Весовая интегрируемость двойных рядов по мультипликативным системам*

С. С. ВОЛОСИВЕЦ
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: VolosivetsSS@mail.ru

Р. Н. ФАДЕЕВ
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского
e-mail: belal_templier@mail.ru

УДК 517.518.36

Ключевые слова: мультипликативная система, весовая L^p-интегрируемость, степенной вес, двойная обобщённо-монотонная последовательность.

Аннотация

Получены необходимые и достаточные условия L^p-интегрируемости со степенным весом функции f, представимой двойным рядом по мультипликативной системе с обобщённо-монотонными коэффициентами. Эти условия даны в терминах коэффициентов или их вторых смешанных разностей. Кроме того, изучается интегрируемость разностного отношения $\bigl(f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)\bigr)/(xy)$.

Abstract

S. S. Volosivets, R. N. Fadeev, Weighted integrability of double series with respect to multiplicative systems, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 69—87.

Necessary and sufficient conditions for L^p-integrability with power weight of a function f represented by the double series with respect to a multiplicative system with generalized monotone coefficients are obtained. These conditions are given in terms of the coefficients or their second mixed differences. In addition, the integrability of the difference quotient $\bigl(f(x,y)-f(x,0)-f(0,y)+f(0,0)\bigr)/(xy)$ is studied.

1. Введение

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}\subset\mathbb{N}$, $2\leqslant p_n\leqslant N$. Определим $m_0=1$, $m_n=p_nm_{n-1}$, $n\in\mathbb{N}$. Тогда каждое $x\in[0,1)$ имеет разложение вида

$$x=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{m_n},\quad x_n\in\mathbb{Z}_+\cap[0,p_n). \tag{1}$$

*Работа подготовлена в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект № 1.1520.2014/К). Работа первого автора поддержана РФФИ (проект № 13-01-00238).

Фундаментальная и прикладная математика, 2013, том 18, № 5, с. 69—87.

Представление (1) является единственным, если для $x = k/m_l$, $k, l \in \mathbb{Z}_+$, $0 < k < m_l$, мы берём разложение с конечным числом $x_n \neq 0$. Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ единственным образом представимо в виде

$$k = \sum_{i=1}^{\infty} k_i m_{i-1}, \quad k_i \in \mathbb{Z}_+ \cap [0, p_i).$$

Для $x \in [0,1)$ и $k \in \mathbb{Z}_+$ положим по определению

$$\chi_k(x) = \exp\biggl(2\pi i \sum_{j=1}^{\infty} \frac{x_j k_j}{p_j}\biggr).$$

Система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является ортонормированной на $[0,1)$ и полной в $L^1[0,1)$. Подробнее её свойства рассматриваются в [6, § 1.5]. Измеримая на $[0,1)$ функция $f(x)$ принадлежит пространству $L^r_\alpha[0,1)$, $1 \leqslant r < \infty$, $\alpha \in \mathbb{R}$, если конечна норма

$$\|f\|_{r,\alpha} = \biggl(\int_0^1 |f(x)|^r x^\alpha \, dx\biggr)^{1/r}.$$

Сумма

$$\sum_{k=0}^{n-1} \chi_k(x) =: D_n(x)$$

называется n-м ядром Дирихле. Для ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \chi_k(x) \tag{2}$$

рассмотрим частичные суммы

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \chi_k(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

и максимальную функцию

$$M^*(x) = \sup_{n \in \mathbb{N}} |S_n(x)|.$$

Будем писать $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$, если

$$\sum_{k=n}^{2n-1} |a_k - a_{k+1}| \leqslant C a_n, \quad n \in \mathbb{N}; \quad |a_0 - a_1| \leqslant C a_0. \tag{3}$$

Можно показать, что для $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$ при дополнительном условии

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty$$

ряд (2) сходится при $x \neq 0$ (см. лемму 5). Класс GM, введённый С. Ю. Тихоновым [23], включает в себя класс последовательностей RBVS, введённый Л. Лейндлером [19] и определяемый неравенством

$$\sum_{k=n}^{\infty} |a_k - a_{k+1}| \leqslant C a_n, \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Он содержит также класс QM квазимонотонных последовательностей, рассматривавшийся А. А. Конюшковым [7].

В одномерном случае

$$\Delta a_j = a_j - a_{j+1}, \quad \Delta^2 a_j = a_j - 2a_{j+1} + a_{j+2}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Для двойных последовательностей $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ положим при $j, k \geqslant 0$

$$\Delta_{10} a_{jk} = a_{jk} - a_{j+1,k}, \quad \Delta_{01} a_{jk} = a_{jk} - a_{j,k+1},$$
$$\Delta_{11} a_{jk} = \Delta_{10}(\Delta_{01} a_{jk}), \quad \Delta_{22} a_{jk} = \Delta_{11}(\Delta_{11} a_{jk}).$$

Для ряда

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y) \tag{4}$$

рассмотрим прямоугольные частные суммы

$$S_{mn}(x, y) = \sum_{j=0}^{m-1} \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \chi_j(x) \chi_k(y), \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Ряд (4) определяет следующую максимальную функцию:

$$M^*(x, y) = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |S_{mn}(x, y)|. \tag{5}$$

Пусть $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ — неотрицательная последовательность, такая что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty$$

и

$$\lim_{j+k \to \infty} a_{jk} = 0.$$

В этом случае ряд (4) сходится по Прингсхейму на $(0, 1)^2$, т. е. $S_{mn}(x)$ сходятся при $\min(m, n) \to \infty$ (см. [22] в двоичном случае, т. е. при $p_i \equiv 2$). По аналогии с важным свойством одномерного класса GM, отражённым в лемме 2, следуя [14], будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \mathrm{GM}^2$, если

$$\lim_{m+n \to \infty} a_{mn} = 0$$

и при $m, n \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{j=m}^{\infty} \sum_{k=n}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leqslant C \beta_{mn}^* := C \left(a_{mn} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \frac{a_{jn}}{j} + \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{mk}}{k} + \sum_{j=m+1}^{\infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk} \right). \tag{6}$$

Мы предполагаем, что ряды из правой части (6) сходятся и можно рассматривать сумму $f(x,y)$ ряда (4) при $\{a_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}_+} \in \mathrm{GM}^2$. Будем писать $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in \in \mathrm{RBVS}^2$, если

$$\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| \leqslant C a_{lq}, \quad l,q \in \mathbb{Z}_+, \tag{7}$$

и $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in \mathrm{RBVS}^{(2)}$, если вдобавок к (7) имеем

$$\{a_{jk}\}_{j=0}^{\infty} \in \mathrm{RBVS}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \{a_{jk}\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{RBVS}, \quad j \in \mathbb{Z}_+.$$

Ясно что класс $\mathrm{RBVS}^{(2)}$ содержит класс монотонных по Харди двойных последовательностей $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$, таких что $a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{10} a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{01} a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{11} a_{jk} \geqslant 0$ для всех $j,k \in \mathbb{Z}_+$. Аналогично вводится класс $\mathrm{GM}^{(2)}$: $\{a_{jk}\}_{j,k\in\mathbb{Z}_+} \in \mathrm{GM}^{(2)}$, если, кроме неравенства (6), выполнены включения

$$\{a_{jk}\}_{j=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}, \quad k \in \mathbb{Z}_+, \quad \{a_{jk}\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}, \quad j \in \mathbb{Z}_+,$$

причём постоянная в неравенствах вида (3) не зависит от $k \in \mathbb{Z}_+$ или $j \in \mathbb{Z}_+$ соответственно. В этом случае

$$\begin{gathered} a_{pq} \geqslant C a_{mn}, \quad p \leqslant m \leqslant 2p, \quad q \leqslant n \leqslant 2q; \\ a_{pq} \geqslant C a_{p+1,q}, \quad C a_{p,q+1} \geqslant C^2 a_{p+1,q+1}, \quad p,q,m,n \in \mathbb{Z}_+, \end{gathered} \tag{8}$$

и C не зависит от p, q.

Пусть $1 \leqslant r < \infty$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$. Через $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ мы обозначим множество измеримых на $[0,1)^2$ функций f с конечной нормой

$$\|f\|_{r,\alpha,\beta} = \left(\int_0^1\!\!\int_0^1 |f(x,y)|^r x^{\alpha} y^{\beta}\, dx\, dy \right)^{1/r}.$$

В силу неравенства Гёльдера $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2 \subset L^1[0,1)^2$ при $\alpha,\beta < r-1$. По ряду (4) можно определить величину

$$S_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |a_{jk}|^r (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} \right)^{1/r}.$$

Ясно, что $S_{r,\alpha,\beta}(a)$ убывает, когда α или β возрастает. С другой стороны, в силу неравенства Гёльдера $S_{r,\alpha,\beta}(a)$ почти возрастает, когда r возрастает, т. е.

$$S_{r,\alpha,\beta}(a) \leqslant C S_{q,\alpha,\beta}(a), \quad 0 < r < q < \infty.$$

Выражение $A(f) \asymp B(f)$ означает, что $C_1 A(f) \leqslant B(f) \leqslant C_2(f)$, где $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f. Константы $C, C_1, C_2, \ldots$ разные в различных случаях.

Обзор ранних работ по проблеме L^r-интегрируемости со степенным весом суммы тригонометрического ряда можно найти в [12]. В случае рядов по синусам или косинусам с монотонными коэффициентами $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и суммой $f(x)$

условие $f \in L^r_\alpha[0, 2\pi]$ равносильно сходимости ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+r-2} a_n^r$ для подходящих r и α (см. [12, § 6]). В ряде работ (см., например, [15,19,23]) этот результат распространён на более общие классы $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ф. Мориц [20] получил достаточное условие L^r-интегрируемости мажоранты $M^*(x)$ ряда по системе Уолша с монотонными коэффициентами и необходимое условие такой интегрируемости его суммы $f(x)$. Вместе эти условия дают критерий принадлежности $M^*(x)$ и $f(x)$ пространству $L^r_0[0,1)$. Другие результаты типа теоремы Харди—Литтлвуда для рядов (2) с монотонными коэффициентами были приведены в [8] без доказательства. В [3] критерий $f \in L^r_\alpha[0,1)$ получен для рядов (2) с коэффициентами классов RBVS и QM. В [24] даны оценки сверху наилучших приближений функций в L^r и пространстве Харди при некоторых условиях на разности коэффициентов Фурье—Виленкина, близких к тем, которые использовались в [11]. В [4] получены двусторонние одинаковые по порядку оценки L^r-нормы сумм ряда по косинусам с выпуклыми коэффициентами и ряда по синусам с монотонными коэффициентами, где $r \in (0, \infty)$.

Для случая двойных рядов Уолша (а также двойных рядов по косинусам и синусам) Ф. Мориц [21] установил аналоги своих одномерных результатов из [20].

Теорема A.

1. *Пусть* $p_j \equiv 2$, $r \geqslant 1$ *и последовательность* $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *такова, что* $a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{10} a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{01} a_{jk} \geqslant 0$, $\Delta_{11} a_{jk} \geqslant 0$ *при всех* $j, k \in \mathbb{Z}_+$, M^* *определена по ряду* (4). *Тогда*

$$\|M^*\|_r := \|M^*\|_{r,0,0} \leqslant C(r) S_{r,0,0}(a).$$

2. *Пусть* $p_j \equiv 2$, $r > 1$, *последовательность* $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям первой части теоремы и, кроме того,*

$$\lim_{j+k \to +\infty} a_{jk} = 0.$$

Если сумма f *ряда* (4) *принадлежит* $L^r[0,1)^2$, $r > 1$, *то*

$$\left(\sum_{j=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}^r (jk)^{r-2} \right)^{1/r} \leqslant C(r) \|f\|_r.$$

Позже в работах М. И. Дьяченко, Е. М. Нурсултанова и С. Ю. Тихонова появились другие многомерные варианты теоремы Харди—Литтлвуда о тригонометрических рядах с монотонными коэффициентами. Отметим упоминавшуюся статью [14]. В [24] установлены оценки приближения углом функций в терминах коэффициентов Фурье по двойной мультипликативной системе. Из этих результатов вытекает оценка сверху L^r-нормы, $1 < r < \infty$, функции с рядом Фурье (4) и $\{a_{jk}\}_{j,k \in \mathbb{Z}_+} \in \mathrm{RBVS}^{(2)}$ (см. [24, следствие 4]). Используя идеи из работы С. Ю. Тихонова [9], Н. А. Бокаев и Ж. Б. Муканов [2] получили оценки весовых L^r-норм сумм рядов (4) с коэффициентами из $\mathrm{RBVS}^{(2)}$. Веса, использовавшиеся ими, были более общими, чем степенные и удовлетворяли условиям Бари—Стечкина и Δ_2-условию. Т. М. Вуколова и М. И. Дьяченко [5] вывели двусторонние одинаковые по порядку оценки L^r-норм функций с монотонными двойными коэффициентами представляющего их тригонометрического ряда. Для двойных рядов по косинусам и косинусам, синусам и синусам, косинусам и синусам использовались различные разности коэффициентов. Отметим результат для двойных рядов по косинусам и косинусам.

Теорема B. *Пусть* $0 < r < \infty$, *последовательность* $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ *такова, что* $\lim\limits_{j+k\to+\infty} a_{jk} = 0$ *и* $\Delta_{22}a_{jk} \geqslant 0$ *при всех* $j,k \in \mathbb{Z}_+$. *Тогда для*

$$f(x,y) := \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{jk}\cos jx \cos ky,$$

имеем

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x,y)|^r\,dx\,dy \asymp \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}(j+1)^{2r-2}(k+1)^{2r-2}(\Delta_{11}a_{jk})^r.$$

В [13] исследовалась обычная L^r-интегрируемость и более общая ϕ-интегрируемость со степенным весом суммы $f_c(x,y)$ ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}(1-\cos jx)(1-\cos ky)$$

в случае $a_{jk} \geqslant 0$ при всех $j,k \in \mathbb{N}$ и была установлена следующая теорема.

Теорема C. *Пусть* $1 \leqslant r < \infty$ *и* $a_{jk} \geqslant 0$ *при всех* $j,k \in \mathbb{N}$. *Тогда для* $-r < \alpha, \beta < 0$ *справедливо соотношение*

$$\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} x^{\alpha-1}y^{\beta-1}f_c^r(x,y)\,dx\,dy \asymp \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-\alpha-1}n^{-\beta-1}\Bigg(\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_{jk}\Bigg)^r.$$

Целью настоящей работы является получение двусторонних оценок, аналогичных результатам теорем A (с распространением на весовой случай) и C, для ряда (4) с обобщённо-монотонными коэффициентами a_{jk}. Кроме того, в случае $\Delta_{22}a_{jk} \geqslant 0$ получена оценка сверху нормы $\|f\|_{r,\alpha,\beta}$, где f — сумма ряда (4), отличающаяся от аналогичного результата из теоремы B.

2. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 (см. [1, гл. 4, § 3; 6, гл. 1, § 1.5]).

1. *Пусть* $D_n(x) = \sum\limits_{k=0}^{n-1}\chi_k(x)$. *Тогда* $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, $n \in \mathbb{Z}_+$, *где* X_E — *характеристическая функция множества* E.

2. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$ *и* $x \in (0,1)$ *имеет место неравенство* $|D_n(x)| \leqslant N/x$, *где* $p_i \leqslant N$ *для всех* $i \in \mathbb{N}$.

Лемма 2 [23]. *Если* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$, *то справедливы неравенства*

$$\sum_{j=k}^{n-1} |a_j - a_{j+1}| \leqslant C\biggl(\sum_{j=k}^{n-1} \frac{a_j}{j} + a_k\biggr), \quad n \geqslant k+1, \quad n,k \in \mathbb{Z}_+;$$

$$a_n \leqslant Ca_j, \quad j \leqslant n \leqslant 2j, \quad a_1 \leqslant Ca_0.$$

Первый пункт леммы 3 представляет известное неравенство Харди—Литтлвуда [10, теорема 346], а второй содержит двумерное обобщение этого неравенства, данное Ф. Морицем [21].

Лемма 3.

1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $r > 1$, $a_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}\biggl(\sum_{i=1}^{n} a_i\biggr)^p \leqslant C(p,r)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-r}(na_n)^p.$$

2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $r_1, r_2 > 1$ *и* $a_{jk} \geqslant 0$ *при* $j,k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-r_1} n^{-r_2}\biggl(\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\biggr)^p \leqslant C(r_1,r_2,p)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} j^{p-r_1} k^{p-r_2} a_{jk}^p.$$

Лемма 4.

1. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $s < 1$, $a_n \geqslant 0$ *при* $n \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}\biggl(\sum_{i=n}^{\infty} a_i\biggr)^p \leqslant C(p,s)\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}(na_n)^p.$$

2. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $s_1, s_2 < 1$ *и* $a_{jk} \geqslant 0$ *при* $j,k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1} n^{-s_2}\biggl(\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_{jk}\biggr)^p \leqslant C(s_1,s_2,p)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} j^{p-s_1} k^{p-s_2} a_{jk}^p.$$

3. *Пусть* $1 \leqslant p < \infty$, $s < 1 < r$ *и* $a_{jk} \geqslant 0$ *при* $j,k \in \mathbb{N}$. *Тогда*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-s} n^{-r}\biggl(\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=1}^{n} a_{jk}\biggr)^p \leqslant C(s,r,p)\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} j^{p-s} k^{p-r} a_{jk}^p.$$

Доказательство. Утверждение 1 установлено Г. Харди и Дж. Литтлвудом (см. [10, теорема 346]). Для доказательства утверждения 2 рассмотрим

$$A_{jn} = n^{-s_2/p}\sum_{k=n}^{\infty} a_{jk}.$$

Тогда согласно пункту 1 имеем

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1}n^{-s_2}\biggl(\sum_{j=m}^{\infty}\sum_{k=n}^{\infty} a_{jk}\biggr)^p = \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{-s_1}\biggl(\sum_{j=m}^{\infty} A_{jn}\biggr)^p \leqslant$$

$$\leqslant C_1(p,s_1)\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty} m^{p-s_1}(A_{mn})^p = C_1(p,s_1)\sum_{m=1}^{\infty} m^{p-s_1}\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s_2}\biggl(\sum_{k=n}^{\infty} a_{mk}\biggr)^p \leqslant$$

$$\leqslant C_2(p,s_1,s_2)\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} m^{p-s_1}n^{p-s_2}a_{mn}^p.$$

Пункт 3 доказывается аналогично пункту 2. Лемма доказана. □

Аналогично работе [23] с помощью лемм 1 и 2 доказывается лемма 5.

Лемма 5. *Пусть* $\{a_n\}_{n=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$ *и* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k/k < \infty$. *Тогда ряд* (2) *сходится при* $x \neq 0$.

Лемма 6.

1. *Пусть* $f \in L^1[0,a)$ ($f \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,a)$ *при* $a = +\infty$), $1 \leqslant p < \infty$, $f(x) \geqslant 0$ *на* $[0,a)$ *и*

$$F(x) = x^{-1}\int_0^x f(t)\,dt, \quad x \in (0,a).$$

Тогда при $r < p-1$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^a x^r F^p(x)\,dx \leqslant \left(\frac{p}{r-1}\right)^p \int_0^a x^r f^p(x)\,dx.$$

2. *Пусть* $f \in L^1[0,a)^2$ ($f \in L^1_{\mathrm{loc}}[0,a)^2$ *при* $a = +\infty$), $1 \leqslant p < \infty$, $f(x,y) \geqslant 0$ *на* $[0,a)^2$ *и*

$$F(x,y) = x^{-1}y^{-1}\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv, \quad x,y \in (0,a).$$

Тогда при $r_1, r_2 < p-1$ *справедливо неравенство*

$$\int_0^a\int_0^a x^{r_1}y^{r_2}F^p(x,y)\,dx\,dy \leqslant C(p,r_1,r_2)\int_0^a x^{r_1}y^{r_2}\bigl(f(x,y)\bigr)^p\,dx.$$

Неравенство пункта 1 установил Г. Харди [10, теорема 330], неравенство пункта 2 приведено в [21], где указано, что его доказательство принадлежит А. Торчинскому.

Последовательность $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ называется квазиубывающей, если $a_n \geqslant Ca_{n+j}$ при $1 \leqslant j \leqslant n$. Лемма 7 доказана Л. Лейндлером в [18, теорема 1] и [17].

Лемма 7.

1. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *квазиубывает и последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *неотрицательна, то имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p n^{p-1} \sum_{k=n}^{\infty} \lambda_k \leqslant C \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \biggl(\sum_{k=1}^{n} a_k \biggr)^p, \quad p > 1.$$

2. *Если последовательность* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *неотрицательна и последовательность* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ *положительна,* $p \geqslant 1$, *то имеет место неравенство*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \biggl(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \biggr)^p \leqslant p^p \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{1-p} \biggl(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \biggr)^p a_n^p.$$

Лемму 8, доказанную первым из авторов, можно найти в [16].

Лемма 8. *Пусть*

$$F_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{D_k(x)}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Тогда для $x \in (0,1)$ *и* $n \in \mathbb{N}$ *справедливо неравенство*

$$|nF_n(x)| \leqslant Cx^{-2}.$$

3. Основные результаты

Теорема 1. *Пусть* $-1 < \alpha, \beta < r-1$, $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}^{(2)}$, $r \in [1,\infty)$ *и* $S_{r,\alpha,\beta}(a) < \infty$. *Тогда функция* M^*, *определяемая равенством* (5), *содержится в* $L_{\alpha,\beta}^r[0,1)^2$ *и при этом* $\|M^*\|_{r,\alpha,\beta} \leqslant CS_{r,\alpha,\beta}(a)$.

Доказательство. Для заданных $x, y \in (0,1)$ находим $p, q \in \mathbb{N}$ из неравенств $1/(p+1) < x \leqslant 1/p$, $1/(q+1) < y \leqslant 1/q$. Тогда

$$\begin{aligned} |S_{mn}(x)| &\leqslant \sum_{k=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + \sum_{k=0}^{q-1} \biggl| \sum_{j=p}^{m-1} a_{jk}\chi_j(x) \biggr| + \\ &+ \sum_{j=0}^{p-1} \biggl| \sum_{k=q}^{n-1} a_{jk}\chi_k(y) \biggr| + \biggl| \sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y) \biggr| = I_1 + I_2 + I_3 + I_4. \end{aligned}$$

Используя преобразование Абеля и лемму 2, получаем оценки

$$I_2 \leqslant C_1 \sum_{k=0}^{q-1} p \biggl(\sum_{j=p}^{m-1} \frac{a_{jk}}{j} + a_{pk} \biggr), \quad I_3 \leqslant C_2 \sum_{j=0}^{p-1} q \biggl(\sum_{k=q}^{n-1} \frac{a_{jk}}{k} + a_{jq} \biggr).$$

Применяя дважды преобразование Абеля, находим, что

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y) &= \sum_{j=p}^{m-2}\sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{11}a_{jk}D_{j+1}(x)D_{k+1}(y) + \\
&+ \sum_{j=p}^{m-2} \Delta_{10}a_{j,n-1}D_{j+1}(x)D_n(y) + \sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{01}a_{m-1,k}D_m(x)D_{k+1}(y) - \\
&- \sum_{j=p}^{m-2} \Delta_{10}a_{j,q}D_{j+1}(x)D_q(y) - \sum_{k=q}^{n-2} \Delta_{01}a_{p,k}D_p(x)D_{k+1}(y) + \\
&+ a_{m-1,n-1}D_m(x)D_n(y) - a_{p,n-1}D_p(x)D_n(y) - \\
&- a_{m-1,q}D_m(x)D_q(y) + a_{pq}D_p(x)D_q(y).
\end{aligned}
$$

С учётом равенств

$$
\Delta_{10}a_{jk} = \sum_{l=k}^{\infty} \Delta_{11}a_{jl}, \quad a_{jk} = \sum_{i=j}^{\infty}\sum_{l=k}^{\infty} \Delta_{11}a_{il}
$$

и им подобных отсюда выводим, что

$$
\begin{aligned}
\left|\sum_{j=p}^{m-1}\sum_{k=q}^{n-1} a_{jk}\chi_j(x)\chi_k(y)\right| &\leqslant \frac{N^2}{x} y\Biggl(\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11}a_{jk}| + \\
&+ \sum_{j=p}^{m-2} |\Delta_{10}a_{j,n-1}| + \sum_{k=q}^{n-2} |\Delta_{01}a_{m-1,k}| + \sum_{j=p}^{m-2} |\Delta_{10}a_{j,q}| + \\
&+ \sum_{k=q}^{n-2} |\Delta_{01}a_{p,k}| + a_{m-1,n-1} + a_{p,n-1} + a_{m-1,q} + a_{p,q}\Biggr) \\
&\leqslant C_3N^2(xy)^{-1}\sum_{j=p}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{11}a_{jk}|.
\end{aligned}
$$

Поэтому для $(x,y) \in (1/(p+1), 1/p] \times (1/(q+1), 1/q]$ находим, что

$$
\begin{aligned}
M^*(x,y) \leqslant C_4\Biggl(&\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{jk} + p\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=p}^{\infty} \frac{a_{jk}}{j} + q\sum_{k=q}^{\infty}\sum_{j=0}^{p-1} \frac{a_{jk}}{k} + \\
&+ pq\Biggl(a_{pq} + \sum_{j=p+1}^{\infty} \frac{a_{jq}}{j} + \sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{a_{pk}}{k} + \sum_{j=p+1}^{\infty}\sum_{k=q+1}^{\infty} \frac{a_{jk}}{jk}\Biggr)\Biggr).
\end{aligned}
$$

Применяя леммы 3 и 4, получаем, что

$$
\int\limits_0^1\int\limits_0^1 \bigl(M^*(x,y)\bigr)^r x^\alpha y^\beta\, dx\, dy = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \int\limits_{1/(p+1)}^{1/p} \int\limits_{1/(q+1)}^{1/q} \bigl(M^*(x,y)\bigr)^r x^\alpha y^\beta\, dx\, dy \leqslant
$$

$$\leqslant C_5 \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2}q^{-\beta-2} \times$$

$$\times \left[\left(\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=0}^{q-1} a_{jk}\right) + \left(p\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=p}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\right)^r + \left(q\sum_{j=0}^{p-1}\sum_{k=q}^{\infty}\frac{a_{jk}}{k}\right)^r + (pq\beta_{pq}^*)^r\right] \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2}q^{r-\beta-2}a_{p-1,q-1}^r. \tag{9}$$

Например, по первому утверждению леммы 4 при $r-\alpha-2>-1$ имеем

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2}q^{-\beta-2}\left(pq\sum_{j=p}^{\infty}\frac{a_{jq}}{j}\right)^r \leqslant C_7\sum_{q=1}^{\infty} q^{r-\beta-2}p^{r-\alpha-2}\left(\frac{pa_{pq}}{p}\right)^r,$$

а по третьему утверждению леммы 4 ввиду условий $r-\alpha-2>-1$ и $\beta+2>1$ получаем, что

$$\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{-\alpha-2}q^{-\beta-2}\left(p\sum_{k=0}^{q-1}\sum_{j=p}^{\infty}\frac{a_{jk}}{j}\right)^r = \sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2}q^{-\beta-2}\left(\sum_{k=1}^{q}\sum_{j=p}^{\infty}\frac{a_{j,k-1}}{j}\right)^r$$

$$\leqslant C_8\sum_{p=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} p^{r-\alpha-2}q^{r-\beta-2}a_{p,q-1}^r \leqslant C_9 S_{r,\alpha,\beta}(a).$$

Аналогично оцениваются другие слагаемые из средней части неравенства (9), из которого следует результат теоремы. □

Теорема 2. *Пусть $r\in(1,\infty)$, $\alpha,\beta<r-1$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ неотрицательна, удовлетворяет условию* (8) *и*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}|\Delta_{11}a_{j,k}|<\infty, \qquad \lim_{j+k\to\infty} a_{jk}=0.$$

Если $f(x,y)$ — сумма ряда (4) *и $f\in L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$, то $S_{r,\alpha,\beta}(a)\leqslant C\|f\|_{r,\alpha,\beta}$.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$F(x,y)=\int_0^x\int_0^y f(u,v)\,du\,dv.$$

Ввиду ортонормированности системы $\{\chi_j(x)\chi_k(y)\}_{j,k=0}^{\infty}$, леммы 1 и (8) при $l,q\in\mathbb{N}$ имеем, что

$$F\left(\frac{1}{m_l},\frac{1}{m_q}\right)=\int_0^{1/m_l}\int_0^{1/m_q} f(x,y)\,dx\,dy = m_l^{-1}m_q^{-1}\int_0^1\int_0^1 f(x,y)D_{m_l}(x)D_{m_q}(y)\,dx\,dy =$$

$$= m_l^{-1}m_q^{-1}\sum_{j=0}^{m_l-1}\sum_{k=0}^{m_q-1} a_{jk} \geqslant m_l^{-1}m_q^{-1}\sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} a_{jk} \geqslant C_1 a_{m_l,m_q}.$$

При $l = q = 1$ аналогично выводим, что

$$F\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) \geqslant m_1^{-1} m_1^{-1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} a_{jk} \geqslant \frac{a_{00}}{N^2},$$

при $l = 1$, $q \geqslant 2$ верно

$$F\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q}\right) \geqslant N^{-1} m_q^{-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} a_{0k},$$

и при $l \geqslant 2$, $q = 1$ верно

$$F\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) \geqslant N^{-1} m_l^{-1} \sum_{k=m_{l-1}}^{m_l-1} a_{j0}.$$

Снова применяя неравенства (8) и неравенства, полученные выше, мы видим, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} a_{jk}^r = a_{00}^r + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1} (j+1)^{r-\alpha-2} a_{j,0}^r +$$
$$+ \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} (k+1)^{r-\beta-2} a_{0,k}^r +$$
$$+ \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1} \sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} (j+1)^{r-\alpha-2} (k+1)^{r-\beta-2} a_{jk}^r \leqslant$$
$$\leqslant C_1 \Bigg(F^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} m_l^{r-1-\alpha} F^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) +$$
$$+ \sum_{q=1}^{\infty} m_q^{r-1-\beta} F^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q}\right) + \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m_l^{r-1-\alpha} m_q^{r-1-\beta} F^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_q}\right) \Bigg).$$

Так как

$$F(x, y) \leqslant G(x, y) = \int_0^x \int_0^y |f(u, v)|\, du\, dv,$$

то по лемме 6 при $\alpha, \beta < r - 1$ получаем, что

$$\sum_{j=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{r-2-\alpha} (k+1)^{r-2-\beta} a_{jk}^r$$
$$\leqslant C_2 \Bigg(G^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_1}\right) m_1^{2r-\alpha-\beta-2} + \sum_{l=1}^{\infty} G^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_1}\right) m_l^{r-\alpha-1} m_1^{r-\beta-1} \Bigg)$$

$$+ C_2\Bigg(\sum_{q=1}^{\infty} G^r\left(\frac{1}{m_1}, \frac{1}{m_q}\right) m_1^{r-\alpha-1} m_q^{r-\beta-1} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} G^r\left(\frac{1}{m_l}, \frac{1}{m_q}\right) m_l^{r-\alpha-1} m_q^{r-\beta-1}\Bigg)$$

$$\leqslant C_3 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \int\limits_{1/m_l}^{1/m_{l-1}} \int\limits_{1/m_q}^{1/m_{q-1}} \big(x^{-1}y^{-1}G(x,y)\big)^r x^{\alpha} y^{\beta}\, dx\, dy \leqslant$$

$$\leqslant C_4 \int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(x,y)|^r x^{\alpha} y^{\beta}\, dx\, dy.$$

Теорема доказана. □

Используя дважды преобразование Абеля и леммы 1, 8, можно доказать следующее утверждение.

Предложение 1. *Пусть*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty, \qquad \lim_{j+k\to\infty} a_{jk} = 0$$

и $f(x,y)$ — сумма ряда (4)*. Тогда*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{22} a_{jk}| < \infty$$

и

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} (j+1) F_{j+1}(x)(k+1)F_{k+1}(y), \quad (x,y) \in (0,1)^2.$$

Теорема 3. *Пусть $r \in (1,\infty)$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=0}^{\infty}$ такова, что*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} |\Delta_{11} a_{jk}| < \infty, \qquad \lim_{j+k\to\infty} a_{jk} = 0$$

и

$$Q_{r,\alpha,\beta}(a) = \left(\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} (j+1)^{3r-2-\alpha}(k+1)^{3r-2-\beta} |\Delta_{22} a_{jk}|^r\right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда сумма f ряда (4) *принадлежит $L^r_{\alpha,\beta}[0,1)^2$ и $\|f\|_{r,\alpha,\beta} \leqslant C Q_{r,\alpha,\beta}(a)$.*

Доказательство. Пусть $F_{j,k}(x,y) = (j+1)F_{j+1}(x)(k+1)F_{k+1}(y)$. По предложению 1 можно записать

$$f(x,y) = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} \Delta_{22} a_{jk} F_{j,k}(x,y), \quad (x,y) \in (0,1)^2.$$

Тогда

$$\|f\|_{r,\alpha,\beta}^r = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left|\sum_{j=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\Delta_{22}a_{jk}F_{j,k}(x,y)\right|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left|\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{k=0}^{q-1}\Delta_{22}a_{jk}F_{j,k}(x,y)\right|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left|\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=0}^{q-1}\Delta_{22}a_{jk}F_{j,k}(x,y)\right|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left|\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{k=0}^{q-1}\Delta_{22}a_{jk}F_{j,k}(x,y)\right|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy +$$

$$+ \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left|\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty}\Delta_{22}a_{jk}F_{j,k}(x,y)\right|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy =$$

$$= I_1 + I_2 + I_3 + I_4.$$

Так как $|D_n(x)| \leqslant n$, $x \in [0,1)$, $n \in \mathbb{N}$, то легко убедиться, что

$$|nF_n(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{n} k \leqslant n^2.$$

В результате по лемме 8 и второму утверждению леммы 3 имеем

$$I_1 \leqslant C_1\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{-2-\alpha}q^{-2-\beta}\left(\sum_{j=0}^{l-1}\sum_{k=0}^{q-1}|\Delta_{22}a_{jk}|(j+1)^2(k+1)^2\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{-2-\alpha}q^{-2-\beta}(l^3q^3|\Delta_{22}a_{l-1,q-1}|)^r = C_2 Q_{r,\alpha,\beta}^r(a).$$

Применяя третье утверждение леммы 4, лемму 8 и оценку $|nF_n(x)| \leqslant n^2$, находим, что

$$I_2 \leqslant C_3\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l}\int\limits_{1/(q+1)}^{1/q}\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=0}^{q-1}|\Delta_{22}a_{jk}|x^{-2}(k+1)^2\right)^r l^{-\alpha}q^{-\beta}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C_4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{-\alpha}q^{-2-\beta}\int\limits_{1/(l+1)}^{1/l} x^{-2r}\,dx\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=1}^{q}|\Delta_{22}a_{j,k-1}|k^2\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_5 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{2r-2-\alpha} q^{-2-\beta}\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=1}^{q} |\Delta_{22}a_{j,k-1}|k^2\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{3r-2-\alpha} q^{3r-2-\beta}|\Delta_{22}a_{l,q-1}|^r \leqslant C_7 Q^r_{r,\alpha,\beta}(a).$$

Ясно, что аналогичная оценка верна для I_3. Наконец, для I_4 используем лемму 8 и второе утверждение леммы 4 и получаем

$$I_4 \leqslant C_8 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \int\limits_{1/(l+1)}^{1/l} \int\limits_{1/(q+1)}^{1/q} \left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{22}a_{jk}|x^{-2}y^{-2}\right)^r l^{-\alpha}q^{-\beta}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant C_9 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{2r-2-\alpha} q^{2r-2-\beta}\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} |\Delta_{22}a_{jk}|\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_{10} \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{3r-2-\alpha} q^{3r-2-\beta}|\Delta_{22}a_{lq}|^r \leqslant C_{11} Q^r_{r,\alpha,\beta}(a) < \infty.$$

Объединяя полученные результаты, находим, что $\|f\|_{r,\alpha,\beta} \leqslant C_{12}Q_{r,\alpha,\beta}(a)$. Теорема доказана. $\square$

Теорема 4. *Пусть $r \in (1,\infty)$, $\alpha,\beta < -1$, последовательность $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ неотрицательна, удовлетворяет условию* (8) *и*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k} < \infty.$$

Если $f_d(x,y)$ — сумма ряда

$$\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{j,k}\bigl(1-\chi_j(x)\bigr)\bigl(1-\chi_k(y)\bigr),$$

то

$$\|f_d\|_{r,\alpha,\beta} \asymp \left(\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{-\alpha-2}q^{-\beta-2}\left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} a_{jk}\right)^r\right)^{1/r}.$$

Доказательство. Пусть $x \in [1/m_l, 1/m_{l-1})$, $y \in [1/m_q, 1/m_{q-1})$, $l,q \in \mathbb{N}$. Тогда по определению χ_n

$$|f_d(x,y)| = \left|\sum_{j=m_{l-1}}^{\infty}\ \sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk}\bigl(1-\chi_j(x)\bigr)\bigl(1-\chi_k(y)\bigr)\right| \leqslant 4 \sum_{j=m_{l-1}}^{\infty}\ \sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk},$$

поэтому

$$\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f_d(x,y)|^r x^{\alpha}y^{\beta}\,dx\,dy = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} \int\limits_{1/m_l}^{1/m_{l-1}} \int\limits_{1/m_q}^{1/m_{q-1}} |f_d(x,y)|^r x^{\alpha}y^{\beta}\,dx\,dy \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha} m_q^{-\beta}(m_{l-1}^{-1}-m_l^{-1})(m_{q-1}^{-1}-m_q^{-1})\left(4\sum_{j=m_{l-1}}^{\infty}\sum_{k=m_{q-1}}^{\infty} a_{jk}\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_1\Bigg(m_1^{-\alpha-1}m_1^{-\beta-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{jk}\right)^r +$$

$$+\sum_{q=2}^{\infty} m_1^{-\alpha-1}m_q^{-\beta-1}\sum_{k=m_{q-2}}^{m_{q-1}-1}\left(\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{i=k}^{\infty} a_{ji}\right)^r (m_{q-1}-m_{q-2})^{-1} +$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty} m_l^{-\alpha-1}m_1^{-\beta-1}\sum_{j=m_{l-2}}^{m_{l-1}-1}\left(\sum_{i=j}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} a_{ik}\right)^r (m_{l-1}-m_{l-2})^{-1} +$$

$$+\sum_{l=2}^{\infty}\sum_{q=2}^{\infty} m_l^{-\alpha-1}m_q^{-\beta-1}\sum_{j=m_{l-2}}^{m_{l-1}-1}\sum_{k=m_{q-2}}^{m_{q-1}-1}\left(\sum_{i=j}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty} a_{is}\right)^r m_{l-2}^{-1}m_{q-2}^{-1}\Bigg) \leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty} j^{-\alpha-2}k^{-\beta-2}\left(\sum_{i=j}^{\infty}\sum_{s=k}^{\infty} a_{is}\right)^r.$$

С другой стороны, при $x\in[1/m_l, 1/m_{l-1})$, $y\in[1/m_q, 1/m_{q-1})$ и $j\in[m_{l-1}, 2m_{l-1})$, $k\in[m_{q-1}, 2m_{q-1})$ верно равенство

$$-\operatorname{Im}\Big(\big(1-\chi_j(x)\big)\big(1-\chi_k(y)\big)\Big) =$$
$$= \left(1-\cos\left(\frac{2\pi x_l}{p_l}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi y_q}{p_q}\right) + \left(1-\cos\left(\frac{2\pi y_q}{p_q}\right)\right)\sin\left(\frac{2\pi x_l}{p_l}\right). \quad (10)$$

При $p_l, p_q \geqslant 3$ мы видим, что левая часть (10) не меньше $4\sin^2(\pi/N)\sin(2\pi/N)$, где $2 \leqslant p_i \leqslant N$, $i \in \mathbb{N}$. При $p_l = 2$ или $p_q = 2$ имеем $1-\chi_j(x) = 2$ или $1-\chi_k(x) = 2$ соответственно, и

$$\operatorname{Re}\Big(\big(1-\chi_j(x)\big)\big(1-\chi_k(y)\big)\Big) \geqslant 4\sin^2\left(\frac{\pi}{N}\right),$$

если ровно одно из равенств $p_l = 2$ или $p_q = 2$ имеет место. Если же $p_l = p_q = 2$, то $\big(1-\chi_j(x)\big)\big(1-\chi_k(y)\big) = 4$. В итоге мы получаем

$$\int_0^1\int_0^1 |f_d(x,y)|^r x^\alpha y^\beta\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant C_3\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty}\int_{1/m_l}^{1/m_{l-1}}\int_{1/m_q}^{1/m_{q-1}}\left(\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1}\sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk}\right)^r m_l^{-\alpha}m_q^{-\beta}\,dx\,dy \geqslant$$

$$\geqslant C_4\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1}m_q^{-\beta-1}\left(\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1}\sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk}\right)^r. \quad (11)$$

Согласно (8)

$$\sum_{j=m_{l-1}}^{2m_{l-1}-1}\sum_{k=m_{q-1}}^{2m_{q-1}-1} a_{jk} \geqslant C_5 \sum_{j=m_{l-1}}^{m_l-1}\sum_{k=m_{q-1}}^{m_q-1} a_{jk} =: b_{l,q}. \tag{12}$$

Пусть

$$B_{lq} = \sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} b_{jk}.$$

Тогда, применяя дважды второе утверждение леммы 7, получаем, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} B_{lq}^r \leqslant$$

$$\leqslant r^r \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-(\alpha+1)(1-r)} \left(\sum_{i=1}^{l} m_i^{-\alpha-1}\right)^r m_q^{-(\beta+1)} \left(\sum_{k=q}^{\infty} b_{lk}\right)^r \leqslant$$

$$\leqslant C_6 \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} b_{lq}^r. \tag{13}$$

Наконец, аналогично тому, как это сделано при доказательстве теоремы 2, показывается, что

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} m_l^{-\alpha-1} m_q^{-\beta-1} B_{lq}^r \geqslant C_7 \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1} j^{-\alpha-2} k^{-\beta-2} \left(\sum_{i=j}^{\infty}\sum_{s=k} a_{is}\right)^r. \tag{14}$$

Из неравенств (11)—(14) вытекает оценка снизу $\|f_d\|_{r,\alpha,\beta}^r$. Теорема доказана. □

Следствие. *Если r, $\{a_{jk}\}_{j,k=1}^{\infty}$ те же, что в теореме 4, $\alpha, \beta < r-1$, $f(x,y)$ — сумма ряда (4), то $R(x,y) := \big(f(x,y) - f(x,0) - f(0,y) + f(0,0)\big)/(xy)$ принадлежит $L_{\alpha,\beta}^r[0,1)^2$ в том и только в том случае, когда*

$$\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{q=1}^{\infty} l^{r-\alpha-2} q^{r-\beta-2} \left(\sum_{j=l}^{\infty}\sum_{k=q}^{\infty} a_{jk}\right)^r < \infty.$$

4. Одномерные аналоги двумерных результатов

В этом разделе представлены одномерные аналоги теорем 1—4. Их доказательства могут быть проведены по аналогии с доказательствами из предыдущего раздела с использованием первых частей лемм 3, 4 и 6.

Теорема 1′. *Пусть $-1 < \alpha < r-1$, $r \geqslant 1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$ и*

$$S_{r,\alpha}(a) := \left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j^r (j+1)^{r-2-\alpha}\right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда

$$M^*(x) := \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{j=0}^{n-1} a_j \chi_j(x) \right|$$

принадлежит $L^r_\alpha[0,1)$ *и при этом* $\|M^*\|_{r,\alpha} \leqslant CS_{r,\alpha}(a)$.

Теорема 2′. *Пусть* $-1 < \alpha < r-1$, $r > 1$, $\{a_k\}_{k=0}^{\infty} \in \mathrm{GM}$ *и*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} < \infty.$$

Если сумма $f(x)$ *ряда* (2) *принадлежит* $L^r_\alpha[0,1)$, *то* $S_{r,\alpha}(a) \leqslant C\|f\|_{r,\alpha} < \infty$.

Теорема 3′. *Пусть* $-1 < \alpha < 2r-1$, $r \geqslant 1$, $\Delta^2 a_k \geqslant 0$, $k \in \mathbb{N}$, $\lim\limits_{k\to+\infty} a_k = 0$ *и*

$$Q_{r,\alpha}(a) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} (i+1)^{3r-2-\alpha} (\Delta^2 a_i)^r \right)^{1/r} < \infty.$$

Тогда сумма $f(x)$ *ряда* (2) *принадлежит* $L^r_\alpha[0,1)$ *и* $\|f\|_{r,\alpha} \leqslant CQ_{r,\alpha}(a)$.

Теорема 4′. *Пусть* $a_i \geqslant 0$, $i \in \mathbb{N}$, $\alpha < -1$, $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i < \infty$ *и* $f_d(x)$ *равна сумме ряда* $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i\big(1-\chi_i(x)\big)$. *Тогда*

$$\|f_d\|_{r,\alpha} \asymp \left(\sum_{n=1}^{\infty} n^{-\alpha-2} \left(\sum_{k=n}^{\infty} a_k \right)^r \right)^{1/r}.$$

Замечание. Теоремы 1′ и 2′ обобщают результаты из [11], теорема 4′ является мультипликативным аналогом теоремы 6.7 из [7]. Теорема 3′ близка по своему содержанию к оценке сверху в теореме из [14], однако в [14] оценка для ряда по косинусам получена в терминах первых разностей выпуклых коэффициентов.

Литература

[1] Агаев Г. Н., Виленкин Н. Я., Джафарли Г. М., Рубинштейн А. И. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. — Баку: Элм, 1981.

[2] Бокаев Н. А., Муканов Ж. Б. Весовая интегрируемость двойных тригонометрических рядов и двойных рядов по мультипликативным системам с коэффициентами класса $R_0^+ BVS^2$ // Мат. заметки. — 2012. — Т. 91, № 4. — С. 617—620.

[3] Волосивец С. С. О некоторых условиях в теории рядов по мультипликативным системам // Anal. Math. — 2007. — Vol. 33, no. 3. — P. 227—246.

[4] Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. О свойствах сумм тригонометрических рядов с монотонными коэффициентами // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. — 1994. — № 3. — С. 22—31.

[5] Вуколова Т. М., Дьяченко М. И. Оценки норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1994. — № 7. — С. 20—28.

[6] Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения. — М.: Наука, 1987.

[7] Конюшков А. А. Наилучшее приближение тригонометрическими полиномами и коэффициенты Фурье // Мат. сб. — 1958. — Т. 44, № 1. — С. 53—84.

[8] Тиман М. Ф., Рубинштейн А. И. О вложении классов функций, определённых на нуль-мерных группах // Изв. высш. учебн. завед. Математика. — 1980. — № 6. — С. 66—76.

[9] Тихонов С. Ю. Об интегрируемости тригонометрических рядов // Мат. заметки. — 2005. — Т. 78, № 3. — С. 476—480.

[10] Харди Г., Литтлвуд Дж., Полиа Г. Неравенства. — М.: Изд. иностр. лит., 1948.

[11] Askey R., Wainger S. Integrability theorems for Fourier series // Duke Math. J. — 1966. — Vol. 33, no. 2. — P. 223—228.

[12] Boas R. P. Integrability Theorems for Trigonometric Transforms. — Berlin: Springer, 1967.

[13] Chen C. P., Chen M. C. Weighted integrability of double cosine series with nonnegative coefficients // Stud. Math. — 2003. — Vol. 156, no. 3. — P. 133—141.

[14] Dyachenko M., Tikhonov S. A Hardy—Littlewood theorem for multiple series // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — Vol. 339, no. 1. — P. 303—310.

[15] Dyachenko M., Tikhonov S. Integrability and continuity of functions represented by trigonometric series: coefficients criteria // Stud. Math. — 2009. — Vol. 193, no. 3. — P. 285—306.

[16] Iofina T. V., Volosivets S. S. On the degree of approximation by means of Fourier—Vilenkin series in Hölder and L^p norm // East J. Approx. — 2009. — Vol. 15, no. 2. — P. 143—158.

[17] Leindler L. Generalization of inequalities of Hardy and Littlewood // Acta Sci. Math. (Szeged). — 1970. — Vol. 31, no. 1-2. — P. 279—285.

[18] Leindler L. Inequalities of Hardy—Littlewood type // Anal. Math. — 1976. — Vol. 2, no. 2. — P. 117—123.

[19] Leindler L. A new class of numerical sequences and its application to sine and cosine series // Anal. Math. — 2002. — Vol. 28, no. 4. — P. 279—286.

[20] Moricz F. On Walsh series with coefficients tending monotonically to zero // Acta Math. Hungar. — 1983. — Vol. 38, no. 1-4. — P. 183—189.

[21] Moricz F. On double cosine, sine and Walsh series with monotone coefficients // Proc. Am. Math. Soc. — 1990. — Vol. 109, no. 2. — P. 417—425.

[22] Moricz F., Schipp F., Wade W. R. On the integrability of double Walsh series with special coefficients // Michigan Math. J. — 1990. — Vol. 37, no. 2. — P. 191—201.

[23] Tikhonov S. Trigonometric series with general monotone coefficients // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — Vol. 326, no. 1. — P. 721—735.

[24] Volosivets S. S., Fadeev R. N. Estimates of best approximations in integral metrics and Fourier coefficients with respect to multiplicative systems // Anal. Math. — 2011. — Vol. 37, no. 3. — P. 215—238.