# О корректности задач аппроксимации и оптимизации для слабо выпуклых множеств и функций*

**Г. Е. ИВАНОВ**
*Московский физико-технический институт*
(*государственный университет*)
e-mail: g.e.ivanov@mail.ru

**М. С. ЛОПУШАНСКИ**
*Московский физико-технический институт*
(*государственный университет*)
e-mail: masha.alexandra@gmail.com

УДК 517.982.252

**Ключевые слова:** слабо выпуклые множества и функции, квазишар, метрическая проекция, инфимальная конволюция.

**Аннотация**

Рассматривается класс слабо выпуклых множеств относительно квазишара в банаховом пространстве, обобщающий классы множеств положительной достижимости, проксимально гладких множеств и прокс-регулярных множеств. Доказана корректность задачи о ближайших точках двух множеств, одно из которых слабо выпукло относительно квазишара $M$, а другое является слагаемым квазишара $-rM$ при $r \in (0,1)$. Доказано, что если квазишар $B$ является слагаемым квазишара $M$, то множество, слабо выпуклое относительно квазишара $M$, является слабо выпуклым и относительно квазишара $B$. Рассматривается класс слабо выпуклых функций относительно заданной выпуклой непрерывной функции $\gamma$, состоящий из функций, надграфики которых являются слабо выпуклыми множествами относительно надграфика функции $\gamma$. Получены достаточные условия корректности задачи инфимальной конволюции, а также достаточные условия того, что точка минимума этой задачи существует, единственна и непрерывно зависит от параметров.

**Abstract**

*G. E. Ivanov, M. S. Lopushanski, Well-posedness of approximation and optimization problems for weakly convex sets and functions*, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 18 (2013), no. 5, pp. 89—118.

We consider the class of weakly convex sets with respect to a quasiball in a Banach space. This class generalizes the classes of sets with positive reach, proximal smooth sets and prox-regular sets. We prove the well-posedness of the closest points problem of two sets, one of which is weakly convex with respect to a quasiball $M$, and the other one is a summand of the quasiball $-rM$, where $r \in (0,1)$. We show that if a quasiball $B$ is a summand of a quasiball $M$, then a set that is weakly convex with respect to the

*Работа поддержана РФФИ, проект 13-01-00295-а.

*Фундаментальная и прикладная математика*, 2013, том 18, № 5, с. 89—118.
© 2013 *Центр новых информационных технологий МГУ,*
*Издательский дом «Открытые системы»*

quasiball $M$ is also weakly convex with respect to the quasiball $B$. We consider the class of weakly convex functions with respect to a given convex continuous function $\gamma$ that consists of functions whose epigraphs are weakly convex sets with respect to the epigraph of $\gamma$. We obtain a sufficient condition for the well-posedness of the infimal convolution problem, and also a sufficient condition for the existence, uniqueness, and continuous dependence on parameters of the minimizer.

# 1. Обозначения

Пусть $E$ — вещественное линейное нормированное пространство. Через $\operatorname{int} A$, $\partial A$ и $\bar{A}$ будем обозначать соответственно внутренность, границу и замыкание множества $A \subset E$. Значение функционала $p \in E^*$ на векторе $x \in E$ будем обозначать $\langle p, x\rangle$. *Шаром* радиуса $r \geqslant 0$ с центром в точке $a$ называется множество

$$\mathfrak{B}_r(a) = \{x \in E\colon \|x - a\| \leqslant r\}.$$

*Квазишаром* $M$ в банаховом пространстве $E$ называется выпуклое замкнутое множество $M \subset E$, для которого $0 \in \operatorname{int} M$.

**Замечание 1.1.** Квазишар $M$ является шаром относительно некоторой нормы, эквивалентной исходной норме пространства $E$, тогда и только тогда, когда он ограничен относительно исходной нормы $E$ и симметричен, т. е. $-M = M$.

*Функцией Минковского* квазишара $M$ называется функция

$$\mu_M\colon E \to [0; +\infty),$$

такая что

$$\mu_M(x) = \inf\{t > 0 \mid x \in tM\} \quad \text{для любого} \quad x \in E.$$

Функция $\mu\colon E \to \mathbb{R}$ называется *сублинейной*, если она *положительно однородна*, т. е.

$$\mu(\lambda x) = \lambda\mu(x) \quad \text{для всех} \quad x \in E \quad \text{и} \quad \lambda \geqslant 0,$$

и *субаддитивна*, т. е.

$$\mu(x + y) \leqslant \mu(x) + \mu(y) \quad \text{для любых} \quad x, y \in E.$$

Сублинейная неотрицательная функция называется *несимметричной полунормой*.

**Замечание 1.2.** Непрерывная функция $\mu\colon E \to [0; +\infty)$ является несимметричной полунормой тогда и только тогда, когда она является функцией Минковского некоторого квазишара.

Пусть $M \subset E$ — квазишар. *$M$-расстоянием* от множества $C \subset E$ до множества $A \subset E$ называется величина

$$\varrho_M(C, A) = \inf_{c \in C,\ a \in A} \mu_M(c - a).$$

В частности, $M$-расстояние от точки $x \in E$ до множества $A \subset E$ определяется формулой

$$\varrho_M(x, A) = \inf_{a \in A} \mu_M(x - a).$$

Если $M = \mathfrak{B}_1(0)$, то $\varrho_M(C, A)$ совпадает с обычным (кратчайшим) расстоянием между множествами $A$ и $C$, а $\varrho_M(x, A)$ — с обычным расстоянием от точки $x$ до множества $A$:

$$\varrho_{\mathfrak{B}_1(0)}(C, A) = \varrho(C, A) = \inf_{a \in A,\ c \in C} \|a - c\|, \quad \varrho_{\mathfrak{B}_1(0)}(x, A) = \varrho(x, A) = \inf_{a \in A} \|x - a\|.$$

**Замечание 1.3.** Функция Минковского квазишара $M$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/\varrho(0, \partial M)$.

**Замечание 1.4.** Из замечания 1.3 следует, что для любого множества $A \subset E$ функция $\varrho_M(\cdot, A)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $1/\varrho(0, \partial M)$.

**Замечание 1.5.** Так как для любого квазишара $M \subset E$ и любого вектора $x \in E$ справедливо равенство $\mu_{-M}(x) = \mu_M(-x)$, то для любых множеств $A, C \subset E$ имеем $\varrho_M(C, A) = \varrho_{-M}(A, C)$.

*Суммой Минковского* множеств $A \subset E$ и $B \subset E$ называется множество

$$A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}.$$

**Замечание 1.6.** Непосредственно из определений следует, что

$$\varrho_M(C, A) = \inf\{t > 0 \mid (A + tM) \cap C \neq \varnothing\}.$$

Пусть $M \subset E$ — квазишар. Множеством *наилучших* относительно несимметричной полунормы $\mu_M(\cdot)$ *приближений* точки $x \in E$ элементами множества $A \subset E$ или, что то же самое, *$M$-проекцией* точки $x$ на множество $A$ называется множество

$$P_M(x, A) = A \cap (x - \varrho_M(x, A)M).$$

Для произвольных множеств $A, C \subset E$ и числа $\varepsilon \geqslant 0$ определим

$$P_M^\varepsilon(C, A) = A \cap (-(\varrho_M(C, A) + \varepsilon)M + C). \tag{1.1}$$

В частности, множество

$$P_M^\varepsilon(x, A) = A \cap (x - (\varrho_M(x, A) + \varepsilon)M)$$

называется *$\varepsilon$-проекцией* точки $x \in E$ на множество $A \subset E$ относительно квазишара $M$; $\varepsilon$-проекция точки $x$ также называется *почти наилучшим приближением* $x$.

**Замечание 1.7.** Если $\varrho_M(x, A) + \varepsilon > 0$, то

$$P_M^\varepsilon(x, A) = \{a \in A \mid \mu_M(x - a) \leqslant \varrho_M(x, A) + \varepsilon\}.$$

*Обратным модулем выпуклости* множества $M \subset E$ называется функция

$$\beta_M(t) = \sup\left\{\|a - b\| \;\middle|\; a, b \in M,\ \varrho\left(\frac{a + b}{2}, \partial M\right) < t\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{1.2}$$

В случае $M = \mathfrak{B}_1(0)$ функция $\beta_M(\cdot)$ является обратной к модулю выпуклости пространства $E$, введённому Дж. Кларксоном [12].

Множество $M \subset E$ называется *равномерно выпуклым*, если оно выпукло и $\lim\limits_{t \to +0} \beta_M(t) = 0$.

Используя определение предела и равенство (1.2), получаем, что множество $M \subset E$ равномерно выпукло тогда и только тогда, когда оно выпукло и для любого числа $\varepsilon > 0$ существует число $\delta > 0$, такое что для любых точек $a, b \in M$ из неравенства $\varrho\big((a+b)/2, \partial M\big) < \delta$ следует неравенство $\|a - b\| < \varepsilon$.

**Предложение 1.1 [6,8].** *Если множество $M$ в банаховом пространстве равномерно выпуклое, то оно ограниченное.*

Аналогом обратного модуля выпуклости для неограниченного множества является величина

$$\beta_M(t, R) = \sup\left\{\|a - b\| \;\Big|\; a, b \in M \cap \mathfrak{B}_R(0),\ \varrho\left(\frac{a+b}{2}, \partial M\right) < t\right\}, \quad t \geqslant 0. \tag{1.3}$$

Отметим, что $\beta_M(t, R)$ возрастает по $t$.

Множество $M \subset E$ называется *ограниченно равномерно выпуклым*, если оно выпукло и $\lim\limits_{t \to +0} \beta_M(t, R) = 0$ для любого $R > 0$.

Множество $M \subset E$ называется *параболичным*, если для любого вектора $b \in E$ множество $(b + (1/2)M) \setminus M$ ограниченно.

Из [18, лемма 5.1] вытекает следующий результат.

**Предложение 1.1.** *Пусть множество $M \subset E$ выпуклое и параболичное, $0 < \lambda_1 < \lambda_2$, $x_1, x_2 \in E$. Тогда множество $(\lambda_1 M + x_1) \setminus (\lambda_2 \operatorname{int} M + x_2)$ ограниченное.*

Пусть задана функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Рассмотрим задачу

$$\min_{x \in E} f(x). \tag{1.4}$$

Последовательность $\{x_k\} \subset X$ называется *минимизирующей*, если

$$\lim_{k \to \infty} f(x_k) = \inf_{x \in E} f(x).$$

**Определение 1.1.** Задача (1.4) называется *корректной*, если любая минимизирующая последовательность сходится к точке минимума этой задачи.

**Замечание 1.8.** Если задача (1.4) корректна, то точка минимума этой задачи единственна.

## 2. Слабо выпуклые множества

Г. Федерер [14] ввёл понятие *множества положительной достижимости*, т. е. такого множества $A \subset \mathbb{R}^n$, что $\operatorname{reach}(A) > 0$, где

$$\operatorname{reach}(A) = \sup\{r > 0 \mid \text{для всех } x \in E, \text{ таких что } 0 < \varrho(x, A) < r, \\ P(x, A) \text{ состоит из одного элемента}\}.$$

Такие множества также называются *множествами с чебышёвским слоем* [1].

В [11] было введено понятие *проксимально гладкого множества* как обобщение понятия множества положительной достижимости на гильбертово пространство. В [9, 10] исследовались *равномерно $r$-прокс-регулярные множества* в банаховом пространстве $E$, т. е. такие множества $A \subset E$, что

$$P(a + rz, A) = \{a\} \text{ для всех } a \in A \text{ и всех } z \in N(a, A), \text{ таких что } \|z\| < 1,$$

где

$$N(a, A) = \{z \in E \mid \text{найдётся } t > 0, \text{ такое что } a \in P(a + tz, A)\} —$$

конус проксимальных нормалей ко множеству $A$ в точке $a$. В [22] было показано, что в гильбертовом пространстве класс проксимально гладких множеств совпадает с классом равномерно прокс-регулярных множеств. В [2] рассматривались свойства проксимально гладких множеств в банаховом пространстве и была установлена взаимосвязь этого класса и других близких классов множеств.

Множеством единичных *проксимальных нормалей* ко множеству $A \subset E$ в точке $a \in A$ относительно квазишара $M \subset E$ называется множество

$$N_M^1(a, A) = \{z \in \partial M \mid \text{найдётся } t > 0, \text{ такое что } a \in P_M(a + tz, A)\}. \qquad (2.1)$$

Заметим, что если для точки $a \in A$ множество $N_M^1(a, A)$ не пусто, то $a \in \partial A$; обратное, вообще говоря, неверно.

Множество $A \subset E$ называется *слабо выпуклым относительно квазишара* $M \subset E$, если

$$a \in P_M(a + z, A) \text{ для всех } a \in A \text{ и } z \in N_M^1(a, A).$$

**Замечание 2.1.** Для любых векторов $z \in \partial M$, $a \in A$ включение $a \in P_M(a + z, A)$, неравенство $\varrho_M(a + z, A) \geqslant 1$, равенство $\varrho_M(a + z, A) = 1$ и соотношение $(a + z - \operatorname{int} M) \cap A = \varnothing$ эквивалентны (рис. 1).

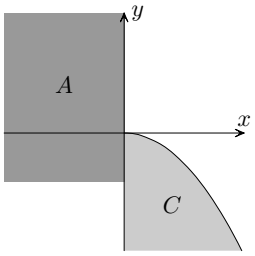


Рис. 1

**Замечание 2.2.** Любое выпуклое множество в нормированном пространстве $E$ является слабо выпуклым относительно любого квазишара в $E$.

В случае $M = \mathfrak{B}_r(0)$, $r > 0$, класс множеств, слабо выпуклых относительно $M$, совпадает с классом равномерно $r$-прокс-регулярных множеств.

В [13, 16, 17] рассматривался класс слабо выпуклых множеств относительно ограниченного, но не симметричного квазишара.

Из [19, теорема 2.5] вытекает следующее утверждение.

**Предложение 2.1.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый, множество $A \subset E$ замкнутое. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) *множество $A$ слабо выпуклое относительно $M$*;
2) *для любой точки $x_0 \in E$, такой что $0 < \varrho_M(x_0, A) < 1$, задача*
$$\min_{a \in A} \mu_M(x_0 - a)$$
*корректна*;
3) *отображение $x \mapsto P_M(x, A)$ однозначно и непрерывно на множестве $\{x \in E \mid 0 < \varrho_M(x, A) < 1\}$.*

**Предложение 2.1 [19, лемма 5.4].** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый, множество $A \subset E$ замкнутое и слабо выпуклое относительно $M$. Пусть существует точка $x_0 \in E$, такая что $\varrho_M(x_0, A) > 0$. Тогда $A + \operatorname{int} M \neq E$.*

**Лемма 2.1.** *Пусть строго выпуклый квазишар $M \subset E$, векторы $x, y \in E$ и число $R > 0$ удовлетворяют неравенствам*
$$0 < \|x\| \leqslant R \cdot \mu_M(x), \quad 0 < \|y\| \leqslant R \cdot \mu_M(y).$$
*Тогда*
$$\left\| \frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)} \right\| \leqslant \beta_M \left( \frac{R \cdot (\mu_M(x) + \mu_M(y) - \mu_M(x+y))}{\min\{\mu_M(x), \mu_M(y)\}}, R \right),$$
*где функция $\beta_M(\cdot, \cdot)$ определена формулой* (1.3).

**Доказательство.** Обозначим
$$a = \frac{x}{\mu_M(x)}, \quad b = \frac{y}{\mu_M(y)}, \quad c = \frac{a+b}{2}, \quad \mu_1 = \mu_M(x), \quad \mu_2 = \mu_M(y),$$
$$t = \frac{R \cdot (\mu_M(x) + \mu_M(y) - \mu_M(x+y))}{\min\{\mu_M(x), \mu_M(y)\}}.$$
Без потери общности будем считать, что $\mu_2 \leqslant \mu_1$. Используя сублинейность функции $\mu_M$ и учитывая, что $\mu_M(a) = 1$, имеем
$$\mu_M(x+y) = \mu_M\big((\mu_1 - \mu_2)a + \mu_2(a+b)\big) \leqslant$$
$$\leqslant (\mu_1 - \mu_2) \cdot \mu_M(a) + \mu_2 \cdot \mu_M(a+b) = \mu_1 + \mu_2 - 2\mu_2 \cdot \big(1 - \mu_M(c)\big).$$
Следовательно,
$$\mu_M(c) \geqslant 1 - \frac{t}{2R}. \tag{2.2}$$
Покажем, что
$$\varrho(c, \partial M) < t. \tag{2.3}$$

Если $t > R$, то, используя включения $a, b \in \partial M \cap \mathfrak{B}_R(0)$, имеем

$$\varrho(c, \partial M) \leqslant \|c - a\| = \frac{\|a - b\|}{2} \leqslant R < t.$$

Поэтому в данном случае неравенство (2.3) справедливо.

Пусть теперь $t \leqslant R$. Тогда из неравенства (2.2) следует, что

$$\mu_M(c) \geqslant \frac{1}{1 + t/R},$$

а значит,

$$\left(1 + \frac{t}{R}\right) c \notin \operatorname{int} M.$$

Поэтому

$$\varrho(c, \partial M) \leqslant \left\| \left(1 + \frac{t}{R}\right) c - c \right\| = \frac{\|c\| t}{R} < t.$$

Таким образом, неравенство (2.3) доказано.

Из неравенства (2.3) и включений $a, b \in M \cap \mathfrak{B}_R(0)$ согласно равенству (1.3) получаем неравенство $\|a - b\| \leqslant \beta_M(t, R)$. □

**Лемма 2.2.** *Пусть множество $A \subset E$ слабо выпукло относительно строго выпуклого квазишара $M \subset E$, точка $x_0 \in E$ и число $\varepsilon > 0$ таковы, что $0 < \varrho_M(x_0, A) = \varrho < 1 - \varepsilon$. Пусть $a_0 \in P_M(x_0, A)$, $a \in P_M^{\varepsilon}(x_0, A)$ и*

$$R = \max\left\{ \frac{\|x_0 - a_0\|}{\mu_M(x_0 - a_0)}, \frac{\|x_0 - a\|}{\mu_M(x_0 - a)} \right\}.$$

*Тогда*

$$\|a - a_0\| \leqslant \varepsilon R + \varrho \beta_M\left( \frac{\varepsilon R}{\min\{\varrho, 1 - \varrho\}}, R \right).$$

**Доказательство.** Обозначим

$$z = \frac{x_0 - a_0}{\varrho}, \quad x = x_0 - a, \quad y = (1 - \varrho) z.$$

Так как множество $A$ слабо выпукло относительно квазишара $M$ и $z \in N_M^1(a_0, A)$, то $\varrho_M(a_0 + z, A) = 1$. Таким образом,

$$\varrho \leqslant \mu_M(x) \leqslant \varrho + \varepsilon,$$

$$\mu_M(x + y) = \mu_M(a_0 + z - a) \geqslant \varrho_M(a_0 + z, A) = 1 \geqslant \mu_M(x) + \mu_M(y) - \varepsilon.$$

Поэтому согласно лемме 2.1 имеем

$$\left\| \frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{y}{\mu_M(y)} \right\| \leqslant \beta_M\left( \frac{\varepsilon R}{\min\{\varrho, 1 - \varrho\}}, R \right).$$

Используя соотношения

$$\left\| \frac{x}{\mu_M(x)} - \frac{x}{\varrho} \right\| = \frac{\|x\|}{\mu_M(x)} \frac{|\mu_M(x) - \varrho|}{\varrho} \leqslant \frac{\varepsilon R}{\varrho}, \quad \left\| \frac{y}{\mu_M(y)} - \frac{x}{\varrho} \right\| = \frac{\|a - a_0\|}{\varrho},$$

получаем доказываемое неравенство. □

## 3. Слагаемые квазишара

Множество $C \subset E$ называется *слагаемым квазишара* $M \subset E$, если $C$ выпукло, замкнуто и существует множество $C_1 \subset E$, такое что $C + C_1 = M$.

**Лемма 3.1.** *Пусть множество $C \subset E$ является слагаемым строго выпуклого квазишара $M \subset E$. Тогда*

$$C - c_0 \subset M - z \quad \text{для всех} \quad c_0 \in C \quad \text{и} \quad z \in N^1_M(c_0, C).$$

**Доказательство.** Пусть $c_0 \in C$, $z \in N^1_M(c_0, C)$. В силу (2.1) существует число $t > 0$, такое что $c_0 \in P_M(c_0 + tz, C)$. Следовательно, $\varrho_M(c_0 + tz, C) = t$, а значит, $C \cap (c_0 + tz - t \operatorname{int} M) = \varnothing$. Согласно теореме об отделимости найдётся функционал $p \in E^* \setminus \{0\}$, такой что

$$\langle p, c\rangle \leqslant \langle p, c_0 + tz - tx\rangle \quad \text{для всех} \quad c \in C \quad \text{и} \quad x \in M.$$

Следовательно,

$$\langle p, z\rangle = \sup_{x \in M} \langle p, x\rangle, \quad \langle p, c_0\rangle = \sup_{c \in C} \langle p, c\rangle.$$

По условию леммы существует множество $C_1 \subset E$, такое что $C + C_1 = M$. Так как $z \in N^1_M(c_0, C) \subset M = C + C_1$, то найдутся точки $c_0' \in C$ и $c_1 \in C_1$, такие что $z = c_0' + c_1$. Поскольку $c_0 + c_1 \in C + C_1 = M$ и

$$\langle p, c_0 + c_1\rangle = \sup_{c \in C} \langle p, c\rangle + \langle p, c_1\rangle \geqslant \langle p, c_0' + c_1\rangle = \langle p, z\rangle = \sup_{x \in M} \langle p, x\rangle,$$

то в силу строгой выпуклости множества $M$ имеем $c_0 + c_1 = z$, т. е. $c_0 = c_0'$. Следовательно, $z - c_0 = c_1 \in C_1$. Таким образом, $z - c_0 + C \subset C_1 + C = M$, а значит, $C - c_0 \subset M - z$. □

**Лемма 3.2.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый, множество $A \subset E$ замкнутое и слабо выпуклое относительно $M$. Пусть $r \in (0, 1)$ и множество $C \subset E$ является слагаемым квазишара $-rM$, $1 - r > \varepsilon > 0$, $0 < \varrho_M(C, A) < 1 - r - \varepsilon$. Тогда множества $P^\varepsilon_M(C, A)$ и $P^\varepsilon_{-M}(A, C)$ (см. (1.1)) ограниченные.*

**Доказательство.** По предложению 2.1 найдётся точка $x_1 \in E \setminus (A + \operatorname{int} M)$. Поскольку множество $C$ является слагаемым квазишара $-rM$, то существует множество $C_1 \subset E$, такое что $C + C_1 = -rM$. Зафиксируем произвольную точку $c_1 \in C_1$. Тогда $C + c_1 \subset -rM$. Обозначим $\varrho_0 = \varrho_M(C, A)$. Используя равенство (1.1) и соотношения $x_1 \in E \setminus (A + \operatorname{int} M)$, $C + c_1 \subset -rM$, получаем включения

$$P^\varepsilon_M(C, A) \subset (-c_1 - (\varrho_0 + r + \varepsilon)M) \setminus (x_1 - \operatorname{int} M),$$
$$P^\varepsilon_{-M}(A, C) \subset (-c_1 - rM) \setminus (x_1 - (1 - \varrho_0 - \varepsilon) \operatorname{int} M).$$

Применяя предложение 1.1, получаем доказываемое утверждение. □

**Лемма 3.3.** *Пусть множество $C$ является слагаемым ограниченного квазишара $M \subset E$. Тогда существует множество $X \subset E$, такое что $C = \bigcap\limits_{x \in X} (M - x)$.*

**Доказательство.** По условию множество $C$ выпукло, замкнуто и существует множество $X$, такое что $C+X=M$. Обозначим $C'=\bigcap\limits_{x\in X}(M-x)$. Требуется доказать равенство $C'=C$. Пусть $c\in C$, $x\in X$. Тогда $c+x\in C+X=M$, а значит, $c\in M-x$ для любого $x\in X$. Следовательно, $c\in C'$, и включение $C\subset C'$ доказано. Докажем обратное включение. Предположим противное: найдётся точка $c_0\in C'\setminus C$. По теореме об отделимости найдётся функционал $p\in E^*$, такой что

$$\langle p,c_0\rangle>\sup_{c\in C}\langle p,c\rangle. \tag{3.1}$$

Поскольку $c_0\in C'$, то $c_0+X\subset M=C+X$. Следовательно,

$$\langle p,c_0\rangle+\sup_{x\in X}\langle p,x\rangle\leqslant\sup_{c\in C}\langle p,c\rangle+\sup_{x\in X}\langle p,x\rangle. \tag{3.2}$$

В силу ограниченности квазишара $M$ и включения $c_0+X\subset M$ имеем $\sup\limits_{x\in X}\langle p,x\rangle<+\infty$. Поэтому неравенство (3.2) противоречит неравенству (3.1). □

**Замечание 3.1.** В общем случае множество вида $C=\bigcap\limits_{x\in X}(M-x)$ может не быть слагаемым квазишара $M$. Если любое множество $C$ такого вида является слагаемым выпуклого замкнутого множества $M$, то множество $M$ называется порождающим [7]. Известно, что любое выпуклое замкнутое множество в двумерном пространстве является порождающим. Шар в гильбертовом пространстве также является порождающим. Шар в пространстве $L_p[a,b]$ при $p\in[1,2)\cup(2,+\infty)$ порождающим не является. В [4] получен критерий того, что гладкое выпуклое множество является порождающим.

**Лемма 3.4.** *Если множество $C$ является слагаемым равномерно выпуклого квазишара $M$ в банаховом пространстве $E$, то обратные модули выпуклости множеств $C$ и $M$ связаны неравенством*

$$\beta_C(t)\leqslant\beta_M(t)\quad\text{для любого}\quad t>0.$$

**Доказательство.** Согласно предложению 1.1 квазишар $M$ ограниченный. Отсюда и из леммы 3.3 следует существование множества $X\subset E$, такого что $C=\bigcap\limits_{x\in X}(M-x)$. Предположим, что доказываемое утверждение неверно, т. е. существует число $t>0$, такое что $\beta_C(t)>\beta_M(t)$. Тогда в силу равенства (1.2) существуют точки $a,b\in C$, такие что $\varrho\big((a+b)/2,\partial C\big)<t$ и $\|a-b\|>\beta_M(t)$. В силу неравенства $\varrho\big((a+b)/2,\partial C\big)<t$ найдётся точка $z\in E\setminus C$, такая что $\|(a+b)/2-z\|<t$. Поскольку $z\notin C=\bigcap\limits_{x\in X}(M-x)$, то существует точка $x\in X$, такая что $z\notin M-x$. Обозначим $a'=a+x$, $b'=b+x$. Тогда $a',b'\in M$,

$$\varrho\left(\frac{a'+b'}{2},\partial M\right)\leqslant\left\|\frac{a'+b'}{2}-(z+x)\right\|=\left\|\frac{a+b}{2}-z\right\|<t.$$

Согласно равенству (1.2) имеем $\beta_M(t)\geqslant\|a'-b'\|=\|a-b\|$. Это противоречит неравенству $\|a-b\|>\beta_M(t)$. □

# 4. Корректность задачи о ближайших точках двух множеств

Пусть заданы квазишар $M \subset E$ и множества $A, C \subset E$. Рассмотрим задачу

$$\min_{a \in A,\ c \in C} \mu_M(c-a). \tag{4.1}$$

В соответствии с определением 1.1 задача (4.1) корректна, если любые две последовательности $\{a_k\} \subset A$ и $\{c_k\} \subset C$, такие что $\lim\limits_{k\to\infty} \mu_M(c_k - a_k) = \varrho_M(C, A)$, сходятся к некоторым точкам $\hat{a} \in A$ и $\hat{c} \in C$ соответственно. При этом в силу непрерывности функции Минковского имеем $\mu_M(\hat{c} - \hat{a}) = \varrho_M(C, A)$, т. е. пара точек $(\hat{a}, \hat{c})$ является решением задачи (4.1).

**Замечание 4.1.** Пусть $E$ — банахово пространство, $M \subset E$ — квазишар, множества $A \subset E$ и $C \subset E$ замкнуты. Следующие условия эквивалентны:

1) $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \operatorname{diam} P^{\varepsilon}_{M}(C, A) = 0$ и $\lim\limits_{\varepsilon\to+0} \operatorname{diam} P^{\varepsilon}_{-M}(A, C) = 0$;
2) задача (4.1) корректна.

**Теорема 4.1.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый. Пусть множество $A \subset E$ замкнутое и слабо выпуклое относительно квазишара $M$. Пусть множество $C \subset E$ является слагаемым квазишара $-rM$, где $0 < r < 1$. Пусть $0 < \varrho_M(C, A) < 1 - r$. Тогда задача* (4.1) *корректна.*

**Доказательство.** Обозначим

$$\varrho_0 = \varrho_M(C, A), \quad A_\varepsilon = P^{\varepsilon}_{M}(C, A), \quad C_\varepsilon = P^{\varepsilon}_{-M}(A, C).$$

Зафиксируем число $\varepsilon_0 \in (0, 1 - r - \varrho_0)$. По лемме 3.2 множества $A_{\varepsilon_0}$ и $C_{\varepsilon_0}$ ограниченные. Отсюда и из неравенств $\mu_M(c - a) \geqslant \varrho_0 > 0$, справедливых для любых $a \in A$, $c \in C$, получаем неравенство

$$R := \sup_{a \in A_{\varepsilon_0},\ c \in C_{\varepsilon_0}} \frac{\|c - a\|}{\mu_M(c - a)} < +\infty. \tag{4.2}$$

Зафиксируем произвольные число $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$ и точку $a_\varepsilon \in A_\varepsilon$. Поскольку множество $C$ выпуклое, то оно слабо выпуклое относительно квазишара $-M$. Отсюда и из предложения 2.1 следует существование точки $c_\varepsilon \in P_{-M}(a_\varepsilon, C)$. Поскольку вектор $z_\varepsilon = (c_\varepsilon - a_\varepsilon)/\mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon)$ удовлетворяет включению $z_\varepsilon \in -N^1_{-M}(c_\varepsilon, C)$, то по лемме 3.1

$$C - c_\varepsilon \subset r(z_\varepsilon - M). \tag{4.3}$$

Используя включение $a_\varepsilon \in A_\varepsilon$, имеем $\varrho_{-M}(a_\varepsilon, C) \leqslant \varrho_0 + \varepsilon$. Поэтому

$$\varrho_0 \leqslant \varrho_M(c_\varepsilon, A) \leqslant \mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon) = \mu_{-M}(a_\varepsilon - c_\varepsilon) = \varrho_{-M}(a_\varepsilon, C) \leqslant \varrho_0 + \varepsilon < 1 - r. \tag{4.4}$$

Согласно предложению 2.1 существует точка

$$a'_\varepsilon \in P_M(c_\varepsilon, A). \tag{4.5}$$

Тогда вектор $z'_\varepsilon = (c_\varepsilon - a'_\varepsilon)/\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon)$ удовлетворяет включению $z'_\varepsilon \in N^1_M(a'_\varepsilon, A)$. Так как множество $A$ слабо выпуклое относительно квазишара $M$, то

$$a'_\varepsilon \in P_M(a'_\varepsilon + z'_\varepsilon, A). \tag{4.6}$$

Согласно соотношениям (4.4) имеем $a_\varepsilon \in P^\varepsilon_M(c_\varepsilon, A)$. Из равенства (4.2) и включений $a_\varepsilon \in A_\varepsilon$, $a'_\varepsilon \in A_\varepsilon$, $c_\varepsilon \in C_\varepsilon$ следуют неравенства

$$\|z_\varepsilon\| \leqslant R, \quad \|z'_\varepsilon\| \leqslant R. \tag{4.7}$$

Используя лемму 2.2 и соотношения (4.4), (4.5), получаем

$$\|a_\varepsilon - a'_\varepsilon\| \leqslant \Delta(\varepsilon) := \varepsilon R + \beta_M\left(\frac{\varepsilon R}{\min\{\varrho_0, r\}}, R\right). \tag{4.8}$$

Поскольку

$$z_\varepsilon - z'_\varepsilon = \frac{c_\varepsilon - a_\varepsilon}{\mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon)} - \frac{c_\varepsilon - a'_\varepsilon}{\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon)} =$$
$$= \frac{a'_\varepsilon - a_\varepsilon}{\mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon)} + \left(\frac{1}{\mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon)} - \frac{1}{\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon)}\right)(c_\varepsilon - a'_\varepsilon),$$

то

$$\|z_\varepsilon - z'_\varepsilon\| \leqslant \frac{\|a_\varepsilon - a'_\varepsilon\|}{\varrho_0} + R\frac{|\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon) - \mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon)|}{\varrho_0}.$$

По замечанию 1.3 функция $\mu_M(\cdot)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой $L$. Поэтому

$$\|z_\varepsilon - z'_\varepsilon\| \leqslant \frac{\|a_\varepsilon - a'_\varepsilon\|}{\varrho_0}(1 + RL). \tag{4.9}$$

Поскольку

$$\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon) = \varrho_M(c_\varepsilon, A) \leqslant \mu_M(c_\varepsilon - a_\varepsilon) \leqslant \varrho_0 + \varepsilon < 1 - r$$

и

$$c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a'_\varepsilon = (\mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon) + r)z'_\varepsilon, \tag{4.10}$$

то $c_\varepsilon + rz'_\varepsilon \in [a'_\varepsilon, a'_\varepsilon + z'_\varepsilon]$. Отсюда и из включения (4.6) следует, что

$$a'_\varepsilon \in P_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon, A). \tag{4.11}$$

Обозначим

$$\Delta_1(\varepsilon) = \varepsilon + \frac{rL(1 + RL)}{\varrho_0}\Delta(\varepsilon). \tag{4.12}$$

Покажем, что

$$A_\varepsilon \subset P^{\Delta_1(\varepsilon)}_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon, A). \tag{4.13}$$

Действительно, пусть $a \in A_\varepsilon$. Используя включение (4.3), получаем, что

$$a \in C - (\varrho_0 + \varepsilon)M \subset c_\varepsilon + rz_\varepsilon - (r + \varrho_0 + \varepsilon)M,$$

т. е.

$$\mu_M(c_\varepsilon + rz_\varepsilon - a) \leqslant r + \varrho_0 + \varepsilon.$$

Поэтому согласно соотношениям (4.8), (4.9), (4.12) имеем

$$\mu_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a) \leqslant r + \varrho_0 + \varepsilon + r\mu_M(z'_\varepsilon - z_\varepsilon) \leqslant \\ \leqslant r + \varrho_0 + \varepsilon + rL\|z'_\varepsilon - z_\varepsilon\| \leqslant r + \varrho_0 + \Delta_1(\varepsilon). \quad (4.14)$$

Из соотношений (4.10), (4.11) следует, что

$$\varrho_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon, A) = \mu_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a'_\varepsilon) = \mu_M(c_\varepsilon - a'_\varepsilon) + r \geqslant \varrho_0 + r. \quad (4.15)$$

Комбинируя неравенства (4.14), (4.15), получаем неравенство

$$\mu_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a) \leqslant \varrho_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon, A) + \Delta_1(\varepsilon),$$

которое доказывает включение (4.13).

Из неравенств (4.7), (4.15), включений $a'_\varepsilon \in A_\varepsilon \subset A_{\varepsilon_0}$, $c_\varepsilon \in C_\varepsilon \subset C_{\varepsilon_0}$ и ограниченности множеств $A_{\varepsilon_0}$, $C_{\varepsilon_0}$ следует, что

$$\sup_{\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]} \sup_{a\in A_\varepsilon} \frac{\|c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a\|}{\mu_M(c_\varepsilon + rz'_\varepsilon - a)} < +\infty.$$

Отсюда согласно лемме 2.2 и соотношениям (4.11)—(4.15) получаем, что $\operatorname{diam} A_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. Поскольку множества $A_\varepsilon$ вложены друг в друга и замкнуты, то существует точка $\hat{a} \in \bigcap\limits_{\varepsilon>0} A_\varepsilon$. Покажем, что

$$C_\varepsilon \subset P_{-M}^{\varepsilon + L\operatorname{diam} A_\varepsilon}(\hat{a}, C) \quad \text{для любого} \quad \varepsilon \in (0, \varepsilon_0]. \quad (4.16)$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0]$, $c \in C_\varepsilon$. По предложению 2.1 существует точка $a \in P_M(c, A)$. Тогда

$$\varrho_{-M}(a, C) \leqslant \mu_{-M}(a - c) = \mu_M(c - a) = \varrho_M(c, A) \leqslant \varrho_0 + \varepsilon.$$

Следовательно, $a \in A_\varepsilon$ и

$$\mu_M(c-\hat{a}) \leqslant \mu_M(c-a)+\mu_M(a-\hat{a}) \leqslant \varrho_0+\varepsilon+L\operatorname{diam} A_\varepsilon \leqslant \varrho_{-M}(\hat{a}, C)+\varepsilon+L\operatorname{diam} A_\varepsilon.$$

Отсюда следует включение (4.16). Согласно включению (4.16) и лемме 2.2 получаем, что $\operatorname{diam} C_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to +0$. По замечанию 4.1 теорема доказана. □

Результат, близкий к теореме 4.1, был получен в [5].

Пусть задан квазишар $M \subset E$. Множество $A \subset E$ называется *$M$-замкнутым*, если для любой точки $x \in E \setminus A$ справедливо неравенство $\varrho_M(x, A) > 0$.

**Определение 4.1.** Множество $A \subset E$ называется *$M$-квазиограниченным*, если оно является $M$-замкнутым и

$$\sup_{a\in\partial A\cap\mathfrak{B}_R(0)} \sup_{z\in N_M^1(a,A)} \|z\| < +\infty \quad \text{для любого} \quad R > 0.$$

**Замечание 4.2.** Поскольку из $M$-замкнутости множества следует его замкнутость, то любое $M$-квазиограниченное множество является замкнутым.

**Замечание 4.3.** Если квазишар $M$ ограничен, то любое замкнутое множество является $M$-квазиограниченным.

**Лемма 4.1.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый. Пусть множество $A \subset E$ является $M$-квазиограниченным и слабо выпуклым относительно $M$. Пусть множество $C \subset E$ является слагаемым квазишара $-rM$, где $r \in (0,1)$. Пусть*

$$\inf_{a\in A,\ c\in C} \|a-c\| > 0. \tag{4.17}$$

*Тогда $\varrho_M(C,A) > 0$.*

**Доказательство.** Если $\varrho_M(C,A) \geqslant 1-r$, то требуемое неравенство доказано. Пусть $\varrho_M(C,A) < 1-r$. По определению $M$-расстояния существует последовательность $\{c_n\} \subset C$, такая что $\varrho_M(c_n,A) \to \varrho_M(C,A)$ при $n \to \infty$. Поскольку $\varrho_M(C,A) < 1-r$, то без ограничения общности считаем, что $\varrho_M(c_n,A) < 1-r$ для любого $n \in \mathbb{N}$. Из неравенства (4.17) и $M$-замкнутости $A$ следует, что $\varrho_M(c_n,A) > 0$. Тогда согласно предложению 2.1 для любого $n \in \mathbb{N}$ найдётся точка $a_n \in P_M(c_n,A)$. Из леммы 3.2 следует ограниченность последовательности $\{a_n\}$. Поэтому в силу $M$-квазиограниченности множества $A$ найдётся число $R_1 > 0$, такое что $\|c_n - a_n\| \leqslant R_1 \cdot \mu_M(c_n - a_n)$. Следовательно, согласно неравенству (4.17) имеем

$$\varrho_M(C,A) = \lim_{n\to\infty} \mu_M(c_n-a_n) \geqslant \frac{1}{R_1} \inf_{a\in A,\ c\in C} \|a-c\| > 0. \qquad \square$$

**Теорема 4.2.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишар $M$ параболичный и ограниченно равномерно выпуклый. Пусть множество $A \subset E$ является $M$-квазиограниченным и слабо выпуклым относительно $M$. Пусть множество $C \subset E$ является слагаемым квазишара $-rM$, где $r \in (0,1)$ и $\operatorname{int} C \neq \varnothing$. Пусть $\varrho_M(C,A) < 1-r$, $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$. Тогда задача* (4.1) *корректна.*

**Доказательство.** Если $\varrho_M(C,A) > 0$, то достаточно применить теорему 4.1. Поэтому будем предполагать, что $\varrho_M(C,A) = 0$. Без ограничения общности считаем, что $0 \in \operatorname{int} C$. Для любого $k \in \mathbb{N}$ рассмотрим множество

$$C_k = \left(1 - \frac{1}{k}\right) C. \tag{4.18}$$

Так как $C$ — слагаемое квазишара $-rM$, то найдётся точка $c_1 \in E$, такая что $C + c_1 \subset -rM$. Используя включение $0 \in \operatorname{int} M$, получаем, что существует число $r_1 > 0$, такое что $C \subset -r_1 M$. Отсюда и из равенства $C_k + (1/k)C = C$ следует включение

$$C \subset -\frac{r_1}{k} M + C_k \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.19}$$

Поскольку $\varrho_M(C,A) = 0$, то $(A + tM) \cap C \neq \varnothing$ для любого числа $t > 0$. Отсюда и из включения (4.19) следует, что

$$\left(A + \left(t + \frac{r_1}{k}\right) M\right) \cap C_k \neq \varnothing$$

для любого $t > 0$. Поэтому число $\varrho_k = \varrho_M(C_k, A)$ удовлетворяет неравенству

$$\varrho_k \leqslant \frac{r_1}{k} \quad \text{для любого} \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.20}$$

Следовательно, существует индекс $k_0 \in \mathbb{N}$, такой что

$$\varrho_k < 1 - r \quad \text{для любого} \quad k \geqslant k_0. \tag{4.21}$$

Поскольку $C_k + (1/k)\operatorname{int} C = \operatorname{int} C$ и $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$, то

$$A \cap \left( C_k + \frac{1}{k} \operatorname{int} C \right) = \varnothing.$$

Следовательно,

$$\inf_{a \in A,\ c \in C_k} \|a - c\| > 0.$$

Поэтому согласно лемме 4.1 для любого $k \in \mathbb{N}$ имеем $\varrho_k > 0$. Таким образом, используя соотношение (4.21), по теореме 4.1 для любого $k \geqslant k_0$ получаем, что существуют точки $a_k \in A$, $c_k \in C_k$, такие что $\mu_M(c_k - a_k) = \varrho_k$. Так как $a_k \in P_M(c_k, A)$, то векторы

$$z_k = \frac{c_k - a_k}{\mu_M(c_k - a_k)}$$

удовлетворяют включениям $z_k \in N_M^1(a_k, A)$ для любого $k \geqslant k_0$. Согласно лемме 3.2 последовательность $\{a_k\}$ ограниченная. Поэтому в силу $M$-квазиограниченности множества $A$ получаем ограниченность последовательности $\{z_k\}$. Поскольку $c_k \in P_{-M}(a_k, C_k)$, то $-z_k \in N_{-M}(c_k, C_k)$ при $k \geqslant k_0$. Так как множество $C_k$ — слагаемое квазишара $-(1 - 1/k)rM$, то в силу леммы 3.1 для любого $k \geqslant k_0$ справедливо включение

$$C_k - c_k \subset -\left(1 - \frac{1}{k}\right) r(M - z_k).$$

Используя равенства (4.18) и $c_k = a_k + \varrho_k z_k$, получаем

$$C \subset \frac{k}{k-1}(a_k + \varrho_k z_k) - rM + rz_k = a_k + rz_k + \frac{1}{k-1}(k\varrho_k z_k + a_k) - rM$$

при $k \geqslant k_0$. Полагая

$$\varepsilon_k = \frac{1}{k-1} \mu_{-M}(k\varrho_k z_k + a_k),$$

получаем включение

$$C \subset a_k + rz_k - (r + \varepsilon_k)M \quad \text{для любого} \quad k \geqslant k_0. \tag{4.22}$$

Из неравенств (4.20) и ограниченности последовательностей $\{a_k\}$, $\{z_k\}$ следует, что $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. Ввиду соотношений (1.1), (4.22) и равенств $\varrho_M(C, A) = 0$, $\varrho_M(a_k + rz_k < A) = r$ имеем

$$P_M^{\varepsilon}(C, A) = A \cap (C - \varepsilon M) \subset P_M^{\varepsilon + \varepsilon_k}(a_k + rz_k, A) \quad \text{для всех} \quad k \geqslant k_0 \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0.$$

Применяя лемму 2.2 и учитывая ограниченность последовательностей $\{a_k\}$ и $\{z_k\}$, получаем, что

$$\operatorname{diam} P_M^{\varepsilon}(C, A) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Повторяя рассуждения, проведённые в конце доказательства теоремы 4.1, получаем, что

$$\operatorname{diam} P_{-M}^{\varepsilon}(A, C) \to 0 \quad \text{при} \quad \varepsilon \to +0.$$

Согласно замечанию 4.1 теорема доказана. □

Следующий пример показывает существенность условия $M$-квазиограниченности множества $A$ в теореме 4.2. Рассмотрим в $E = \mathbb{R}^2$ множества

$$M = \{(x, y) \mid y \geqslant x^2 - 1\}, \quad A = \{(x, y) \mid x \leqslant 0,\ y \geqslant -1\},$$
$$C = \{(x, y) \mid x \geqslant 0,\ y \leqslant -2x^2\}.$$

Тогда при $r = 1/2$ выполнены все условия теоремы 4.2 за исключением $M$-квазиограниченности множества $A$. При этом $A \cap C$ является отрезком с концами $(0, 0)$ и $(0, -1)$. Следовательно, в данном примере решение задачи (4.1) не единственно, а значит, эта задача не корректна (рис. 2).

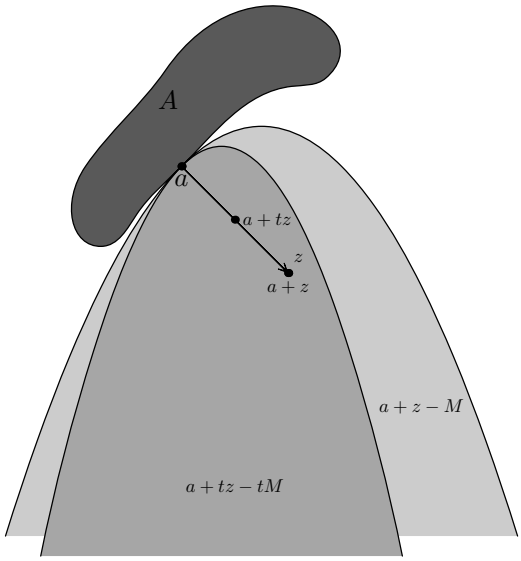


Рис. 2

**Теорема 4.3.** *Пусть в банаховом пространстве $E$ квазишары $B$ и $M$ параболичные и ограниченно равномерно выпуклые, причём квазишар $B$ является слагаемым квазишара $M$. Пусть множество $A \subset E$ является $M$-квазиограниченным и слабо выпуклым относительно $M$. Тогда $A$ является слабо выпуклым относительно $B$.*

**Доказательство.** По предложению 2.1 достаточно доказать, что для любой точки $x_0 \in E$, удовлетворяющей неравенствам $0 < \varrho_B(x_0, A) < 1$, задача

$$\min_{a \in A} \mu_B(x_0 - a) \tag{4.23}$$

корректна. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in E$, такую что $0 < \varrho_B(x_0, A) < 1$. Пусть $\{a_k\}$ — минимизирующая последовательность этой задачи, т. е. $\{a_k\} \subset A$ и $\lim\limits_{k \to \infty} \mu_B(x_0 - a_k) = \varrho_B(x_0, A)$. Обозначим

$$r = \varrho_B(x_0, A), \quad r_k = \mu_B(x_0 - a_k), \quad b_k = \frac{x_0 - a_k}{r_k}, \quad c_k = x_0 - r b_k, \quad C = x_0 - rB.$$

Тогда множество $C$ является слагаемым квазишара $-rM$,

$$\operatorname{int} C \neq \varnothing, \quad A \cap \operatorname{int} C = \varnothing, \quad b_k \in \partial B, \quad c_k \in \partial C.$$

Поскольку $c_k - a_k = (r_k - r) b_k$, то $\mu_B(c_k - a_k) = (r_k - r)\mu_B(b_k) = r_k - r$. Так как множество $B$ является слагаемым квазишара $M$, то найдётся точка $b_0$, такая что $B \subset b_0 + M$. Следовательно, существует число $R > 0$, такое что $B \subset RM$. Поэтому

$$\mu_M(c_k - a_k) \leqslant R \mu_B(c_k - a_k) \leqslant R(r_k - r) \to 0 \quad (k \to \infty).$$

Поэтому $\varrho_M(C, A) = 0$, и по теореме 4.2 последовательность $\{a_k\}$ сходится. Таким образом, задача (4.23) корректна. □

# 5. Корректность задачи об инфимальной конволюции

Напомним, что *надграфиком* функции

$$f \colon E \to \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$$

называется множество

$$\operatorname{epi} f = \{(x, y) \in E \times \mathbb{R} \mid x \in E,\ y \geqslant f(x)\},$$

а *эффективное множество* $f$ определяется равенством

$$\operatorname{dom} f = \{x \in E \mid f(x) \in \mathbb{R}\}.$$

*Инфимальной конволюцией* [15, 23] функций

$$f \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \quad g \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

называется функция

$$(f \boxplus g)(x) = \inf_{u \in E} \big(f(x - u) + g(u)\big), \quad x \in E. \tag{5.1}$$

**Замечание 5.1.** Для любых функций $f, g \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ справедливы включения

$$\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g \subset \operatorname{epi}(f \boxplus g) \subset \overline{\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g}.$$

Таким образом, инфимальная конволюция функций $f$ и $g$ — это функция, надграфик которой с точностью до замыкания совпадает с суммой Минковского надграфиков функций $f$ и $g$. Некоторые свойства инфимальной конволюции описаны, например, в [3, 7].

Задача отыскания точки минимума в (5.1) весьма часто встречается в оптимизации. Инфимальную конволюцию можно рассматривать как задачу минимизации функции $f$ с учётом штрафного слагаемого $g$ и интерпретировать как обобщение регуляризации Моро—Иосиды [21, 26].

В этом разделе в терминах свойств слабой выпуклости будут получены достаточные условия корректности задачи (5.1), а также условия, при которых точка минимума в (5.1) существует, единственна и непрерывно зависит от параметров.

Р. Джанин [20] ввёл понятие PC2-функций, которые локально представимы в виде разности выпуклой функции и положительно определённой квадратичной функции. Р. Рокафеллар [24] рассматривал близкий к классу PC2 класс функций, обладающих нижним $C^2$-свойством, для которых применимы методы субградиентной оптимизации. Ж.-Ф. Виаль [25] назвал функцию $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ слабо выпуклой, если для некоторого $r > 0$ функция $x \mapsto f(x) + r\|x\|^2$ выпукла. Известно, что если подобное определение использовать для функций в банаховом (негильбертовом) пространстве, то большинство полезных свойств таких функций, справедливых в гильбертовом пространстве, будет утрачено. В настоящей статье мы следуем работе [19], где предложено определить слабо выпуклую функцию как функцию, надграфик которой является слабо выпуклым множеством относительно некоторого квазишара.

Напомним, что *проксимальным субдифференциалом* функции

$$f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$$

в точке $x \in \operatorname{dom} f$ называется

$$\partial^P f(x) = \Big\{ u \in E \;\Big|\; (u, -1) \in N^P\Big(\big(x, f(x)\big), \operatorname{epi} f\Big)\Big\}. \tag{5.2}$$

Пусть задана выпуклая непрерывная функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$. Для любого числа $r > 0$ и любой функции $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ обозначим

$$\gamma_{(r)}(x) = r\gamma\left(\frac{x}{r}\right).$$

Заметим, что $\operatorname{epi}\gamma_{(r)} = r \cdot \operatorname{epi}\gamma$.

*$\gamma$-предифференциалом* функции $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ в точке $x \in \operatorname{dom} f$ называется

$$\pi_\gamma f(x) = \{u \in \operatorname{dom}\gamma \mid \text{найдётся } r > 0, \text{ такое что } (f \boxplus \gamma_{(r)})(x + ru) = f(x) + \gamma_{(r)}(ru)\}. \tag{5.3}$$

Следующее предложение показывает связь между проксимальным субдифференциалом и $\gamma$-предифференциалом для $\gamma(x) = \sigma\|x\|^2$ в гильбертовом пространстве.

**Предложение 5.1 [19, лемма 3.2].** *Пусть функция* $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ *определена равенством* $\gamma(x) = \sigma\|x\|^2$, $x \in E$, *при некотором* $\sigma > 0$. *Пусть функция* $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *такова, что* $\operatorname{dom}(f \boxplus \gamma) \neq \varnothing$ *и* $x_0 \in \operatorname{dom} f$. *Тогда*

$$\partial^P f(x_0) = 2\sigma\pi_\gamma f(x_0).$$

Функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *слабо выпуклой относительно функции* $\gamma$, если

$$(f \boxplus \gamma)(x+u) = f(x) + \gamma(u) \quad \text{для всех} \quad x \in \operatorname{dom} f \quad \text{и} \quad u \in \pi_\gamma f(x). \tag{5.4}$$

Через $\mathcal{WC}(\gamma)$ будем обозначать класс полунепрерывных снизу функций, слабо выпуклых относительно функции $\gamma$.

**Предложение 5.2 [19, теорема 3.5].** *Пусть функция* $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *выпуклая и полунепрерывная снизу,* $\gamma(0) < 0$ *и* $0 \in \operatorname{int}\operatorname{dom}\gamma$. *Тогда для любой функции* $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$;
2) *множество* $\operatorname{epi} f$ *замкнутое и слабо выпуклое относительно квазишара* $\operatorname{epi}\gamma$.

**Предложение 5.3 [19, теорема 3.4].** *Пусть* $E = H$ *— гильбертово пространство, функция* $\gamma\colon H \to \mathbb{R}$ *определена равенством* $\gamma(x) = \sigma\|x\|^2$ *для некоторого* $\sigma > 0$. *Пусть функция* $f\colon H \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ *полунепрерывна снизу и* $\operatorname{dom} f \neq \varnothing$. *Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) $\operatorname{dom}(f \boxplus \gamma) \neq \varnothing$ *и* $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$;
2) $f(x) - f(x_0) \geqslant \langle u, x - x_0\rangle - \sigma\|x - x_0\|^2$ *для всех* $x_0 \in \operatorname{dom} f$, $x \in H$, $u \in \partial^P f(x_0)$;
3) *функция* $x \mapsto f(x) + \gamma(x)$ *выпукла.*

Предложение 5.3 показывает, что в гильбертовом пространстве слабая выпуклость функции $f$ относительно функции $\gamma(x) = \sigma\|x\|^2$ при некотором $\sigma > 0$ эквивалентна слабой выпуклости $f$ в терминологии Ж.-Ф. Виаля и нижнему $C^2$-свойству в терминологии Р. Рокафеллара [24].

Функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ называется *равномерно выпуклой* на выпуклом множестве $X \subset E$, если

$$\inf_{x_1, x_2 \in X\colon \|x_1 - x_2\| \geqslant \varepsilon} \left( f(x_1) + f(x_2) - 2f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)\right) > 0 \quad \text{для любого} \quad \varepsilon > 0.$$

Функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ называется *коэрцитивной*, если

$$\lim_{\|x\| \to \infty} \frac{\gamma(x)}{\|x\|} = +\infty.$$

Следующее предложение даёт характеризацию класса слабо выпуклых функций в терминах корректности задачи вида (5.1).

**Предложение 5.4 [19, теоремы 3.6, 3.7].** *Пусть $E$ — банахово пространство, функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ коэрцитивная, ограниченная на любом ограниченном множестве и равномерно выпуклая на любом ограниченном множестве. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу и $\operatorname{dom}(f \boxplus \gamma) \neq \varnothing$. Тогда следующие условия эквивалентны*:

1) $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$;
2) *для любых $r \in (0,1)$ и $x_0 \in E$ задача*

$$\min_{u \in E}\bigl(f(u) + \gamma_{(r)}(x_0 - u)\bigr) \tag{5.5}$$

*корректна.*

Через $\mathcal{SC}(\gamma)$ будем обозначать класс выпуклых полунепрерывных снизу функций $g\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, для каждой из которой существует выпуклая полунепрерывная снизу функция $g_1\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, удовлетворяющая равенству $g \boxplus g_1 = \gamma$.

**Замечание 5.2.** Используя замечание 5.1 и теорему 1.13.2 из [7], получаем, что если функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ выпуклая, непрерывная и коэрцитивная, $\gamma(0) < 0$, то функция $g$ принадлежит классу $\mathcal{SC}(\gamma)$ тогда и только тогда, когда множество $\operatorname{epi} g$ является слагаемым квазишара $\operatorname{epi}\gamma$.

**Замечание 5.3.** Из [3, лемма 2.5.1] следует, что если $E = H$ — гильбертово пространство, $\gamma(x) = \sigma\|x\|^2$, функция $g\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу, $\operatorname{dom} g \neq \varnothing$, то включение $g \in \mathcal{SC}(\gamma)$ эквивалентно выпуклости функции $x \mapsto g(x) - \gamma(x)$.

Для любого числа $R > 0$ рассмотрим следующую величину, обобщающую понятие хаусдорфова расстояния для неограниченных множеств:

$$h_R(A_1, A_2) = \max\{h^+(A_1 \cap \mathfrak{B}_R(0), A_2),\, h^+(A_2 \cap \mathfrak{B}_R(0), A_1)\}.$$

Пусть $T$ — топологическое пространство. Многозначное отображение $F\colon T \to 2^E$ называется *$R$-непрерывным в точке $t_0 \in T$*, если для любых чисел $R > 0$ и $\varepsilon > 0$ существует такая окрестность $\mathcal{N}(t_0)$ точки $t_0$, что $h_R(F(t), F(t_0)) < \varepsilon$ для любого $t \in \mathcal{N}(t_0)$.

Будем предполагать, что в пространстве $E \times \mathbb{R}$ введена норма, согласованная с нормой пространства $E$, такая что существуют числа $C_1 > 0$, $C_2 > 0$, при которых

$$C_1\|z\| \leqslant \|z_x\| + |z_y| \leqslant C_2\|z\| \quad \text{для всех} \quad z_x \in E \quad \text{и} \quad z_y \in \mathbb{R}, \quad z = (z_x, z_y). \tag{5.6}$$

В дальнейшем будем рассматривать функции $f\colon E \times T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, такие что

$$\text{многозначное отображение } t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot, t) \text{ } R\text{-непрерывно в точке } t_0 \in T. \tag{5.7}$$

Если функция $f(x,t)$ непрерывна по $t$ в точке $t_0$ равномерно по $x$, т. е.

$$\lim_{t \to t_0} \sup_{x \in E} |f(x,t) - f(x,t_0)| = 0, \tag{5.8}$$

то функция $f$ удовлетворяет условию (5.7). Однако класс функций $f$, удовлетворяющих условию (5.7), значительно шире класса функций, удовлетворяющих условию (5.8). Например, при $E = \mathbb{R}$, $T = \mathbb{R}$, $t_0 \in \mathbb{R}$ функция $f(x,t) = tx^2$ или функция

$$f(x,t) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-t}, & x > t, \\ +\infty, & x \leqslant t, \end{cases}$$

удовлетворяют условию (5.7), но не удовлетворяют условию (5.8).

**Лемма 5.1.** *Пусть функция $f\colon E \times T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такова, что многозначное отображение $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ является $R$-непрерывным в точке $t_0 \in T$, где $t_0$ — предельная точка $T$, и для любого $t \in T$ функция $f(\cdot,t)\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу. Тогда*

1) *если функция $x\colon T \to E$ ограниченная и $\sup\limits_{t\in T} |f(x(t),t)| < +\infty$, то существует функция $x'\colon T \to E$, такая что*

$$\lim_{t\to t_0} \|x'(t) - x(t)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \bigl(f(x'(t),t_0) - f(x(t),t)\bigr) \leqslant 0;$$

2) *если $x_0 \in \operatorname{dom} f(\cdot,t_0)$, то существует функция $x''\colon T \to E$, такая что*

$$\lim_{t\to t_0} \|x''(t) - x_0\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \bigl(f(x''(t),t) - f(x_0,t_0)\bigr) \leqslant 0.$$

**Доказательство.** Для любого $t \in T$ обозначим $y(t) = f(x(t),t)$, $z(t) = \bigl(x(t),y(t)\bigr)$. Положим $R = \sup\limits_{t\in T} \|z(t)\|$. Так как отображение $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ является $R$-непрерывным в точке $t_0$ и $z(t) \in \operatorname{epi} f(\cdot,t)$, то

$$\varrho\bigl(z(t), \operatorname{epi} f(\cdot,t_0)\bigr) \leqslant h_R\bigl(\operatorname{epi} f(\cdot,t), \operatorname{epi} f(\cdot,t_0)\bigr) \to 0$$

при $t \to t_0$. Поскольку для любого $t \in T$ множество $\operatorname{epi} f(\cdot,t)$ замкнуто, то для любого $t \in T$ найдётся точка $z'(t) = \bigl(x'(t),y'(t)\bigr) \in \operatorname{epi} f(\cdot,t_0)$, такая что $\|z'(t) - z(t)\| \leqslant 2\varrho\bigl(z(t), \operatorname{epi} f(\cdot,t_0)\bigr)$. Отсюда и из соотношения (5.6) следует, что $\lim\limits_{t\to t_0} \|x'(t) - x(t)\| = 0$ и $\lim\limits_{t\to t_0} |y'(t) - y(t)| = 0$. Поэтому

$$\limsup_{t\to t_0} \bigl(f(x'(t),t_0) - f(x(t),t)\bigr) \leqslant \limsup_{t\to t_0} \bigl(y'(t) - y(t)\bigr) \leqslant 0.$$

Таким образом, первое утверждение доказано. Доказательство второго утверждения аналогично. □

**Лемма 5.2.** *Пусть $E$ — банахово пространство, функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном подмножестве пространства $E$, функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ выпукла, непрерывна, коэрцитивна и $\gamma(0) < 0$, $M = \operatorname{epi}\gamma$. Тогда множество $\operatorname{epi} f$ является $M$-квазиограниченным.*

**Доказательство.** Обозначим

$$\gamma_{\min} = \inf_{x\in E} \gamma(x). \tag{5.9}$$

Из условий леммы следует, что $-\infty < \gamma_{\min} < 0$. Обозначим $A = \operatorname{epi} f$. Пусть $C_1$, $C_2$ — коэффициенты из формулы (5.6). Зафиксируем произвольное число $R > 0$. По условию леммы существует число $L_f$, такое что

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L_f \|x_1 - x_2\| \quad \text{для всех} \quad x_1, x_2 \in \mathfrak{B}_{C_2R+1}(0). \tag{5.10}$$

Обозначим

$$R_1 = \sup_{x \in E\colon \gamma(x) \leqslant L_f\|x\|} \|x\|. \tag{5.11}$$

Из коэрцитивности функции $f$ следует неравенство $R_1 < +\infty$. Согласно определению 4.1 для завершения доказательства леммы требуется показать, что

$$\sup_{a \in \partial A \cap \mathfrak{B}_R(0)} \sup_{z \in N_M^1(a,A)} \|z\| < +\infty. \tag{5.12}$$

Зафиксируем произвольные $a \in \partial A \cap \mathfrak{B}_R(0)$ и $z \in N_M^1(a, A)$. Согласно равенству (2.1) существует число $t > 0$, такое что $a \in P_M(a + tz, A)$. Пусть $a = (a_x, a_y)$, $z = (z_x, z_y)$, где $a_x, z_x \in E$, $a_y, z_y \in \mathbb{R}$. Поскольку $a \in P_M(a+tz, A)$, то $a + t\lambda z \notin A$ для любого $\lambda \in (0, 1)$, т. е.

$$f(a_x + t\lambda z_x) > a_y + t\lambda z_y \quad \text{для любого} \quad \lambda \in (0, 1).$$

С другой стороны, $a \in A$, т. е. $a_y \geqslant f(a_x)$. Следовательно,

$$f(a_x + t\lambda z_x) - f(a_x) > t\lambda z_y \quad \text{для любого} \quad \lambda \in (0, 1). \tag{5.13}$$

Поскольку согласно соотношению (5.6) имеем $\|a_x\| \leqslant C_2\|a\| \leqslant C_2R$, то найдётся число $\lambda \in (0, 1)$, такое что $a_x + t\lambda z_x \in \mathfrak{B}_{C_2R+1}(0)$. Отсюда и из соотношений (5.10), (5.13) следует неравенство

$$z_y \leqslant L_f \|z_x\|. \tag{5.14}$$

Так как $z = (z_x, z_y) \in M = \operatorname{epi} \gamma$, то $z_y \geqslant \gamma(z_x)$. Отсюда и из неравенства (5.14) следует, что $\gamma(z_x) \leqslant L_f\|z_x\|$. Используя равенство (5.11), получаем неравенство $\|z_x\| \leqslant R_1$. Поэтому согласно соотношениям (5.6), (5.9), (5.14) приходим к неравенствам

$$\|z\| \leqslant \frac{\|z_x\| + |z_y|}{C_1} \leqslant \frac{R_1 + \max\{-\gamma_{\min}, L_f R_1\}}{C_1},$$

которые доказывают неравенство (5.12). □

**Теорема 5.1.** *Пусть $E$ — банахово пространство, функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ коэрцитивна, ограниченна на любом ограниченном множестве и равномерно выпукла на любом выпуклом ограниченном множестве. Пусть функция $f\colon E \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условию Липшица на любом ограниченном множестве и $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$, $\operatorname{dom}(f \boxplus \gamma) \neq \varnothing$. Пусть функция $g\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ удовлетворяет условию $g \in \mathcal{SC}(\gamma_{(r)})$, $r \in (0, 1)$, $\operatorname{int}\operatorname{dom} g \neq \varnothing$. Тогда для любого $x \in E$ задача*

$$\min_{u \in E} \bigl(f(x - u) + g(u)\bigr)$$

*корректна.*

**Доказательство.** Без потери общности будем предполагать, что $\gamma(0) < 0$. Тогда $M = \operatorname{epi}\gamma$ — квазишар. Так как функция $\gamma$ непрерывна и коэрцитивна, то согласно [18, лемма 2.5] множество $M$ параболично. В силу [19, лемма 10.1] равномерная выпуклость $\gamma$ на любом выпуклом ограниченном множестве влечёт ограниченную равномерную выпуклость множества $M$. Зафиксируем произвольную точку $x_0 \in E$. Обозначим $y_0 = (f \boxplus g)(x_0)$. Покажем, что $y_0 \in \mathbb{R}$. Так как $\operatorname{dom} f = E$, $\operatorname{dom} g \neq \varnothing$, то $y_0 < +\infty$. Поскольку $\operatorname{dom}(f \boxplus \gamma) \neq \varnothing$, то найдётся точка $x_1 \in E$, такая что $(f \boxplus \gamma)(x_1) = y_1 \in \mathbb{R}$. Так как $g \in \mathcal{SC}(\gamma_{(r)})$, то существует функция $g_1 \colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, такая что $g \boxplus g_1 = \gamma_{(r)}$. При этом найдётся точка $u_1 \in \operatorname{dom} g_1$. Поскольку

$$f \boxplus \gamma = f \boxplus \gamma_{(r)} \boxplus \gamma_{(1-r)} = f \boxplus g \boxplus g_1 \boxplus \gamma_{(1-r)},$$

то

$$y_1 = (f \boxplus \gamma)(x_1) \leqslant (f \boxplus g)(x_0) + g_1(u_1) + \gamma_{(1-r)}(x_1 - x_0 - u_1) = \\ = y_0 + g_1(u_1) + \gamma_{(1-r)}(x_1 - x_0 - u_1).$$

Следовательно, $y_0 > -\infty$, а значит, $y_0 \in \mathbb{R}$.

Обозначим $z_0 = (x_0, y_0)$ и рассмотрим множества $A = \operatorname{epi} f$, $C = z_0 - \operatorname{epi} g$. Из включений $f \in \mathcal{WC}(\gamma)$, $g \in \mathcal{SC}(\gamma_{(r)})$ согласно предложению 5.2 и замечанию 5.2 следует, что множество $A$ слабо выпукло относительно квазишара $M$, а множество $C$ является слагаемым квазишара $-rM$. По лемме 5.2 множество $A$ является $M$-квазиограниченным. Так как функция $g$ выпукла и полунепрерывна снизу, то она непрерывна на множестве $\operatorname{int}\operatorname{dom} g$. Следовательно, $\operatorname{int} C \neq \varnothing$.

Предположим, что существует точка $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in A \cap \operatorname{int} C$. Тогда $\tilde{y} \geqslant f(\tilde{x})$, $(x_0 - \tilde{x}, y_0 - \tilde{y}) \in \operatorname{int}\operatorname{epi} g$, а значит, $g(x_0 - \tilde{x}) < y_0 - \tilde{y}$. Поэтому

$$y_0 = (f \boxplus g)(x_0) \leqslant f(\tilde{x}) + g(x_0 - \tilde{x}) \leqslant \tilde{y} + g(x_0 - \tilde{x}) < y_0.$$

Полученное противоречие показывает, что $A \cap \operatorname{int} C = \varnothing$.

Пусть $\{u_k\}$ — минимизирующая последовательность в задаче

$$\min_{u \in E} \bigl(f(x_0 - u) + g(u)\bigr),$$

т. е.

$$\lim_{k \to \infty} \bigl(f(x_0 - u_k) + g(u_k)\bigr) = y_0. \tag{5.15}$$

Для любого $k \in \mathbb{N}$ обозначим

$$w_k = \bigl(x_0 - u_k, f(x_0 - u_k)\bigr), \quad \tilde{w}_k = \bigl(x_0 - u_k, y_0 - g(u_k)\bigr).$$

Из соотношений (5.6), (5.15) следует, что $\|w_k - \tilde{w}_k\| \to 0$ при $k \to \infty$. Обозначим $\varepsilon_k = \mu_M(\tilde{w}_k - w_k)$. Тогда согласно замечанию 1.3 имеем $\lim\limits_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0$. Так как $w_k \in A$, $\tilde{w}_k \in C$, то $\varrho_M(C, A) \leqslant \varepsilon_k$, а значит, $\varrho_M(C, A) = 0$. По теореме 4.2 последовательность $\{w_k\}$ сходится. Поэтому последовательность $\{u_k\}$ также сходится. □

Поскольку в теореме 5.1 в качестве функции $g$ можно взять $\gamma_{(r)}$, то теорема 5.1 является усилением предложения 5.4.

**Лемма 5.3.** *Пусть $E$ — банахово пространство, функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ коэрцитивна, ограниченна на любом ограниченном множестве и равномерно выпукла на любом ограниченном множестве. Пусть функция $g\colon E \times T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ такова, что многозначное отображение $t \mapsto \operatorname{epi} g(\cdot, t)$ является $R$-непрерывным в точке $t_0 \in T$ и для любого $t \in T$ функция $g(\cdot, t)\colon E \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ полунепрерывна снизу, $g(\cdot, t) \in \mathcal{SC}(\gamma)$, $\operatorname{int}\operatorname{dom} g(\cdot, t) \neq \varnothing$. Тогда для любого $t \in T$ существует точка $v(t) \in E$, такая что*

$$g(v(t), t) = g^{\min}(t) := \inf_{v \in E} g(v, t)$$

*и функции $v(\cdot)$, $g^{\min}(\cdot)$ непрерывны в точке $t_0$.*

**Доказательство.** Для любого $t \in T$ согласно теореме 5.1, применённой к функциям $f(x) = 0$ и $g(x) = g(x, t)$, задача $\min\limits_{v \in E} g(v, t)$ корректна. Следовательно, для любого $t \in T$ существует вектор $v(t) \in E$, такой что $g(v(t), t) = g^{\min}(t)$. Если $t_0$ — изолированная точка пространства $T$, то доказываемое утверждение тривиально выполнено. Будем предполагать, что $t_0$ — предельная точка пространства $T$. По лемме 5.1(2) существует функция $u\colon T \to E$, такая что

$$\lim_{t \to t_0} \|u(t) - v(t_0)\| = 0, \tag{5.16}$$

$$\limsup_{t \to t_0} g(u(t), t) \leqslant g(v(t_0), t_0) = g^{\min}(t_0). \tag{5.17}$$

Для любого $t \in T$ определим

$$\tilde{v}(t) = \begin{cases} v(t), & \|v(t) - u(t)\| \leqslant 1, \\ u(t) + \dfrac{v(t) - u(t)}{\|v(t) - u(t)\|}, & \|v(t) - u(t)\| > 1, \end{cases} \tag{5.18}$$

$$\tilde{g}(t) = \max\{g(\tilde{v}(t), t), g^{\min}(t_0)\}.$$

Тогда $\tilde{v}(t) \in [u(t), v(t)]$ для любого $t \in T$, и ввиду выпуклости функции $g(\cdot, t)$ имеем

$$g(\tilde{v}(t), t) \leqslant \max\{g(v(t), t), g(u(t), t)\} \leqslant g(u(t), t).$$

Отсюда и из (5.17) следует, что

$$\limsup_{t \to t_0} g(\tilde{v}(t), t) \leqslant g^{\min}(t_0),$$

а значит,

$$\limsup_{t \to t_0} \tilde{g}(t) \leqslant g^{\min}(t_0).$$

Используя утверждение 1) леммы 5.1 и ограниченность функции $\big(\tilde{v}(t), \tilde{g}(t)\big)$ в некоторой окрестности точки $t_0$, получаем, что существует функция $w\colon T \to E$, такая что

$$\lim_{t \to t_0} \|w(t) - \tilde{v}(t)\| = 0, \quad \limsup_{t \to t_0} \big(g(w(t), t_0) - \tilde{g}(t)\big) \leqslant 0. \tag{5.19}$$

Следовательно,

$$\limsup_{t\to t_0} g(w(t),t_0) \leqslant g^{\min}(t_0) = g(v(t_0),t_0). \tag{5.20}$$

Так как функция $\gamma$ равномерно выпукла на любом ограниченном множестве и коэрцитивна, то задача $\min\limits_{x\in E}\gamma(x)$ корректна. Отсюда и из условия $g(\cdot,t_0)\in\mathcal{SC}(\gamma)$ следует корректность задачи $\min\limits_{x\in E} g(x,t_0)$. Поэтому ввиду соотношения (5.20) имеем, что $\lim\limits_{t\to t_0}\|w(t)-v(t_0)\|=0$. Используя первое из равенств (5.19), получаем, что $\lim\limits_{t\to t_0}\|\tilde v(t)-v(t_0)\|=0$. Принимая во внимание равенства (5.16) и (5.18), приходим к равенству $\lim\limits_{t\to t_0}\|v(t)-v(t_0)\|=0$. Итак, функция $v(\cdot)$ непрерывна в точке $t_0$.

Согласно утверждению 1) леммы 5.1 существует функция $v'\colon T\to E$, такая что

$$\limsup_{t\to t_0}\bigl(g(v'(t),t_0)-g(v(t),y)\bigr)\leqslant 0.$$

Следовательно, используя неравенство (5.17), получаем, что

$$g^{\min}(t_0)\leqslant \liminf_{t\to t_0} g(v'(t),t_0)\leqslant \liminf_{t\to t_0} g(v(t),t)=\liminf_{t\to t_0} g^{\min}(t)\leqslant$$
$$\leqslant \limsup_{t\to t_0} g^{\min}(t)\leqslant \limsup_{t\to t_0} g(u(t),t)\leqslant g^{\min}(t_0).$$

Итак, $\lim\limits_{t\to t_0} g^{\min}(t)=g^{\min}(t_0)$, что доказывает непрерывность функции $g^{\min}(\cdot)$ в точке $t_0$. □

Наряду с операцией инфимальной конволюции (5.1) (которую также называют операцией эписуммы [3,7]), будем рассматривать операцию *эпиразности* функций $f$ и $g$:

$$(f\boxminus g)(x)=\sup_{v\in E}\bigl(f(x+v)-g(v)\bigr),\quad x\in E.$$

**Лемма 5.4.** *Пусть выпуклая полунепрерывная снизу функция $\gamma\colon E\to\mathbb{R}$ такова, что задача $\min\limits_{x\in E}\gamma(x)$ корректна и точка $x_0\in E$ является точкой минимума в этой задаче. Пусть $g\in\mathcal{SC}(\gamma)$ и точка $v_0\in E$ является точкой минимума функции $g$. Тогда*

$$(\gamma\boxminus g)(x_0-v_0)=\gamma(x_0)-g(v_0).$$

**Доказательство.** Так как $g\in\mathcal{SC}(\gamma)$, то существует выпуклая полунепрерывная снизу функция $g_1\colon E\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, удовлетворяющая равенству $g\boxplus g_1=\gamma$. Следовательно,

$$\inf_{v\in E} g(v)+\inf_{w\in E} g_1(w)=\inf_{x\in E}\gamma(x).$$

По определению инфимума найдётся последовательность $\{u_k\}\subset E$, такая что

$$\lim_{k\to\infty} g_1(u_k)=\inf_{w\in E} g_1(w).$$

Поэтому

$$\lim_{k\to\infty}\gamma(v_0+u_k)=\lim_{k\to\infty}(g\boxplus g_1)(v_0+u_k)\leqslant$$
$$\leqslant g(v_0)+\lim_{k\to\infty}g_1(u_k)=\inf_{v\in E}g(v)+\inf_{w\in E}g_1(w)=\inf_{x\in E}\gamma(x). \quad (5.21)$$

Таким образом, последовательность $\{v_0+u_k\}$ является минимизирующей в задаче $\min\limits_{x\in E}\gamma(x)$. Ввиду корректности данной задачи эта последовательность сходится к точке $x_0$, т. е. $u_k\to x_0-v_0$ при $k\to\infty$. Поскольку функция $g_1$ полунепрерывна снизу, то $g_1(x_0-v_0)\leqslant\lim\limits_{k\to\infty}g_1(u_k)$. Отсюда и из соотношений (5.21) получаем, что $g(v_0)+g_1(x_0-v_0)\leqslant\gamma(x_0)$. Итак, для любой точки $v\in E$

$$\gamma(v-v_0+x_0)=(g\boxplus g_1)(v-v_0+x_0)\leqslant g(v)+g_1(x_0-v_0)\leqslant g(v)-g(v_0)+\gamma(x_0),$$

что завершает доказательство. □

В лемме 5.5 сформулированы достаточные условия равномерной по параметру $t$ ограниченности точки минимума в следующей задаче об инфимальной конволюции с параметром:

$$\min_{u\in E}\big(f(x(t)-u,t)+g(u,t)\big). \quad (5.22)$$

Идея доказательства леммы 5.5 близка к идее доказательства леммы 2.5 работы [18] о том, что надграфик выпуклой непрерывной коэрцитивной функции является параболичным.

**Лемма 5.5.** *Пусть функция $\gamma\colon E\to\mathbb{R}$ выпуклая, коэрцитивная и ограниченная на любом ограниченном множестве, $r\in(0,1)$. Пусть заданы функции $f\colon E\times T\to\mathbb{R}$ и $g\colon E\times T\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ и функции $u,v,w,x\colon T\to E$, такие что*

$$\sup_{t\in T}\|x(t)\|=C_x<+\infty,\quad \sup_{t\in T}\|v(t)\|=C_v<+\infty,\quad \sup_{t\in T}\|w(t)\|=C_w<+\infty,$$
$$\inf_{t\in T}(f(\cdot,t)\boxplus\gamma)(0)=C_f^-<-\infty,$$
$$\sup_{t\in T}\sup_{x\in\mathfrak{B}_R(0)}f(x,t)=C_f^+(R)<+\infty\quad \textit{для любого}\quad R>0,$$
$$\sup_{t\in T}g(v(t),t)=C_g^+<+\infty,\quad \sup_{t\in T}\big(\gamma_{(r)}\boxminus g(\cdot,t)\big)\big(w(t)\big)=C_g^-<+\infty,$$
$$\big(f(\cdot,t)\boxplus g(\cdot,t)\big)\big(x(t)\big)=f(x(t)-u(t),t)+g(u(t),t)\quad \textit{для любого}\quad t\in T.$$

*Тогда*

$$\sup_{t\in T}\|u(t)\|<+\infty.$$

**Доказательство.** По определению операций эписуммы и эпиразности и из условий леммы для любого $t\in T$ имеем

$$f(x(t)-u(t),t)+g(u(t),t)=$$
$$=\big(f(\cdot,t)\boxplus g(\cdot,t)\big)\big(x(t)\big)\leqslant f(x(t)-v(t),t)+g(v(t),t)\leqslant C_f^+(C_x+C_v)+C_g^+,$$

$$f\big(x(t)-u(t)\big)+\gamma\big(u(t)-x(t)\big)\geqslant(f(\cdot,t)\boxplus\gamma)(0)\geqslant C_f^-,$$
$$\gamma_{(r)}\big(w(t)+u(t)\big)-g(u(t),t)\leqslant\big(\gamma_{(r)}\boxminus g(\cdot,t)\big)\big(w(t)\big)\leqslant C_g^-.$$

Поэтому

$$\gamma_{(r)}\big(w(t)+u(t)\big)-\gamma\big(u(t)-x(t)\big)\leqslant C_f^+(C_x+C_v)-C_f^-+C_g^++C_g^- \quad \text{для любого } t\in T. \tag{5.23}$$

Определим множество

$$T_1=\{t\in T\mid r\|u(t)\|>1\}. \tag{5.24}$$

Если $T_1=\varnothing$, то доказываемое утверждение справедливо. Поэтому будем предполагать, что $T_1\neq\varnothing$. Для любого $t\in T_1$ обозначим

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{\|u(t)\|},\quad b(t)=\frac{1}{1-r+\varepsilon(t)}\left(\frac{\varepsilon(t)}{r}u(t)-x(t)-\frac{r-\varepsilon(t)}{r}w(t)\right).$$

Тогда $\varepsilon(t)<r$ и

$$u(t)-x(t)=\big(r-\varepsilon(t)\big)\frac{w(t)+u(t)}{r}+\big(1-r+\varepsilon(t)\big)b(t),$$

то в силу выпуклости функции $\gamma$ имеем

$$\gamma\big(u(t)-x(t)\big)\leqslant\frac{r-\varepsilon(t)}{r}\gamma_{(r)}\big(u(t)+w(t)\big)+\big(1-r+\varepsilon(t)\big)\gamma\big(b(t)\big)\ \text{ для любого } t\in T_1.$$

Отсюда и из неравенства (5.23) следует, что

$$\varepsilon(t)\gamma\big(u(t)-x(t)\big)\leqslant\big(r-\varepsilon(t)\big)(C_f^+(C_x+C_v)-C_f^-+C_g^++C_g^-)+ \\ +r\big(1-r+\varepsilon(t)\big)\gamma\big(b(t)\big)\ \text{ для любого } t\in T_1.$$

Поскольку

$$\sup_{t\in T_1}\|b(t)\|\leqslant\frac{1}{1-r}\left(\frac{1}{r}+C_x+C_w\right)<+\infty,$$

а функция $\gamma$ ограниченная на любом ограниченном множестве, то

$$\sup_{t\in T_1}\gamma\big(b(t)\big)<+\infty.$$

Следовательно,

$$\sup_{t\in T_1}\frac{\gamma(u(t)-x(t))}{\|u(t)\|}=\sup_{t\in T_1}\varepsilon(t)\gamma\big(u(t)-x(t)\big)<+\infty.$$

Ввиду коэрцитивности функции $\gamma$ и ограниченности функции $x$

$$\sup_{t\in T_1}\|u(t)\|<+\infty.$$

Отсюда и из равенства (5.24) получаем доказываемое утверждение. □

Следующая теорема утверждает, что если функции $f(x,t)$, $g(x,t)$ и $x(t)$ непрерывны по $t$ в том смысле, что многозначные отображения $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ и $t \mapsto \operatorname{epi} g(\cdot,t)$ $R$-непрерывны, причём для каждого $t$ функции $f(\cdot,t)$ и $g(\cdot,t)$ удовлетворяют соответствующим условиям слабой и сильной выпуклости, то точка минимума в инфимальной конволюции (5.22) непрерывно зависит от $t$.

**Теорема 5.2.** *Пусть $E$ — банахово пространство, функция $\gamma\colon E \to \mathbb{R}$ коэрцитивна, ограниченна на любом ограниченном множестве и равномерно выпукла на любом выпуклом ограниченном множестве. Пусть функции $f\colon E \times T \to \mathbb{R}$ и $g\colon E \times T \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ таковы, что многозначные отображения $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ и $t \mapsto \operatorname{epi} g(\cdot,t)$ являются $R$-непрерывными в точке $t_0 \in T$. Пусть $f(\cdot,t) \in \mathcal{WC}(\gamma)$ и $g(\cdot,t) \in \mathcal{SC}(\gamma_{(r)})$ для любого $t \in T$, где $r \in (0,1)$ не зависит от $t$. Пусть для любого числа $R > 0$ существует число $L(R) \in \mathbb{R}$, такое что для каждого $t \in T$ функция $f(\cdot,t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(R)$ на шаре $\mathfrak{B}_R(0)$. Пусть*

$$\inf_{t\in T} \inf_{x\in E} \big(f(x,t) + \gamma(-x)\big) = C > -\infty \tag{5.25}$$

*и $\operatorname{int}\operatorname{dom} g(\cdot,t) \neq \varnothing$ для любого $t \in T$. Пусть функция $x\colon T \to E$ непрерывна в точке $t_0$. Тогда для любого $t \in T$ существует и единственна точка $u(t) \in E$, такая что*

$$f(x(t) - u(t), t) + g(u(t), t) = \min_{u\in E} \big(f(x(t) - u, t) + g(u, t)\big). \tag{5.26}$$

*При этом функция $u(\cdot)$ непрерывна в точке $t_0$.*

**Доказательство.** По теореме 5.1 для каждого $t \in T$ существует и единственна точка $u(t) \in E$, удовлетворяющая равенству (5.26). Покажем, что

$$\limsup_{t\to t_0} \|u(t)\| < +\infty. \tag{5.27}$$

Согласно лемме 5.3 для любого $t \in T$ существует точка $v(t) \in E$, такая что

$$g(v(t), t) = g^{\min}(t) := \inf_{v\in E} g(v, t)$$

и функции $v(\cdot)$, $g^{\min}(\cdot)$ непрерывны в точке $t_0$. Применяя теорему 5.1 для $f(x) = 0$, $g(x) = \gamma_{(r)}(x)$, получаем корректность задачи $\min\limits_{x\in E} \gamma(x)$. Поэтому существует $x_0 \in E$ — точка минимума функции $\gamma$, и по лемме 5.4 имеем

$$\big(\gamma_{(r)} \boxminus g(\cdot,t)\big)\big(x_0 - v(t)\big) = \gamma_{(r)}(x_0) - g(v(t),t) = \\ = \gamma_{(r)}(x_0) - g^{\min}(t) \quad \text{для любого} \quad t \in T.$$

Отсюда и из непрерывности функции $g^{\min}(\cdot)$ в точке $t_0$ получаем, что

$$\limsup_{t\to t_0} \big(\gamma_{(r)} \boxminus g(\cdot,t)\big)\big(x_0 - v(t)\big) < +\infty, \ \limsup_{t\to t_0} g(v(t),t) = \limsup_{t\to t_0} g^{\min}(t) < +\infty. \tag{5.28}$$

Ввиду $R$-непрерывности многозначного отображения $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ в точке $t_0$ согласно лемме 5.1(2) найдётся функция $a\colon T \to E$, такая что

$$\lim_{t\to t_0} \|a(t)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} f(a(t),t) \leqslant f(0,t_0).$$

Поэтому существует такая окрестность $\mathcal{N}$ точки $t_0$, что

$$\|a(t)\| < 1, \quad f(a(t),t) \leqslant f(0,t_0) + 1 \ \text{ для любого } \ t \in \mathcal{N}. \tag{5.29}$$

Поскольку для любого $t \in T$ функция $f(\cdot,t)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $L(R+1)$ на шаре $\mathfrak{B}_{R+1}(0)$, то, используя соотношение (5.29), получаем

$$\sup_{t\in\mathcal{N}} \sup_{x\in\mathfrak{B}_R(0)} f(x,t) \leqslant \sup_{t\in\mathcal{N}} f(a(t),t) + (R+1)\cdot L(R+1) < +\infty.$$

Применяя лемму 5.5 и учитывая соотношения (5.25), (5.28), получаем существование такой окрестности $\mathcal{N}' \subset \mathcal{N}$ точки $t_0$, что

$$\sup_{t\in\mathcal{N}'} \|u(t)\| < +\infty.$$

Это доказывает неравенство (5.27). Используя соотношения

$$f(x(t)-u(t),t) + g(u(t),t) = \big(f(\cdot,t) \boxplus g(\cdot,t)\big)\big(x(t)\big) \leqslant$$
$$\leqslant f(x(t)-v(t),t) + g(v(t),t) = f(x(t)-v(t),t) + g^{\min}(t),$$

$$\limsup_{t\to t_0} \|x(t)\| < +\infty, \quad \limsup_{t\to t_0} \|u(t)\| < +\infty, \quad \limsup_{t\to t_0} \|v(t)\| < +\infty$$

и условие Липшица на любом ограниченном множестве для функций $f(\cdot,t)$ с константой, не зависящей от $t$, получаем неравенство

$$\limsup_{t\to t_0} g(u(t),t) < +\infty. \tag{5.30}$$

По лемме 5.1 ввиду $R$-непрерывности многозначного отображения $t \mapsto \operatorname{epi} g(\cdot,t)$ в точке $t_0$ найдутся функции $u', u'' \colon T \to E$, такие что

$$\lim_{t\to t_0} \|u'(t) - u(t)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \big(g(u'(t),t_0) - g(u(t),t)\big) \leqslant 0,$$
$$\lim_{t\to t_0} \|u''(t) - u(t_0)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \big(g(u''(t),t) - g(u(t_0),t_0)\big) \leqslant 0.$$

По лемме 5.1 ввиду $R$-непрерывности многозначного отображения $t \mapsto \operatorname{epi} f(\cdot,t)$ в точке $t_0$ найдутся функции $v', v'' \colon T \to E$, такие что

$$\lim_{t\to t_0} \|v'(t) - x(t) + u(t)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \big(f(v'(t),t_0) - f(x(t)-u(t),t)\big) \leqslant 0,$$
$$\lim_{t\to t_0} \|v''(t) - x(t_0) + u(t_0)\| = 0, \quad \limsup_{t\to t_0} \big(f(v''(t),t) - f(x(t_0)-u(t_0),t_0)\big) \leqslant 0.$$

Отсюда согласно условию Липшица для функций $f(\cdot,t)$ имеем

$$\limsup_{t\to t_0} \big(f(x(t_0)-u'(t),t_0) - f(x(t)-u(t),t)\big) \leqslant 0,$$
$$\limsup_{t\to t_0} \big(f(x(t)-u''(t),t) - f(x(t_0)-u(t_0),t_0)\big) \leqslant 0.$$

Используя равенство (5.26), получаем

$$\limsup_{t\to t_0}\big(f(x(t_0)-u'(t),t_0)+g(u'(t),t_0)\big)\leqslant\limsup_{t\to t_0}\big(f(x(t)-u(t),t)+g(u(t),t)\big)\leqslant$$
$$\leqslant\limsup_{t\to t_0}\big(f(x(t)-u''(t),t)+g(u''(t),t)\big)\leqslant$$
$$\leqslant f(x(t_0)-u(t_0),t_0)+g(u(t_0),t_0)=\min_{u\in E}\big(f(x(t_0)-u,t_0)+g(u,t_0)\big).$$

Поэтому для любого $k\in\mathbb{N}$ найдётся такая окрестность $\mathcal{N}_k$ точки $t_0$, что

$$f(x(t_0)-u'(t),t_0)+g(u'(t),t_0)\leqslant$$
$$\leqslant\min_{u\in E}\big(f(x(t_0)-u,t_0)+g(u,t_0)\big)+\frac{1}{k}\quad\text{для любого}\quad t\in\mathcal{N}_k. \tag{5.31}$$

Покажем, что

$$\lim_{t\to t_0}\|u'(t)-u(t_0)\|=0. \tag{5.32}$$

Предположим, что соотношение (5.32) не выполнено, т. е.

$$\varepsilon_0:=\limsup_{t\to t_0}\|u'(t)-u(t_0)\|>0.$$

Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$ найдётся элемент $t_k\in\mathcal{N}_k$, такой что $\|u'(t_k)-u(t_0)\|>$ $>\varepsilon_0/2$. Так как $t_k\in\mathcal{N}_k$, то согласно соотношению (5.31) последовательность $\{u'(t_k)\}$ является минимизирующей в задаче

$$\min_{u\in E}\big(f(x(t_0)-u,t_0)+g(u,t_0)\big).$$

Согласно теореме 5.1 последовательность $\{u'(t_k)\}$ сходится к $u(t_0)$, что противоречит неравенству $\|u'(t_k)-u(t_0)\|>\varepsilon_0/2$. Противоречие доказывает соотношение (5.32), которое вместе с равенством $\lim\limits_{t\to t_0}\|u'(t)-u(t)\|=0$ доказывает непрерывность функции $u(\cdot)$ в точке $t_0$. □

# Литература


[1] Алимов А. Р., Карлов М. И. Множества с внешним чебышёвским слоем // Мат. заметки. — 2001. — Т. 69, № 2. — С. 303—307.

[2] Балашов М. В., Иванов Г. Е. Слабо выпуклые и проксимально гладкие множества в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. мат. — 2009. — Т. 73, № 3. — С. 23—66.

[3] Иванов Г. Е. Слабо выпуклые множества и функции: теория и приложения. — М.: Физматлит, 2006.

[4] Иванов Г. Е. Критерий гладких порождающих множеств // Мат. сб. — 2007. — Т. 198, № 3. — С. 51—76.

[5] Иванов Г. Е., Лопушански М. С. Аппроксимативные свойства слабо выпуклых множеств в пространствах с несимметричной полунормой // Тр. МФТИ. — 2012. — Т. 4, № 4. — С. 94—104.

[6] Левитин Е. С., Поляк Б. Т. Методы минимизации при наличии ограничений // ЖВМ и МФ. — 1966. — Т. 6, № 5. — С. 787—823.

[7] Половинкин Е. С., Балашов М. В. Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2007.

[8] Balashov M. V., Repovš D. Uniform convexity and the splitting problem for selections // J. Math. Anal. Appl. — 2009. — Vol. 360, no. 1. — P. 307—316.

[9] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Characterization of proximal regular sets in super reflexive Banach spaces // J. Convex Anal. — 2006. — Vol. 13. — P. 525—559.

[10] Bernard F., Thibault L., Zlateva N. Prox-regular sets and epigraphs in uniformly convex Banach spaces: Various regularities and other properties // Trans. Am. Math. Soc. — 2011. — Vol. 363. — P. 2211—2247.

[11] Clarke F. H., Stern R. J., Wolenski P. R. Proximal smoothness and lower-$C^2$ property // J. Convex Anal. — 1995. — Vol. 2. — P. 117—144.

[12] Clarkson J. A. Uniformly convex spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1936. — Vol. 40. — P. 396—414.

[13] Colombo G., Goncharov V. V., Mordukhovich B. S. Well-posedness of minimal time problems with constant dynamics in Banach spaces // Set-Valued Var. Anal. — 2010. — Vol. 18, no. 3-4. — P. 349—372.

[14] Federer H. Curvature measures // Trans. Am. Math. Soc. — 1959. — Vol. 93. — P. 418—491.

[15] Fenchel W. Convex Cones, Sets and Functions: Mimeographed Lect. Notes. — Princeton: Princeton Univ., 1951.

[16] Goncharov V. V., Pereira F. F. Neighbourhood retractions of nonconvex sets in a Hilbert space via sublinear functionals // J. Convex Anal. — 2011. — Vol. 18. — P. 1—36.

[17] Goncharov V. V., Pereira F. F. Geometric conditions for regularity in a time-minimum problem with constant dynamics // J. Convex Anal. — 2012. — Vol. 19. — P. 631—669.

[18] Ivanov G. E. On well posed best approximation problems for a nonsymmetric seminorm // J. Convex Anal. — 2013. — Vol. 20, no. 2. — P. 501—529.

[19] Ivanov G. E. Weak convexity of sets and functions in a Banach space // J. Convex Anal. — 2015. — Vol. 22, No. 2.

[20] Janin R. Sur la dualité et la sensibilité dans les problèmes de programmation mathématique: Thèse de Doctorat ès-Sciences Mathématiques. — Université de Paris, 1974.

[21] Moreau J. J. Proximité et dualité dans un espace hilbertien // Bull. Soc. Math. Fr. — 1965. — Vol. 93. — P. 273—299.

[22] Poliquin R. A., Rockafellar R. T., Thibault L. Local differentiability of distance functions // Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — Vol. 352. — P. 5231—5249.

[23] Rockafellar R. T. Convex Analysis. — Princeton, 1970.

[24] Rockafellar R. T. Favorable classes of Lipschitz continuous functions in subgradient optimization // Progress in Nondifferentiable Optimization / E. Nurminski (ed.). — IIASA Collaborative Proc. Ser., — Laxenburg, Austria: Int. Inst. Appl. Systems Anal., 1982. — P. 125—144.

[25] Vial J.-P. Strong and weak convexity of sets and functions // Math. Oper. Res. — 1983. — Vol. 8. — P. 231—259.

[26] Yosida K. Functional Analysis. — Berlin: Springer, 1964.