|f(x)-f(x_0)-(f'(x_0),x-x_0)|=\left|\int_0^1 (f'(tx+(1-t)x_0)-f'(x_0),x-x_0)\,dt\right|\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 \|f'(tx+(1-t)x_0)-f'(x_0)\|\cdot\|x-x_0\|\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\int_0^1 Ct\|x-x_0\|^2\,dt=\frac{C}{2}\|x-x_0\|^2. \qquad \square$$

Теорема 2.2. *Пусть функция $f\colon\mathcal{H}\to\mathbb{R}$ имеет липшицев градиент с константой $C>0$ на непустом множестве уровня $\mathcal{L}_f(\alpha)$. Пусть*

$$M=\inf_{x\in\partial\mathcal{L}_f(\alpha)}\|f'(x)\|.$$

Тогда множество $\mathcal{U}_f(\alpha)$ проксимально гладкое с константой $R=M/C$.

Доказательство. Положим $R=M/C$. Зафиксируем точку $x_0\in\partial\mathcal{L}_f(\alpha)= =\partial\mathcal{U}_f(\alpha)$.

Рассмотрим множество

$$B=B_R\left(x_0-R\frac{f'(x_0)}{\|f'(x_0)\|}\right)\subset B_{\frac{\|f'(x_0)\|}{C}}\left(x_0-\frac{1}{C}f'(x_0)\right).$$

Из предыдущего включения получаем, что для любой точки $x\in\operatorname{int}B$ выполнено неравенство

$$(f'(x_0),x-x_0)+\frac{C}{2}\|x-x_0\|^2<0. \quad (2.2)$$

Допустим, что существует $u\in(\operatorname{int}B)\cap\mathcal{U}_f(\alpha)$. Заметим, что $u\neq x_0$.

Из дифференцируемости по Фреше функции f в точке x_0 получаем, что

$$f\big(x_0+t(u-x_0)\big)=f(x_0)+t(f'(x_0),u-x_0)+o(t),\quad t\to+0,$$

причём $(f'(x_0), u - x_0) < 0$. Поэтому найдётся такое $t_u > 0$, что для всех $t \in (0, t_u)$ выполнено включение

$$x_0 + t(u - x_0) \in \operatorname{int} \mathcal{L}_f(\alpha). \tag{2.3}$$

Определим на отрезке $[u, x_0]$ точку x из условия

$$\|x - x_0\| = \inf_{y \in [u, x_0) \cap \mathcal{U}_f(\alpha)} \|y - x_0\|.$$

Из условия (2.3) получаем, что $x \neq x_0$. Кроме того, очевидно, что $x \in \partial\mathcal{U}_f(\alpha) = \partial\mathcal{L}_f(\alpha)$ и $[x, x_0] \subset \mathcal{L}_f(\alpha)$. Из условия теоремы и леммы 2.1 получаем, что

$$\alpha = f(x) \leqslant f(x_0) + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{C}{2}\|x - x_0\|^2 = \alpha + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{C}{2}\|x - x_0\|^2,$$

а с учётом (2.2) имеем

$$\alpha \leqslant \alpha + (f'(x_0), x - x_0) + \frac{C}{2}\|x - x_0\|^2 < \alpha.$$

Полученное противоречие показывает, что $(\operatorname{int} B) \cap \mathcal{U}_f(\alpha) = \varnothing$.

Таким образом, в любой точке $x_0 \in \partial\mathcal{U}_f(\alpha)$ существует опорный шар вида

$$B_R\left(x_0 - R\frac{f'(x_0)}{\|f'(x_0)\|}\right).$$

Выберем такую точку $x \in U_{\mathcal{U}_f(\alpha)}(R) \setminus \mathcal{U}_f(\alpha)$, что $P_{\mathcal{U}_f(\alpha)}x = \{x_0\} \in \partial\mathcal{U}_f(\alpha)$. Поскольку функция f непрерывно дифференцируема, то

$$\frac{x_0 - x}{\|x_0 - x\|} = \frac{f'(x_0)}{\|f'(x_0)\|}.$$

Итак, для любой точки $x \in U_{\mathcal{U}_f(\alpha)}(R) \setminus \mathcal{U}_f(\alpha)$ с одноточечной проекцией мы имеем

$$\mathcal{U}_f(\alpha) \cap \operatorname{int} B_R\left(x_0 + R\frac{x - x_0}{\|x - x_0\|}\right) = \varnothing.$$

В силу предложения 1.2 множество $\mathcal{U}_f(\alpha)$ проксимально гладкое с константой R. $\square$

Отметим, что аналогично можно доказать проксимальную гладкость нижних лебеговых множеств.

Получим условия существования и единственности решения задачи (1.1).

Теорема 2.3. *Пусть множество $A \subset \mathcal{H}$ сильно выпукло с радиусом r. Пусть функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ имеет липшицев градиент на множестве A с константой $C > 0$. Пусть*

$$m = \inf_{x \in \partial A} \|f'(x)\|$$

и $r < m/C$. Тогда задача (1.1) имеет единственное решение, которое достигается в граничной точке множества A.

Доказательство. Пусть $x_0 \in \partial A$,

$$x_{k+1} = \arg\max_{x\in A}(f'(x_k), x), \quad k = 0, 1, 2, 3, \dots . \tag{2.4}$$

Из леммы 2.1 получаем, что для всех k

$$f(x_{k+1}) \geqslant f(x_k) + (f'(x_k), x_{k+1} - x_k) - \frac{C}{2}\|x_{k+1} - x_k\|^2. \tag{2.5}$$

В силу предложения 1.1

$$x_k \in A \subset B_r\left(x_{k+1} - r\frac{f'(x_k)}{\|f'(x_k)\|}\right),$$

откуда следует, что

$$\|x_{k+1} - x_k\|^2 \leqslant 2r\left(\frac{f'(x_k)}{\|f'(x_k)\|}, x_{k+1} - x_k\right).$$

Последняя формула вместе с (2.5) даёт

$$\begin{aligned} f(x_{k+1}) &\geqslant f(x_k) + (f'(x_k), x_{k+1} - x_k) - \frac{C}{2}2r\left(\frac{f'(x_k)}{\|f'(x_k)\|}, x_{k+1} - x_k\right) \geqslant \\ &\geqslant f(x_k) + (f'(x_k), x_{k+1} - x_k) - \frac{C}{2}2r\left(\frac{f'(x_k)}{m}, x_{k+1} - x_k\right) = \\ &= f(x_k) + (f'(x_k), x_{k+1} - x_k)\left[1 - \frac{Cr}{m}\right] \geqslant f(x_k). \end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{f(x_k)\}$ монотонно возрастает при произвольном выборе начальной точки $x_0 \in \partial A$.

Для любых векторов $x_1, x_2 \in \mathcal{H}$, $\|x_1\| \geqslant 1$, $\|x_2\| \geqslant 1$, выполнено условие

$$\|a_1 - a_2\| \leqslant r\|x_1 - x_2\|, \quad a_i = \arg\max_{x\in A}(x_i, x), \quad i = 1, 2. \tag{2.6}$$

Формула (2.6) вытекает из [3, теорема 4.3.2] (где она доказана для единичных векторов x_1, x_2) и того факта, что для любых чисел $\lambda \geqslant 1$, $\mu \geqslant 1$ и единичных векторов x_1, x_2 выполнено неравенство $\|x_1 - x_2\| \leqslant \|\lambda x_1 - \mu x_2\|$.

Из включений $f'(x_k) \in N(A, x_{k+1})$ и формулы (2.6) получаем, что

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant r\left\|\frac{f'(x_k)}{m} - \frac{f'(x_{k-1})}{m}\right\|,$$

откуда следует, что

$$\|x_{k+1} - x_k\| \leqslant \frac{r}{m}\|f'(x_k) - f'(x_{k-1})\| \leqslant \frac{rC}{m}\|x_k - x_{k-1}\|.$$

Итак, последовательность $\{x_k\}$ сходится к $z_0 \in \partial A$, при этом

$$z_0 = P_A\big(z_0 + tf'(z_0)\big)$$

для всякого $t > 0$.

Очевидно, что если некоторая точка $w_0 \in A$ удовлетворяет условию $w_0 = P_A\big(w_0 + tf'(w_0)\big)$, то $w_0 = z_0$. Действительно, имеем

$$\|x_{k+1} - w_0\| \leqslant r \left\| \frac{f'(x_k)}{m} - \frac{f'(w_0)}{m} \right\| \leqslant \frac{Cr}{m} \|x_k - w_0\|,$$

откуда следует, что $x_k \to w_0$ и $w_0 = z_0$.

Покажем, что точка z_0 — решение задачи (1.1). Допустим, что найдётся точка $x_0 \in \partial A$ со свойством $f(x_0) \geqslant f(z_0)$. Тогда итерационный процесс (2.4) генерирует последовательность $\{x_k\}$, для которой $f(x_0) \leqslant f(x_1) \leqslant \ldots \leqslant f(z_0)$ и из неравенства $x_0 \neq z_0$ следует, что существует число k, такое что $x_{k+1} \neq x_k$. Таким образом, $(f'(x_k), x_{k+1} - x_k) > 0$ и $f(x_0) < f(z_0)$. Противоречие.

Допустим, что найдётся точка $x_0 \in \operatorname{int} A$, в которой $f(x_0) \geqslant f(z_0)$. В силу леммы 2.1

$$f(x_0) \leqslant f(z_0) + (f'(z_0), x_0 - z_0) + \frac{C}{2} \|z_0 - x_0\|^2.$$

Как и выше, получаем, что

$$\|z_0 - x_0\|^2 \leqslant 2r \left(\frac{f'(z_0)}{\|f'(z_0)\|}, z_0 - x_0 \right),$$

откуда следует, что

$$f(x_0) \leqslant f(z_0) + (f'(z_0), x_0 - z_0) + \frac{Cr}{m}(f'(z_0), z_0 - x_0) =$$
$$= f(z_0) + (f'(z_0), z_0 - x_0) \left[-1 + \frac{Cr}{m} \right] < f(z_0).$$

Противоречие. □

Рассмотрим пример, который показывает, что условия теоремы 2.3 существенны. Рассмотрим множество $A = [a, b]$, $a < 0 < b$, $|a| < |b| < 1$, и функцию $f(x) = 1 - |x|^2/2$. Множество A сильно выпукло с (наименьшим) радиусом $r = (b - a)/2$. Функция f имеет липшицев градиент с константой $C = 1$, $m = \inf\limits_{x \in \partial A} \|f'(x)\| = |a|$. Условие $r < m/C$ не выполняется, $\max\limits_{x \in A} f(x) = f(0)$, $0 \in \operatorname{int} A$.

3. Метод проекции градиента для решения задачи максимизации

Рассмотрим задачу (1.1). Обозначим

$$m = \inf_{x \in \partial A} \|f'(x)\|.$$

Рассмотрим стандартный итерационный процесс метода проекции градиента: $x_0 \in \partial A$,

$$x_{k+1} = P_A\big(x_k + t_k f'(x_k)\big), \quad t_k > 0, \quad k = 0, 1, 2, 3, \ldots . \tag{3.1}$$

Пусть

(i) множество A сильно выпуклое с радиусом $r > 0$,

(ii) функция $f\colon \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ имеет липшицев градиент на выпуклом множестве A с константой $C > 0$,

(iii) $r < m/C$,

(iv) для всякого k найдётся вектор $p_k \in N(A, x_k)$, $\|p_k\| = 1$, такой что $(f'(x_k), p_k) \geqslant 0$.

Последнее условие (iv) означает, что никакой сдвиг из точки x_k вдоль вектора $f'(x_k)$ не ведёт внутрь множества A.

Определим величину $s = m/(rC) > 1$.

Теорема 3.1. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* (i)—(iii). *Тогда итерационный процесс* (2.4) ($x_0 \in \partial A$, $x_{k+1} = \arg\max_{x\in A}(f'(x_k), x)$, $k = 0, 1, 2, 3, \ldots$) *сходится к* (*единственному*) *решению* z_0 *задачи со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем* $q = 1/s < 1$.

Доказательство. Утверждение следует из теоремы 2.3. □

Теорема 3.2. *Пусть в задаче* (1.1) *выполнены условия* (i)—(iv) *и выбрано число* $\tau > 2/(s^2 - 1)$. *Тогда при выборе* $t_k = t = \tau/C$ *для всех* k *итерационный процесс* (3.1) *сходится к решению задачи со скоростью геометрической прогрессии со знаменателем*

$$q(\tau) = \frac{1+\tau}{\sqrt[4]{1+\tau^2 s^2}\sqrt{1+\tau s}}.$$

Доказательство. Заметим, что существование и единственность решения обеспечивается теоремой 2.3. Обозначим это решение через $z_0 \in A$: $f(z_0) = \alpha$.

Отметим, что $f'(z_0) \in N(A, z_0)$. Подробнее об этом условии для выпуклых функций говорится в [8].

Пусть мы находимся в точке x_k,

$$x_{k+1} = P_A\bigl(x_k + tf'(x_k)\bigr), \quad z_0 = P_A\bigl(z_0 + tf'(z_0)\bigr).$$

Если $p_k \in N(A, x_k)$ — единичный вектор со свойством $\bigl(p_k, f'(x_k)\bigr) \geqslant 0$, то в силу предложения 1.1

$$A \subset B_r(x_k - rp_k),$$

поэтому

$$\varrho_A\bigl(x_k + tf'(x_k)\bigr) \geqslant \varrho_{B_r(x_k - rp_k)}\bigl(x_k + tf'(x_k)\bigr) \geqslant \sqrt{r^2 + t^2\|f'(x_k)\|^2} - r.$$

Расстояние от $z_0 + tf'(z_0)$ до A равно $t\|f'(z_0)\|$.

Положим

$$K = \frac{r}{\sqrt[4]{r^2 + \tau^2 m^2/C^2}\sqrt{r + \tau m/C}}.$$

Применяя предложение 1.3, получаем

$$\begin{aligned}\|x_{k+1}-z_0\| &= \big\|P_A\big(x_k+tf'(x_k)\big)-P_A\big(z_0+tf'(z_0)\big)\big\| \leqslant \\ &\leqslant K\cdot\big\|x_k-z_0+t\big(f'(x_k)-f'(z_0)\big)\big\| \leqslant \\ &\leqslant K(\|x_k-z_0\|+t\|f'(x_k)-f'(z_0)\|) \leqslant K(1+tC)\|x_k-z_0\|.\end{aligned}$$

Итак,

$$\|x_{k+1}-z_0\| \leqslant \frac{r(1+\tau)}{\sqrt[4]{r^2+\tau^2m^2/C^2}\sqrt{r+\tau m/C}}\|x_k-z_0\| = \\ = \frac{1+\tau}{\sqrt[4]{1+\tau^2s^2}\sqrt{1+\tau s}}\|x_k-z_0\|. \quad \square$$

Отметим, что $q(\tau)\in(0,1)$ при условии $\tau>2/(s^2-1)$.

Аналогично можно доказать метод проекции градиента для задачи минимизации липшицевой дифференцируемой функции на сильно выпуклом множестве. Для выпуклой функции это было сделано в [4].

Работа поддержана РФФИ, проект № 13-01-00295-а.

Литература

[1] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[2] Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции. — М.: Физматлит, 2006.

[3] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2007.

[4] Balashov M. V., Golubev M. O. About the Lipschitz property of the metric projection in the Hilbert space // J. Math. Anal. Appl. — 2012. — Vol. 394. — P. 545—551.

[5] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13, no. 3-4. — P. 525—559.

[6] Canino A. On p-convex sets and geodesics // J. Differ. Equ. — 1988. — Vol. 75. — P. 118—157.

[7] Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R. Proximal smoothness and lower-C^2 property // J. Convex Anal. — 1995. — Vol. 2, no. 1-2. — P. 117—144.

[8] Hiriart-Urruty J.-B., Ledyaev Yu. S. A note on the characterization of the global maxima of a (tangentially) convex function over a convex set // J. Convex Anal. — 1996. — Vol. 3, no. 1. — P. 55—61.

[9] Poliquin R. A., Rockafellar R. T., Thibault L. Local differentiability of distance functions // Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352. — P. 5231—5249.